সহজ বীজগণিত

প্রফেসর কে. পি. বসু প্র্ণীত সর্বজ বীজগণিত ষিভীয় খণ্ড (Additional Course)—॥০ প্রফেসর কে. পি. বসু প্রণীত প্রফেসর দেবপ্রসাদ ঘোষ্ কর্ত্তক অনুদিত 🔒 পুনর্লিখিত আধুনিক জ্যামিতি ১ম-৪র্থ খণ্ড--১॥০ আপুনিক জ্যামিতি ীয় খণ্ড-No আধুনিক জ্যার্মিতির সমাধান—২ বিঙ্গীয় গভর্ণমেটের শিক্ষাবিভাগ কর্ত্ত্বক বঙ্গদেশের উচ্চ হ[্]দ্যাজী বিষ্যাণয়সমূহের পাঠ্যরূপে অন্তুমোদিত (কলিঃ গেজেট, তাং ১৬৷১২৷৩৭)

সহজ বীজগণিত

ALGEBRA MADE EASY (MATRICULATION ALGEBRA) এছের বাঙ্গালা সংগ্বরণ " িম হইতে ১০ম শ্রেণীর পাঠ্য 1

ঢাকা কলেজের ভৃতপূর্ব্ব গণিতাধ্যাপক, "এল্জেবরা মেড্ ইজি", "মডার্ণ জিওমেট্র", "ইন্টারমিডিয়েট্ এল্জেবরা", "ইন্টারমিডিয়েট্ সলিড্ জিওমেট্র" প্রভৃতি প্রণেতা অধ্যাপক কালীপদ বস্তু, এম্, এ. প্রণীত

কে. পি. বসু লাইব্রেরী

১১ নং মহেন্দ্র গোস্বামী লেন, কলিকাভা

শ্রীজিভেন্দ্র কুমার বস্থা, বি. এ. ও শ্রীত্রিদিবেশ বস্থা, বি. এ. ্ কর্ত্ত্ব অনুদিত ও প্রকাশিত ১১ নং মহেন্দ্র গোস্বামী লেন, কলিকাতা

. মূদ্রক্রির—শ্রীত্রিদিবেশ বস্থ, বি. এ. কে. পি. বস্থ, প্রিন্টিং ওয়ার্কস, ১১ কৈ মহেক্র গোস্বামী লেুন, কলিকাতু,

চিত্রশিল্পী—শ্রীমনুজ গুই

নিবেদন

কলিকাতা বিশ্ববিত্যালয়ের নির্দেশাস্থ্যারে আগামী ১৯৪১ খৃষ্টান্দ হইতে প্রবেশিকা পরীক্ষার্থিগণকে বৃদ্ধভাষার গণিতশাস্ত্রের পরীক্ষা দিতে হইবে। এই নবপ্রবর্ত্তিত বিধান অমুসারে, আমাদের পিতৃদেব অধ্যাপক কালীপদ বস্তু মহাশয়ের গুণমুগ্ধ ছাত্র-সম্প্রালায়ের আগ্রহাতিশয়ে এবং স্থবী শিক্ষকমণ্ডলীর বিশেষ অমুরোধে আমরা তৎপ্রণীত সর্বজনসমাদৃত 'ALGEBRA MADE EASY' গ্রন্থের বাংলা সংস্করণ প্রকাশ করিলাম। ইহা মূল গ্রন্থের অবিকল বন্ধানুবাদ। ইহাতে মূল গ্রন্থের সমস্ত অক্ষপ্তলি কোনরূপ পরিবর্ত্তন না করিয়া যথাযথভাবে সন্নিবেশিত হইয়াছে। যে সকল বৈশিষ্ট্যের জন্ত মূল গ্রন্থখানি শিক্ষক ও শিক্ষাথিগণের নিকট প্রায় অর্দ্ধশতান্দী যাবৎ সমাদর পাইয়া আসিতেছে, ইহাতে তৎসমুদয়ই সংরক্ষিত হইয়াছে। ইহার ভাষা সরল; এবং বিষয়বস্তপ্তলি ইংরাজী সংস্করণের ক্যায় সহজবোধ্য। ক্তৃতন বিধানান্ত্রসারে, পরীক্ষা বন্ধভাষায় হইলেও প্রশ্নপত্র ইংরাজীতেই হইবে; স্থতরাং, বাহাতে পরীক্ষার্থিগণের বৃঝিবার কোনদ্ধপ অস্থবিধা না হয়, তজ্জন্ত প্রত্যেক পারিভাষিক শুন্দেরে সঙ্গে সঙ্গের ইংরাজী প্রতিশব্দ দেওয়া হইয়াছে। এই পুস্তকে বিশ্ববিত্যালয়নির্দিষ্ট পরিভাষা অবলম্বন করা হইয়াছে।

. বিশ্ববিত্যালয়ের নবপ্রবর্ত্তিত বিধান অন্তুসারে প্রবেশিকা পরীক্ষায় অতিরিক্ত পঠিতব্য ,বিষয়সমূহের (Additional Course) বিশেষ প্রাধান্ত দেওয়া হয় নাই। ১৯৪০ খৃষ্টাব্দের পর্বর পর্যান্ত অতিরিক্ত বেষয়গুলির মধ্যে যে কোন ছইটি বিষয়ে পরীক্ষা দেওয়া বাধ্যতা-মূলক ; কিন্তু তৎপরবর্ত্তী সময়ে তাহা আর বাধ্যতামূলক থাকিবে না। অর্থাৎ ১৯৪০ খৃষ্টাব্দ হইতে অতিরিক্ত বিষয়ে পরীক্ষা দান শিক্ষার্থীর ইঙ্ছাধীন।

বীজগণিতের অতিরিক্ত পাঠ্য বিষয়সমূহ একই পুস্তকের অন্তর্গত হইলে, কলেবর বৃদ্ধির জন্ম পুস্তকের মূল্যও বৃদ্ধি করিতে হয়; কিন্তু অধিকাংশ শিক্ষার্থীর তাহা কাজে লাগিবে না। এইজন্ম অতিরিক্ত বিষয়গুলি স্বতন্ত্ব আকারে প্রকাশিত হইয়া আট আনা মূল্য নির্দিষ্ট হইল। দেশের বর্ত্তমান আর্থিক অবস্থার প্রতি দৃষ্টি রাখিয়া এই গ্রন্থের মূল্যও যথাসম্ভব স্থলত করা হইল।

क्लिप्रेन् ১৫ই সেপ্টেম্বর, ১৯৩৭ শ্রীজিতেপ্রকুমার বস্থ শ্রীত্তিদিবেশ বস্থ

সূচীপত্ৰ

ু বিষয়			•		পৃষ্ঠা
উপক্রমণিকা	•		•••	•••	\$
•	প্রথম	অধ্যায়			
স্	ংজ্ঞা প্রকরণ	(Definit	ions)		
ं हिंब	হ্ন (Sign) ঃ	প্রভীক (৪	ymbol)		
টিক	•		•••		¢
প্রতীক	•••	•••		•••	¢
	দ্বিতীয়	অধ্যাহ	1		
ধ	নাত্মক ও ঃ	ঋণাত্মক র	ালি		
(Posit	tive and Ne	gative Qu	antities)	,	
ধনাত্মক ও ঋণাত্মক রাশি				•••	76
লৈথিক উদাহরণ	•••	•••	•••	•••	२०
	ভূতীয়	অধ্যায়			
সাধারণ	চারি নিয়ম	(Four Si	mple Rules) .		
যোগ•(Addition)	•••	•	•	•	२२
বিয়োগ (Subtraction)		·		•:•	. ৩২
বন্ধনী স্থাপন ও অপসারণ (In	sertion & R	emoval of	Brackets)	•••	৩৭
গুণুন (Multiplication)	•••	•••	`	•••	8 •
ভাগ (Division)	•		•••	•••	(3
বিবিধ প্রশ্নমালা I	!	•	··	•••	(b
•	চতুৰ্থ .	ভাষ্যায়			•
• अत्रन र	ৰূত্ৰাবলী ও	ভাহাদের	প্রয়োগ		•
, (Simple F	ormulæ an	ð their ap	plications)	• •	•
দরল স্থতাবলী ও তা্হাদের প্রা	য়োগ	•••		• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	98 .

9		
স্থচ	เข	Ø

•					
विषम् .	C,				পৃষ্ঠা
*	পঞ্চম	অধ্যায়			
স	রল।সমীকরণ।	Simple Equa	ation)		•
সরল স্মীকরণ	•••		•••	•••	ь.
	ষ্ট্ৰ	অধ্যায়			
7	দরল সমীকরণ	বিষয়ক প্রশ	11वनी		
(Pro	blems leading	to Simple E	quations)		
শাঙ্কেতিক বাক্য (Symb	olical Expression	on) গঠন	•	•••	F@
সরল সমীকরণ সম্বন্ধীয় স			•••	•••	bb
	সপ্তম	অথ্যায়			
বি	ন্দু সংস্থাপন (PI	otting of Po	ints) :		
	লেখাবলী	(Graphs)			
উপক্রমণিক!	•••	•••	•••	•••	৯•
বৰ্গাঙ্কিত কাগজ (Squar	red Paper)	·:·	•	•••	.స8
বিন্দু সংস্থাপন	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	•••	•••	•••	>0>
বিবিধ প্রশ্নমালা ii	••	•••	•••	•••	> 00.
• .	• অষ্ট্ৰস	অধ্যায়			
•	জটিল যোগ	া ও বিয়োগ	†	•	
. (Н	arder Addition	and Subtra	action)		•
জটিল যোগ				••••	. >>>
জটিল বিয়োগ	• • • • •	•	•••		774
	নবম	অধ্যায়		•	
· জ	টিল প্ৰণৰ (Har	der Multipli	cation).	•	•
कंपिन खननं •	•••	• [•]		,	५२२
'সহগ বিচ্ছিন্নকর্ণ' প্র ণা	नी (Method of I	Detached Co-	efficients)	•••	५२ १

স্ চীপত্ৰ			11/0
: বিষয়			পৃষ্ঠা
দেশম অধ্যায়	i		ξο,
জটিল ভাগহার (Harder Div	ision)		
জ্বটিল ভাগ		•••	202
অসম্পূর্ণ ভাগ (Inexact Division)	•••	•••	১৩৮
'সহগ বিচ্ছিন্নকরণ' প্রক্রিয়া (Method of Detached Co-	efficients)		306
্রকাদশ <i>অ</i> প্রায়			
পূত্রাবলী ও উহাদের জ্যামিতিব	সমাধান		
(Formulæ and their Geometrical Re)	
স্থাবনীর প্রয়োগ (Application of Formulæ)	presentation,		583
স্থ্রাবলীর জ্যামিতিক সমাধান (Geometrical Represent	ation)	•••	>89
	autony	•••	,,,
হাদেশ অপ্রায়			
সহজ উৎপাদক-বিশ্লেষণ (Simple Fa	ctorisation)		
সহজ উৎপাদক (Simple Factors)-বিশ্লেষণ	•••	•••	>66
্ ত্ৰয়েদ্শ অথ্যয়			
সহজ অভেদাবলী (Easy Ident	ities)		
সহজ্ অভেদাবলী (Easy Identities)	•••	•••	১৬৮
বিবিধ প্রশ্নমালা III	•••		1796
. চতুদ্দশ অধ্যায়			
গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ্র	সা. গু .) ,		•
(Kighest Common Factor	r)		
গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (উৎপাদক সাহায্যে) নির্ণয়	•••	,	ントン
শঞ্চলশ অধ্যায়			
লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. স	1. 19.)		
(Lowest Common Multipl		•	
ল্লমির সাধারণ জ্বিত্তক (উৎপাদক সাহায্যে) নির্ণয	•••	• , •	১৮৬ ১৮৬

विषय्र					পৃঙা
•	হাড়শ	অধ্য	h돌I		
সহজ	ভগ্নাংশ	(Easy	Fraction)		•
সংজ্ঞা	•••	•••	•••		১৮৯
ভগ্নাংশকে 'লঘিষ্ঠ আকারে' পরি	বৰ্ত্তন	•••	•••	•••	056
বিভিন্ন ভগ্নাংশকে সম-হরবিশিষ্ট	করণ	•••		•••	১৯২
ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ	•••	•••	•••	•••	১৯৪
ভগ্নাংশের গুণন	•••	•••			১৯৮
ভগ্নাংশের ভাঁগ		•••		• • •	. २००
•	নপ্তদেশ	অধ্য	গহ		
সরল স	মীকরণ (S	imple	Equations)		
সরল সমীকরণ	•••		•••		२०२
সরল সমীকরণ সম্বন্ধীয় প্রশ্লাবলী	•••	•••	•••	•••	250
3	অ স্তাদ্য শ	অপ্র	ায়		
সরল সহ-সমীক	রণ (Simul	taneo	us Equations)	এবং	
	ীয় প্রশ্নাব				
সরল সহ-সমীকর্ণ	•••	•••	4	•••	২১৬
সরল সহ-সমীকরণ বিধয়ক সহজ	প্রশাবলী	•••	• • •	•••	२२8 '
	নবিংশ	ভাষ	গেহা		• . '
			চিত্রাবলী .	•	
•	s of Simp			•	
সরল সমীকরণের লৈখিক চিত্রাবল		•			२७५
একটিমাত্র চল (variable)-বিশিষ্ট		 যুৱাশিং	 ব লৈথিক চিত্ৰ		.২ <i>e</i> ৬
(Vallable) (Vallable)	•	a all t		•••	• (• •
•	বিংশ ৰ	সধ্যা:	হ্ <u></u>	•	
সহজ দ্বি-শক্তি	দুমীকরণ '	ও ত	দ্বয়ক প্রশাবল	ŕ	
(Easy Quadra	tic Equati	ions a	nd Problems)	. •	
সহজ দ্বি-শক্তি স্মীকরণ ও তদ্বিষয়	ক প্রশাবলী	•••	,	ŧ	২৩৯
विंविध अभ्रमाना .iv	•••	•••	•••	•••	२ 8 8

স্ফীপত্র					1100
বিষয়					পৃষ্ঠা
	একবিং×	অপ্রায়		?	
, জটিল	সূত্রাবলী (Ha	arder Form	ulæ)		
জটিল স্তাবলী	•••	•••	•••	•••	२8৯
দ্বিপদরাশির শক্তি নির্ণয়: উ	টুদ্ঘাতন (Powe	rs of Binom	ials : Invol	ution)	२৫७
স্ত্রাবলীর পুনরুল্লেখ	•••	•••	•••	•••	२७8
	দ্বাবিংশ	ভাষ্যায়			
জৰ্চি	ল গুণনীয়ক	ও অভেদ	বলী		
(На	rder Factors	and Identi	ties)		
গুণনীয়ক (Factors)	•••	•••	• • • *	•••	২৬৬
চক্র-ক্রম (Cyclic Order)	•••	•••	•••	•••	२१०
বিপরীত রাশিমালার গুণনীয়					
(Factorisation of	Reciprocal Ex	pression)	•••	•••	२१२
বিবিধ উদাহরণমালা	•••	•••	•••		२४०
অভেদাবলী (Identities)	•••	•••	•••	•••	२৮ 8
সাপেক্ষ অভেদ (Conditions	l Identities)	•••		•••	२৮९
	ভ্ৰয়োবিং শ	অখ্যায়			
· ভাগশেষ স দ ৰ্	নীয় প্রতিজ্ঞা	(Remainde	r Theorem	9	
i	বিভাজ্যতা (I	oivisibility)		·	
ভাগশেষ সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা		•••		•••	२२१
বিভাজ্যতা ও গুণনীয়ক সম্বন্ধী	ায় প্রতিজ্ঞা	•••	•••	•••	२२२
বিভাজ্যতা বিষয়ক কতিপয় ভ	মাব শ্য কীয় প্রতিজ্ঞ	d	•••	•••	207
•	চতুৰিবংশ	অথ্যায়	•	4	
জটিল	তর গ. সা. 🔻	छ. ও म. ः	ना. 🔨.		
(Ha	rder H. C. Γ.	and L. C. I	VI.)		
জটিশতর গ. সা. গু.	•••	•••	•••	•••	97°.
জটিলতর ল. সা. গু	•••	•••	•••	•••	૭૨૭ ′

				•	
বিষয় ' ',				Ţ	পৃষ্ঠা
,*	পঞ্চবিংশ	অধ্যায়			
ज िन	ভগ্নাংশ (Ha	rder Fract	tions)		•
ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠ আকারে পরিব	ৰ্ক্ত ন				
(Reductions of F	ractions to lo	west terms	s)	•••	৩২ ৭
ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ	•	•••	***	•••	೨೨۰
হরুহ (Complex) এবং ধারাবা	হিক বা ক্ৰমিক	(Continued) ভগ্নাংশ	•••	೨೨৪
চক্র-ক্রমবিশিষ্ট ভগ্নাংশ	•••		,	•••	೨೨१
চক্র-ক্রমবিশিষ্ট ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয়	ফল	•••	• • •	• • •	೨೨৮
ভগ্নাংশ সম্বনীয় অভেদাবলী (F	ractional Ide	entities)	•••	•••	೨೨ನ
বিবিধ প্রশ্নমালা V	•••	•••	•••	•••	0 %•
•	ষভৃবিংশ	অধ্যায়			
जत्रल जबी	করণ ও ভ	ংসম্বন্ধীয় ও	প্রশাবলী		
(Simpl	e Equations	and Probl	ems)		
मत्रन मभी कत्रन	•••	•••	•	•••	৩৫৬
ভগ্নাংশ-সমশ্বিত সমীক্রণ (Fra	ctional Equa	tions)	•••	•••	૭ ૯ ૧
বিবিধ প্রশ্নমালার সমাধান	•••	•••	•••	•••	ಶ್ರೀತ
मत्रन मगौकत्र विषयक खन्नोवनी	ì t	•••	•••	•••	৩ ৬৭
			•	٤	
	সপ্তবিংশ	অথ্যায়			•
জটিল সহ-সমীকরণ	(Harder Sin	ultaneous	Equations)	এবং	
	পৰ্কীয় প্ৰশ্নাব		-		
জটিল সহ-সমীকরণ (তুই অজ্ঞাত	ত বাশিবিশি ষ্ট)				3 60
জটিল সহ-সমীকরণ (তিন অজ্ঞা			•	•••	৩৮৬
বিবিধ উদাহরণমালা					ల సం
. कर्मिक कार्काक्य विविधिष्ठे स	••• মনীকরণে ও	প্রত্ত এখাবলী বিভাগ	+	•••	250

	শ্ ষ্	পি ত্ৰ	•		w.
विस ग्न					পৃষ্ঠা
	অষ্টবিং*	অথ্যা	됤 .		
' লে	शावनी ଓ উ	হাদের ব	যু বহার		
(Gı	raphs and th	eir applic	eations)		
সমীকরণের লৈথিক সমাধান	•••	•••	•••	•••	800
লেথ সাহায্যে প্রশ্নাবলীর সমা	নাৰ	•••	•••	•••	879
	উ ন ত্রিংশ				
সূচক	-নিয়ম বলী	(Laws of	Indices)		
স্থচক-নিয়ম (Index Law)	•••	• 18 •	•••	•••	8२७
বিবিধ উদাহরণমালা	•••	•••	•••	•••	830
	ত্রিং শ	অথ্যায়			
মূল	াকর্ষণ-প্রক্রি	য়া (Evolu	tion) \$		
বৰ্গ ও ঘনমূ	ल निर्गग्न (S	quare an	d Cube roots	1)	
সংজ্ঞা	•••	•••	•••		8 26
্বৰ্গমূল নিৰ্ণয় · · ·	•••		• •		8 26
্ঘন্মূল নিৰ্ণয় · · ·	•••	4	•••	• • •	888
ş	একত্রিং*	া ভাষা	ষ		
অনুপাত ও				n)	
অমুপাত (Ratio)				۸	889
সমাত্রপতি (Proportion)	2	••11		,	869
বিবিধ প্রশ্নমালা VI			•••		৪৬৮
। प्राप्त च्याका आर्था ४०		 ,			
<u> </u>	,				8৮೨
উত্তরমালা	Amela shelota	•••	•••	•••	৫২৯
বিশ্ববিজালয়ের প্রবেশিকা পর	য়াক্ষার শ্রেমাএ		••• ,	•••	~ / 04

সহজ বীজগণিতে ব্যবহৃত পরিভাষা

abscissa—ভুজ absolute-পরম absolute value-পরম্মান abstract quantity-অনবচ্ছিন্ন ঝ শুদ্ধ রাশি addition—যোগ, সম্বলন adfected quadratic—মিশ্র দ্বিঘাত বা দ্বিশক্তি alternando—একান্তরক্রিয়া alternative—বিকল ambiguous—দ্ব্যৰ্থক arithmetic series—সমান্তর শ্রেণী ascending order—উদ্বক্তম associative law—সংযোগ-নিয়ম axiom—স্বতঃসিদ্ধ axis—অক binomial-দিপদ biquadratic-চতুর্গাত braces—ধনু ৰ্বান্ধনী brackets--বন্ধনী cancellation—অপদারণ circle-13 co-efficient—গুণক, সহগ column—ন্তন্ত · commutative law--বিনিময়-নিয়ম complex—ছুক্সহ componendo—গাগু কিয়া compound—িং প্র concrete quantity—অবচ্ছিন্ন বা- বন্ধ রাণি conditional identities—সাপেক অভেদাবলী conjugate surd-বিপরীত করণী constant (quantity) — ধ্ৰুবক continued product-ক্রমুক বা ধারাবাহিক श्वनियन co-ordinates—ভুজ-কোটি

crotchets-শুরুবধানী •

cube--্ঘন cube-root--- चन्यून cubic-তিহাত, ঘন cyclic order-- हज-जम deduction—সিদ্ধান্ত degree (of an expression)—মান denominator—হর dependent (variable)-অধীন descending order—অধঃক্রম dimension—মাতা distributive law—বিচ্ছেদ-নিয়ম dividend—ভাজা dividendo—ভাগক্রিয়া divisibility—বিভাজাতা divisibility theorem—বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা divisor-ভাজক elimination—অপনয়ন equation—স্মীকরণ equation of condition--সাপেক্ষ সমীকরণ evolution-মূলাকৰ্ণ expansion-বিস্তৃতি exponent or index—সূচক expression-রাশি, রাশিমালা factor—উৎপাদক, গুণক factorization—গুণকনির্ণয়, উৎপাদকনির্ণ্য formula (statement)—'হত fraction-ভগাংশ function—অপেক্ষক geometric series—গুণোত্তর শ্রেণী graph-লেখ, চিত্ৰ graphical—লৈখিক • group-বিভাগ, সম্ব harmonic series—বিপরীতভোগী homogeneous—সম্মাত্র

প্রশ্নমালা 15

দেখাও যে:

1.
$$(-a) \times 6b = -6ab$$
.

3.
$$-7x^7 \times 8x^8 = -56x^{15}$$
.

5.
$$(-7c) \times (-3ab) = 21abc$$
.

7.
$$15 \times 75 = 5^3 \times 3^2$$
.

9.
$$(-ab)^3 = -a^3b^3$$
.

a 11.
$$(-a^3b^5)^2 = a^6b^{10}$$
,

13.
$$(-4x^2y^4)^2 = 16x^4y^8$$
.

2.
$$(4a) \times (-2b) = -8ab$$
.

4.
$$(-2b) \times (-10a) = 20ab$$
.

6.
$$10 \times 35 = 25 \times 14$$
.

8.
$$(-a)^3 = -a^3$$

10.
$$(a^{4}b^{2})^{3} = a^{12}b^{6}$$
.

12.
$$(-x)^5 = -x^5$$
.

গুণ কর:

14.
$$2x^2y$$
 কে $-3x^5y^4$ হারা। 15. $-7a^2b^3c$ কে $-3abc^2$ হারা।

$$^{\circ}$$
16. $^{\circ}$ - $5x^{12}y^3$ ($^{\circ}$ - $8x^5y^{13}$) $^{\circ}$ $^{\circ}$

'17.
$$-12x^3y^3z^2$$
 কে $13x^7y^6z^4$ দারা।

18.
$$-14xy^5z^8$$
 কে $-10x^5y^2z^{12}$ দারা।

সরল কর:

19.
$$(-x)^3 \times (-2xy^2)^2 \times (x^2y)^3$$
.

20.
$$(-2a^2) \times (7a^4b^7) \times (5a^9b^5)$$
.

• 21.
$$(-6x^5y^2z) \times (2z^4x^3y^5) \times (-4y^3z^2x^8)$$
.

22.
$$(-3x^2y) \times (4zy^2x) \times (-x^3z^5y^4) \times (2zxy)$$
.

*46. পূর্ববর্ত্তী নিয়মে প্রদর্শিত পদ্ধতি অমুসারেই সরলরাশিসমূহের গুণফল নির্ণয় করা যায়; অপেক্ষাকৃত জটিল গুণনের সময় এই প্রকার প্রক্রিয়া সাধারণতঃ মৌধিকই সম্পন্ন করিতে হয়। শিক্ষার্থিগণ যাহাতে এইরূপ গুণনে ভালরূপ অভ্যন্ত হইতে পারে, সেইজন্ত নিম্নে একটি প্রশ্নমালা দ্বেওয়া হুইল।

উদা. 1.
$$3x^2$$
 এবং $-5xy$ এর গুণফুল লিখ।
$$(3x^2)\times (-5xy)=-15x^3y.$$

1. 2.
$$-5a^2b$$
 এবং $-8ab^2$ এর গুণফল লিখ। $(-5a^2b) \times (-8ab^2) = 40a^3b^3$.

বী---8

প্রশ্নালা 16

নিম্বলিখিতের গুণফল লিখ:

1.
$$-2x^3$$
 এবং $5x^4$.

1.
$$-2x^3$$
 এবং $5x^2$.
2. $5a^3b$ এবং $-4ab^3$.
3. $-3m^2n^5$ এবং $-7n^3m^5$.
4. $3x^3y^5$ এবং $-6xy^2$.

$$5. -a^3b^2$$
 এবং $-3a^4b^8$.

7.
$$-10xyz^2$$
 এবং $-5xy^2z$. 8.• $4x^3y^3z$ এবং $-6xyz^3$.

7.
$$-10xyz^2 = 4x^2 - 5xy^2z$$
.

9.
$$-6x^2y^3z^4$$
 and $-8x^3y^2z$. 10. $-5a^3b^5c^7$ and $-5a^2b^4c^6$.

11.
$$3x^2yz^4$$
 and $8xy^2z$. 12. $-4abxy$ and $-8a^2xby^2$.

13.
$$-7a^2b^2z^3$$
 এবং $-5abz$.
14. $5a^4x^2y$ এবং $-12x^5y^4a^2$.
15. $-14xy^4$ এবং $-5x^4yz$.
16. $2abc^5$ এবং $-9a^7b^5c$.

15.
$$-14xy^4$$
 $\bigcirc 4^{\circ} -5x^4yz$.

17.
$$-7a^3x^5y$$
 এবং $-9x^3ya^6$. 18. $-8x^6y^2z^5$ এবং $-20y^5z^2x^8$.

20.

17.
$$-7a^3x^5y$$
 এবং $-9x^3ya$

17.
$$-7a^3x^5y$$
 এবং $-9x^3ya$

 $-7a^{7}x^{8}y^{6}z^{2}$ এবং $-16z^{5}x^{2}a^{6}y^{3}$.

 $b \otimes c$ যে কোন রাশিই হউক না কেন, a একটি অথগু ধনরাশি হইলে.

$$a(b+c) = (b+c) + (b+c) + (b+c) + \cdots - a$$
-সংখ্যক পদ পৰ্য্যস্ত
= $(b+b+b+\cdots a$ -সংখ্যক পদ পৰ্য্যস্ত)

$$+(c+c+c+\cdots a$$
-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত)

$$=ab+ac. ... (1)$$

2. $5a^3b$ এবং $-4ab^5$

6. $^{\circ}5mn^{6}$ \mathfrak{Q}° $-8m^{7}n$.

মতএব, নিপরীতভাবে, $\frac{ab+ac}{a}=b+c=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}$; মর্থাৎ, p ও q যে কোন রাশিই হউক না কেন্দু r একটি অথগু ধনরাশি হইলে,

$$\frac{p+q}{r} = \frac{p}{r} + \frac{q}{r} \cdot \dots \quad (A)$$

এখন মনে কর, a একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ (positive fraction), অর্থাৎ $a=\frac{m}{n}$; কিন্তু, m্ৰু n উভয়ই অথণ্ড ধনরাশি।

তাহা হইলে,
$$\frac{m}{n}$$
 $(b+c) = m \times \frac{b+c}{n}$

$$= \frac{m(b+c)}{n} = \frac{mb+mc}{n} = \frac{mb}{n} + \frac{mc}{n} = \frac{m}{n}b + \frac{m}{n}c. \qquad ... \qquad (2)$$

^{. *} প্রত্যেক দ্বিপদুরাশিকেই ° b + c' রূপে, ° লেখা যাইতে পারে 🔊 দৃষ্টান্তম্বরূপ 2x² কে b এবং $(-3y^2)$ কে c ধরিলে, $2x^2-3y^2$ কে অর্থাৎ $(2x^2)+(-3y^2)$ কে অবশুই b+c বৈলিয়া কল্পনা করা यात्र ।

(4)

অতএব. (1) ও (2) হইতে দেখা যায় যে, a যে কোন ধনরাশি ইইলে, a(b+c)=ab+ac.(3)

তারপর মনে কর, a একটি ঋণরাশি এবং -x এর সমান ; এক্ষেত্রে x অবস্থাই একটি ধনরাশি। তাহা হইলে,

$$(-x).(b+c) = -[x(b+c)]$$
= -(xb+xc)
= -xb-xc
= (-x).b+(-x).c;

অতএব দেখা দায় যে, ৫ যে কোন একটি ঋণরাশি হইলে, a(b+c) = ab + ac.

স্থতরাং (3) ও (4) হইতে দেখা যায় যে, a যে কোন রাশিই হউক না কেন. a(b+c)=ab+ac.

অমুসি. 1. বিপরীতক্রমে. ab + ac = a(b+c); $xya^2 + xyb^2 = xy(a^2 + b^2).$ তজ্ঞপ.

অসুসি. 2. থেছেতু, b-c=b+(-c). অতএব, a(b-c) = a[b+(-c)]= ab + a(-c) = ab - ac.বিপরীতক্রমে. ab-ac=a(b-c). 2ax - 2ay = 2a(x - y).তদ্ৰপ.

Solution 3. $a(b+c+d) = a\{b+(c+d)\} = ab+a(c+d) = ab+ac+ad$. $a(b+c+d+e+f+\cdots) = ab+ac+ad+ae+af+\cdots$

অতএব, কোন বহুপদরাশি (multinomial) কে একটি সরলরাশি (monomial) দ্বারা গুণ করিতে হইলে বহুপদরাশিটির প্রত্যেক পদকে সরলরাশিটি দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফুলগুলিকে যোগ করিতে হয় 🖡

বিপরীতক্রমে, $ab+ac+ad+ae+\cdots=a(b+c+d+e+\cdots)$.

উদা. 1. °2ab - 3b² কে 5ab দারা গুণ কর। • $5ab(2ab-3b^2)=5ab\{2ab+(-3b^2)\}$ $=5ab\times 2ab+5ab\times (-3b^2)$ $= 10a^2b^2 - 15ab^3.$

ভিছা. 2.
$$(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 4)$$
 কেন্দ্র বিরোধন করে। $(-6x^2)(x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 4)$ $= (-6x^2)\{x^4 + (-3x^3) + 5x^2 + (-6x) + 4\}$ $= (-6x^2).x^4 + (-6x^2)(-3x^3) + (-6x^2).5x^2 + (-6x^2)(-6x) + (-6x^2).4$ $= -6x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 36x^3 - 24x^2$.

জ্ঞন্তব্য। প্রথম শিক্ষার্থিগণের পক্ষে, উপরিপ্রদর্শিত পদ্ধতিতেই প্রত্যেক প্রশ্নের সমাধান করা উচিত; কিছু অভ্যন্ত হইলে নিম্নলিখিত উদাহরণান্ন্যায়ী একসঙ্গেই ফল লিখিয়া দেওয়া যাইতে পারে।

উদা. 3. $-4a^4+5a^3b-6a^2b^2-8ab^3+9b^4$ কে $-3a^2b^2$ দারা গুণ

$$-4a^{4} + 5a^{3}b - 6a^{2}b^{2} - 8ab^{3} + 9b^{4}$$

$$-3a^{2}b^{2}$$

$$12a^{6}b^{2} - 15a^{5}b^{3} + 18a^{4}b^{4} + 24a^{3}b^{5} - 27a^{2}b^{6}$$

উজা. 4. সরল কর ঃ
$$2x^2(3x-2)+2x(2x+3)-6(x-3)$$
.
াণ্থন, $2x^2(3x-2)=6x^3-4x^2$,
 $2x(2x+3)=4x^2+6x$,
 $6(x-3)=6x-18$.

স্তরাৎ, প্রদত্ত রাশি

$$= (6x^3 - 4x^2) + (4x^2 + 6x) - (6x - 18)$$

$$= 6x^3 - 4x^2 + 4x^2 + 6x - 6x + 18 = 6x^3 + 18.$$

উদা. 5. সরল কর:
$$3a(2a-5)-3a(a-6)$$
.
 $2a-5$ এর পরিবর্ত্তে x এবং $a-6$ এর পরিবর্ত্তে y লিখিলে,
 $3a(2a-5)-3a(a-6)=3ax-3ay=3a(x-y)$
 $=3a\{(2a-5)-(a-6)\}$
 $=3a(a+1)=3a^2+3a$.

প্রথমালা 17

গুণ কর :

1.
$$2x - y$$
 কে $-x$ হারা। 2. $a - 2b + 3c$ কে $-5a$ হারা। 3. $2x - 3y$ কে $4xy$ হারা। 4. $2a^2 - 3b^2 - c^2$ কে abc হারা।

- $\sqrt{5}$. $x^2y 2xy^2 y^3$ ($\sqrt{5} 3xy$) $\sqrt{5}$!
- 6. $3a^2b^2 ab^2 5a^3 + a^2b$ ($\sqrt{2}$ 7 b^2 7 a^3)
- 7. $3a^2x 4ax^2 + 5ax$ ($\Phi 2a^2$) Φ
 - 8. $-2m^3 + 3m^2n 5mn^2$ কে 4mn ছারা।
- 9. $a^2bc b^2ca + c^2ab$ (Φabc)
- 10. $x^2 + y^2 + z^2 yz zx xy$ (xyz)
- 11. $-2c^2d+3d^3c-5cd^2-4c^2d^2$ ($-6c^2d^4$)
- 12. $8a^4 6a^3b + 5a^2b^2 4ab^3$ ($\overline{\Phi} 2a^3b^3$) $\overline{\Phi}$

मत्न कतः ।

- **13.** $7x^3(x-2)-2x^2(x-3)-8x^2(1-2x)$.
- 14. $x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)$.
- **15.** $9x^3(x^3-2y^2)+5y^2(3x^3+y^2)+3y^2(x^3-10y^2)$.
- **16.** $x^3(x^3 + 2x^2 + 2x) 2x^2(x^3 + 2x^2 + 2x) + 2x(x^3 + 2x^2 + 2x)$.
- 17. $a^6b^3(a^6b^3 2a^4b^2 + 2a^2b) + 2a^4b^2(a^6b^3 2a^4b^2 + 2a^2b) + 2a^2b(a^6b^3 2a^4b^2 + 2a^2b).$
- 18. $2a^{9}b^{6}(2a^{9}b^{6} + 6a^{6}b^{4} + 9a^{3}b^{2}) 6a^{6}b^{4}(2a^{9}b^{6} + 6a^{6}b^{4} + 9a^{3}b^{2}) + 9a^{3}b^{2}(2a^{9}b^{6} + 6a^{6}b^{4} + 9a^{3}b^{2}).$
- **19.** $a^2(2x-3y)+a^2(3x+4y)-a^2(5x-2y)$.
- **20.** $\sqrt[3]{n}$ $a = x^2 yz$, $b = y^2 zx$ and $c = z^2 xy$ and $c = z^2 xy$
 - (i) ax + by + cz; (ii) cx + ay + bz এর মান নির্ণয় কর।

4. ভাগ (Division)

48. সহজ্জা । যে কোন তিনটি রাশি a, b এবং c যদি এইরূপভাবে পরস্পর সমন্ধ হয় যে, $a=b\times c$, তাহা হইলে, 'a রাশিটি b রাশিটি দারা বিভাজ্য (divisible)' এইরূপ বুলা হয়; অথবা সংক্ষেপে, $a=b\times c$ হইলে, a+b=c, বলী হয়।

এইরপ, $x=y\times z$ হইলে, $x\rightarrow y=x$, এবং x+z=y.

যে রাশিটিকে ভাগ করা হয়, তাহাকে **ভাজ্য** (dividend), যে রাশিটি দারা ভাগ করা হয়, তাহাকে **ভাজক** (divisor) এবং ভাগ করার ফলে যে রাশিটি পাওয়া যায়, তাহাকে **ভাগফল** (qaotient) বলে ।

টীকা। • a কে b দারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাঁওুরা যায়, তাহাকে সাধারণতঃ $\frac{a}{b}$ দারা প্রকাশ করা হয়।

- 49. সূল প্রতিজ্ঞা (Fundamental propositions) :
 - (1) প্রমাণ করিভে ছইবে যে, $a+b\times b=a$.

যদি 'a+b' x দারা স্থচিত হয়, তাহা হইলে সংজ্ঞামুদারে,

$$x \times b = a$$
.

অতএব, $a \div b \times b = x \times b = a$.

(2) প্রমাণ করিভে হইবে যে, a+b+c=a+bc.

$$(a+b+c) \times bc = \{(a+b)+c\} \times c \times b$$

= $[\{(a+b)+b\} \times c] \times c] \times b$
= $(a+b) \times b = a$.

অতএব, সংজ্ঞাহসারে, $a \div b \div c = a \div bc$;

অর্থাৎ, কোন একটি রাশিকে অন্ত তুইটি রাশিদ্বারা পর পর ভাগ করা, এবং পূর্ব্বোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করা একই কথা।

অমুসি.। স্পষ্টই $a \div b \div c = a \div c \div b$; কারণ, প্রত্যেকেই a + bc এর সমান।

(3) প্রমাণ করিতে ছইবে যে, $a \div b = a \times \frac{1}{b}$

এখন,
$$\frac{1}{b} \times b = 1 \div b \times b = 1 \ ;$$
 অতথ্য,
$$a \times \frac{1}{b} \times b = a \times \left(\frac{1}{b} \times b\right) = a \times 1 = a \ ;$$
 অহাৎ,
$$\left(a \times \frac{1}{b}\right) \times b = a.$$

স্তরাং, সংজ্ঞানুসারে, $a+b=a\times \frac{1}{b}$.

কাজেই, কোন একটি রাশিকে অপর একটি রাশিদ্বারা ভাগ করা, অথবা পূর্ব্বোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশিটির **অনুষ্ঠান্ত্যক** (reciprocal) দ্বারা গুণ করা, উত্তরই এক।

[ছইটি রাশির গুণফল 1 হইলে, উহাদের একটিকে অপরটির **অন্ত্যোক্তক** (reciprocal) বলে।]

. Solve $a + b \times c = a \times c + b$;

• कात्रण,
$$a+b \times c = a \times \frac{1}{b} \times c = a \times c \times \frac{1}{b} = a \times c + b$$
.

50. ভাগে চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়মঃ

বেংছেত্
$$a \times (-b) = -ab$$
, *
স্থান্তরাং, সংজ্ঞান্ত্রসারে, $(-ub) + a = -b$ }
এবং $(-ab) + (-b) = a$... (I)

আবার, যেহেতু
$$(-a) \times (-b) = ab$$
,

স্থতবাং,
$$ab+(-a)=-b$$
 $ab+(-b)=-a$... (II)

মৃত্রাং,
$$ab+(-a)=-b$$
 $ab+(-b)=-a$... (II) আবার, ইহাও মৃত্যান্ত বেং $ab+a=b$ $ab+b=a$... (III)

অতএব (I), (II) ও (III) হইতে ভাগের চিহ্নসম্বনীয় নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায় ; যথা, ভাজ্য ও ভাজকের সদৃশচিক্ত হইলে, ভাগফলে ধনচিক্ত, এবং **অসদৃশচিক্ত** হইলে, ভাগফলে ঋণচিহ্ন হইবে; অর্থাৎ সদৃশচিহ্ন ধনাত্মক এবং অসদৃশচিহ্ন ঋণাত্মক ভাগফল উৎপন্ন করে।

51. একটি সরলরাশিকে অপর একটি রাশি দারাভাগঃ

কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইতেছে:

• (1) থেছেড়
$$3a^2b \times 5a^8b^2c \mp 15a^5b_*^8c$$
, খতএৰ, $(15a^5b^3c) \div (5a^3b^2c) = 3a^2b$.

ে কাজেই, ভাজ্য =
$$15a^5b^3c$$

= $3 \times 5 \times a^3 \times a^2 \times b^2 \times b \times c$,
এবং ভাজ্ক = $5a^3b^2c$ হইলে, ভাগ্ফল = $3a^2b$. (I)

ে (2) বেহেতু
$$(-2a^{10}b^2cd) \times (-3a^5c^2) = 6a^{15}b^2c^3d$$
,

অতএব, $(6a^{15}b^2c^3d) + (-2a^{10}b^2cd) = -3a^5c^2$.

কাজেই, ভাজ্য $= 6a^{15}b^2c^3d$.

 $= 2 \times 3 \times a^{10} \times a^5 \times b^2 \times c \times c^2 \times d$,

এবং ভাজ্য $= -2a^{10}b^2c^2d$ হইলে, ভাগ্যকল $= -3a^5c^2$

(3) (3) (3)
$$(-5a^8b^5c^2d) \times (4b^3c^4) = -20a^8c^6d$$
, where $(-5a^8b^5c^2d) \times (-5a^8b^5c^2d) = 4b^8c^4$.

কাজেই, ভাজ্য =
$$-20a^8b^8c^8d$$

= $(-5) \times 4 \times a^8 \times b^5 \times b^3 \times c^2 \times c^4 \times d$,
এবং ভাজক = $-5a^8b^5c^2d$ হইলে, ভাগফল = $4b^3c^4$.

(I), (II) এবং (III) হইতে, একটি সরলরাশিকে অপর একটি সরলরাশি দারা ভাগ করিবার, নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায়:

যে সকল উৎপাদক দারা ভাজক উৎপন্ন হইয়াছে, ভাজা হইতে সেই সকল উৎপাদক অপসারণ করিয়া উহার অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির সহিত, ভাজা ও ভাজকের সদৃশ্চিক্ত হইলে, ধনচিক্ত এবং অসদৃশ্চিক্ত হইলে, ঋণ\চিক্ত্ যুক্ত করিলেই ভাগফল পাওয়া যায়।

ি এখন
$$a^{12} \div a^7 = (a^5 \times a^7) \div a^7 = a^5 [= a^{12-7}].$$
তদ্ধেপ, $a^{20} \div a^9 = a^{11}$; $a^{21} \div a^{14} = a^7$; ইতাগদি।

অতএব, সাধারণভাবে, m ও n ছুইটি অথণ্ড ধনরাশি এবং m>n হইলে, $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

উদা. 1.
$$18m^3n^2p$$
 কে $-6m^2n^2p$ দারা ভাগ কর। ভাজ্য = $18m^3n^2p$ = $6\times3\times m^2\times m\times n^2\times p$. ভাজ্ক = $-6m^2n^2p$.

প্রশালা 18

ভাগ কর:

· • ভাগফল = - 3m.

%.
$$-20p^{12}q^8r^2$$
 কে $10p^{10}q^6n^2$ ছারা।

7.
$$-70x^{16}y^9z$$
 (本 $-14x^{10}y^5$ 智刻!

10.
$$-69a^7b^4c^9$$
 ($-23a^5b^4c^7$)

.11.
$$25x^{20}y^3z^8 = -5x^{216}yz^8 = 1311$$

13.
$$a^{101}$$
 কে a^{57} ছারা। 14. $28x^{205}$ কে $-4x^{157}$ ছারা।

52. একটি বহু^পদেৱাশিকে একটি সৱলৱাশি শ্বারা ভাগ:

47 নিয়মের তৃতীয় অনুসিদ্ধান্ত হইতে দেখা যায় যে.

$$a(b+c+d+e+f+\cdots)=ab+ac+ad+ae+af+\cdots$$

খতএব, $(ab+ac+ad+ae+af+\cdots)+a$

$$= b + c + d + e + f + \cdots$$

= $(ab + a) + (ac + a) + (ad + a) + (ae + a) + (af + a) + \cdots$

স্থতরাং, একটি বহুপদরাশিকে একটি সরলরাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, ভাজ্যের প্রত্যেকটি পদকে ভাজক ধারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফলগুলির সমষ্টি লইলেই নির্নেয় পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে।

উদা. 1.
$$4a^3x^2 - 6a^2x^3 + 10ax^4$$
 কে $-2ax$ দারা ভাগ কর। নির্নেয় ভাগফল =
$$\frac{4a^3x^2 - 6a^2x^3 + 10ax^4}{-2ax}$$

$$= \frac{4a^3x^2}{-2ax} + \frac{-6a^2x^3}{-2ax} + \frac{10ax^4}{-2ax}$$
$$= -2a^2x + 3ax^2 - 5x^3$$

উদা. 2. $9x^5 - 4x^4a - 2x^3a^2$ কে $3x^3$ দারা ভাগ কর।

নির্ণের ভাগুফল =
$$\frac{9x^5 - 4x^4a - 2x^3a^2}{3x^3}$$

$$= \frac{9x^5}{3x^3} + \frac{-4x^4a}{3x^3} + \frac{-2x^3a^2}{3x^3}$$

$$= 3x^2 - \frac{4}{5}xa - \frac{2}{3}a^2.$$

টীকা। °কিছু অভ্যন্ত হইলে মধ্যবৰ্ত্তী প্ৰক্ৰিয়াগুলি না দেথাইয়া একেবারেই ভাগফল লিখিয়া দেওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 19

ভাগ কর:

- $3a^3b^2-2a^2b^3$ েক a^2b^2 হারা। 2. $2a^3b-3ab^3$ েক -ab হারা।
- 3. 6a4b2 9a2b4 কে 3a2b2 হারা।
- $12x^4y^2 9x^5y$ কে $-3x^3y$ বারা। ১.
- •5. $14x^7y^5 21x^5y^7$ কে $-7x^5y^5$ স্বারা।
- 6. $4mn^3 12m^2n^2 + 16m^3n$ কে 4mn ছারা।
- .7. $-3a^3x^4+6a^2x^5-9a^4x^3$ কে $-3a^2x^3$ ছারা।
- 8. $12x^5 8x^3a^2 + 20ax^4$ কে $-4x^3$ ছারা।
- 9. $10m^5n^4 15m^7n^2 20m^3n^6$ ($\Phi 5m^3n^2$ Φ)
- । 10. $8p^4q^2 5p^3q^3 3p^2q^4$ কে $-8p^2q^2$ দারা।
 - 11. $-14x^8y^5 + 21x^{10}y^3 28x^7y^3$ কে $7x^7y^3$ হারা।
 - $15a^4x^8 30a^7x^5 45a^6x^6$ কে $20a^4x^5$ হারা।
- 13. $-60x^4a^5 75x^3a^6 + 80x^5a^4$ ($-20x^3a^4$)
- /14. $125m^6n^4p^2-175m^4n^6p^2-200m^2n^2p^8$ কৈ $25m^2n^2p^2$ হারা।
- 15. $-a^2b^4c^4x^4y^4z^2 + 2a^4b^2c^4x^2y^4z^4 3a^4b^4c^2x^4y^2z^4$ - a2b2c2x2y2z2 stat 1

विविध श्रश्नमाना I

- কোন্ সংখ্যা 5 ঘণ্টা সময় বুঝাইবে, (i) যদি সময়ের একক অর্ধঘণ্টা হয়; यिन मगुद्रमत একক नम घन्टी इय ?
 - x=17 এবং y=25 হইলে, $x\sim y$ কত বুঝাইবে γ
- 3. 🔑 সহগ' এর সুংজ্ঞা লিখ। সাংখ্যক এবং আক্ষরিক 'সহগ' এর পার্থক্য দেখাও। $15x^3$, $2qx^3$, $7ab^2x^3$ এবং $16m^2pqx^3$ এর মধ্যে কোন্ কোন্টি x^3 এর 'मर्ग' ?

 $4(i)\sqrt{ab}$ এবং \sqrt{ab} এর পার্থক্য কি ? (i)a=9, b=4 হইলে, $\sqrt{ab}\sim\sqrt{ab}$ এর মার্ন নির্ণয় কর।

- 5. যদি কোন স্থানের উত্তরে অর্দ্ধ মাইল দ্রত্ব 40 দারা প্রকাশ করা হয়, তবে ঐ স্থানের দক্ষিণে 11 গজ দূরত্ব কত দারা প্রকাশ করিবে ?
- 6. একটি ঋণরাশিকে একটি ধনরাশির সহিত যোগ করিলে কি ফল হয় লিখ। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, +(-b)=-b.
 - 'বিয়োগ' এর সংজ্ঞা লিখ। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে,
 4 6 = -2 খ্যং 5 (-3) = 8.
- 8. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে উহাদের মানের অধ্যক্রমামুসারে (in descending order) লিখ : 2, 5, -3, 7, -8, -1, 9, -4, -12.

1. a=4, b=5 হইলে, নিম্নলিথিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:
(i) $ab-a\times b$; (ii) 45-ab; (iii) 74-7a; (iv) 85-8b.

2. a^n হারা কি ব্ঝায়? a^n এবং n^a এর প্রভেদ কি? a=7, b=5 হইলে, $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ এর মান কত?
3. (i) a' এর সহিত নিম্নলিখিত রাশিগুলির সম্ম কি? $\sqrt[3]{a}, \sqrt[5]{a}, \sqrt[8]{a}$ এবং $\sqrt[n]{a}$.
(ii) a=8, b=7, c=6, d=5 এবং e=1 হইলে, $\sqrt{a^2-3d}\times\sqrt[3]{b^3-c^3-2e}$ এর মান কত?

4. একটি ধনরাশি বা ঋণরাশির পরমমানের অর্থ কি ? একটি দৃষ্টান্তবারা ইহা
বুঝাইয়া দাও।

5. বাগ কর : $3x^2y$, $-8x^2y$, $-19x^2y$ এবং $17x^2y$; x=4 এবং y=5 হইলে, উক্ত যোগফলের সাংখ্যমান কত ?

6. $16x^4$, $-8xy^3$, $24x^2y^2$, y^4 and $-32x^3y$ and although x=4, y=5 execution (a) and x=4, y=5 execution (b) x=4, y=5 execution (b) x=4, y=5 execution (b) x=4, y=5 execution (c) x=4 execu

। 7. 178-12c-19a হইতে 4a-13b-25c বিয়োগ কর।

8. সরল কর: $3x - [4y + \{2z - (x - 5y + 3z)\}] - (3x - 7y)$

Ш

- 1. নিম্মলিখিত বর্ণনাগুলি বীজগণিতীয় প্রতীক সাহায্যে প্রবর্শ কর:
 - (1) a ও b এর সমষ্টিকে c দারা গুণু করিলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাহা. x কে u ও z এর গুণফল দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল পাওয়া যায় তাহার সমান।
 - (2) x ও y এর সমষ্টির বর্গ, x ও y এর বর্গদ্বয় এবং x ও y এর গুণফলের দ্বিগুণ,--এততভয়ের সমষ্ট্রির সমান।
 - m श्रेट n এর বিয়ে গিফলের ঘনমূলকৈ m ও n এর গুণফলের ঘন দ্বারা ভাগ করা হইলে, ঐ ভাগফল x ও y এর বর্গমূলদ্বয়ের সমষ্টি হইতে ন্যুন।
 - (4) যেহেড b হইতে a বছ. অতএব b এর তিনগুণ হইতে a এর তিনগুণ বছ।
- $\mathbf{2.}$ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ বিন্দুগুলি একটি সরলরেখার উপর এরপভাবে অবস্থিত যে, AB, BC, CD, DE, EF, FG দূরত্বগুলি মথাক্রমে 3, 4, 6, 8, 5 এবং $m{7}$ ইঞ্চি। DC কে 3 দারা স্থচিত করিলে, $DB,\,DE,\,DF,\,DA,\,DG\,$ এর প্রত্যেকে কত দারা স্থচিত হইবে ?
- 3. এক ঋণরাশিকে অন্য এক ঋণরাশির সহিত যোগ করিলে, যোগফল কি হইবে বল। a=6 এবং b=4 হইলে, $-a^3$, $-3a^2b$, $-3ab^2$, $-b^3$ এর সমষ্টির মান নির্ণয় কর।
- 4. কতকগুলি নির্দিষ্ট অঙ্ক লইয়া দেখাও যে, উহাদের যোগফল অঙ্কগুলির ক্রম-পরিবর্জনের উপর নির্ভর করে না (অর্থাৎ ক্রমপরিবর্ত্তন দ্বারা যোগফলের কোন পরিবর্ত্তন श्य ना)।
- 5. a=16, b=10, c=5, d=1 EVCF, $(a-b)(5\sqrt{a-b}) + \sqrt{(a-b)(c+d)}$ এর মান নির্ণয় কুর।

6.
$$a = \frac{1}{2}$$
, $b = \frac{2}{3}$ হইলে, প্রুমাণ কর যে,
$$\frac{a^5 + b^5}{a + b} = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4.$$
7. যোগ কর : $3a^2 + 4bc - x^2 + 10$, $2x^2 - 5a^{2^2} - 15 + 6bc$ এবং $9bc - 4a^2 - 10x^2$.

 $21 - 9bc - Aa^2 - 10x^2$

সরব কর: a-[5b-(a-(3e-3b)+2e-(a-2b-e))]

IV

- 1. a=9 হইলে,
 - √49 √4a এবং (2) √49 √4a এর মান নির্ণয় কর।
- 2. কতকগুলি নির্দিষ্ট অঙ্ক লইয়া দেখাও যে, রাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদিগকে বিভিন্ন বিভাগে (group এ) ভাগ করিয়া নির্ণেয় যোগফল ঐ বিভাগ-গুলির সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।

4. 'বীজগণিতীয় রাশিমালা'র সংজ্ঞা লিথ। সরলরাশি ও মিশ্ররাশির মধ্যে পার্থক্য কি ?

 $42abx^2$ একটি মিশ্র, না সরল রাশি ? দৃষ্টান্ত সহ বিভিন্নরূপ মিশ্ররাশিমালার নাম বল।

5.
$$x=2$$
, $y=3$, $a=6$, $b=5$ হইলে, $\sqrt[3]{b(x+y)^2} + \sqrt[3]{(x+a)(b-2x)} + \sqrt[3]{x(b-y)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

- 6. কিরৎপরিমাণ অর্থ A, B ও C এর ভিতর এরূপভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, B, A হইতে a পাউণ্ড বেশী এবং C, B হইতে b পাউণ্ড বেশী পাইল ; Aে পাউণ্ড পাইয়া থাকিলে, সম্পূর্ণ অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।
 - 7. যোগ কর। $a^2 3ab \frac{1}{2}\frac{4}{1}b^2$, $2b^2 \frac{2}{3}b^3 + c^2$, $ab \frac{1}{3}b^2 + b^3$ এবং $2ab \frac{1}{3}b^3$. 8. সরল কর:

$$\{2x^2-(y^2-xy)\}-\{y^2-(4x^2-y^2)\}+\{2y^2-(3xy-x^2)\}$$

V

- 1. গুণফলের 'মাত্রা' এবং 'মান' কাহাকে বলে ? 'সমমাত্র রাশিমালা' কাহাকে বলে ? একটি ষষ্ঠমানবিশিষ্ট ও একটি সপ্তমমানবিশিষ্ট ত্রিপদ (trinomial) সমমাত্র রাশিমালা লিখ,।
- $a \times b c + d \times e + f + gh$ এর মান নির্ণয় করিতে হইলে, কিরুপে আরম্ভ করিতে হয় ?/
- 3. উৎপাদক (factor)এর সংজ্ঞা লিখ। 2ab(a+b) এর সরল উৎপাদকগুলি কি কি?

4. a = 4 এবং x = 2 হইলে,

$$\frac{2ax^2}{(a-x)^2} - \frac{6\sqrt[3]{ax}}{a^3\sqrt{2a+4x}} - \frac{29x^2}{64a}$$
 এর মান নির্ণয় কর।

5. x = 5 হইলে, $(x^3 - 7x^2 + 6x + 5) + (-3x + 2x^3 + 4 + 5x^2) + (-11 - 4x^3 + 2x - 7x^2) + (9x^2 + 2 + 5x^2 - 4x)$ এর মান নির্ণয় কর।

6. শ্রমাণ কর যে, a-(b-c)=a-b+c. a, b হইতে বড় এবং b, c হইতে বড় হইলে, এবং প্রত্যেকে ধনরাশি হইলে, উপরোক্ত হত্ত কিরূপে সাধারণভাবে প্রমাণ করা যায় ?

- 7. 7. ব্যব কর: $2x [(3x 9y) \{(2t 3y) (x + 5y)\}]$.
- 8. কথন্ একটি সংখ্যাকে আর একটি সংখ্যাদ্বারা গুণ করা হইল, বলা হয়? সংজ্ঞামুসারে, -8 ও -4 এর গুণফল নির্ণয় কর।

VI

 সংখ্যার 'শক্তি' ও উহার 'স্ফেক' এর সংজ্ঞা লিথ; এবং একটি দৃষ্টান্ত দারা উহাদিগকে বুঝাইয়া দাও।

2.
$$a=16$$
, $b=10$, $x=5$, $y=1$ হইলে, $(a-y)$ $\sqrt{24bx+x^2}+\sqrt{(a-x)(b+y)}$ এর মান নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

- (1) যখন a=3, b=4, c=5:
- '(2) যথন $a = \frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}, c = \frac{7}{2}$.

5. 40 - (-15) = 55, এইটিকে দৃষ্টান্ত দারা প্রতিপন্ন কর।

6. $\sqrt{x}=17$, y=16, z=15 হইলে, নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের সমষ্টির মান নির্ণয় কর: $7x^3-25$ $\sqrt{yz}+z^4$, $19\sqrt{yz}-3z^4-12x^3$ এবং $2z^4+5x^3+7\sqrt{yz}$.

7. নিম্নলিখিত রাশিটিতে উল্লিখিত প্রক্রিয়াগুলি বর্ণনা কর:

$$5a - [4b - \{3c - (2d - 7e)\}].$$

a=4, b=3, c=2, d=1 হইলে,

 $[(a^3+b^3+c^5+d^3)\{a+b-(c-a)\}+a^2b+c^2d]\times \{a^2-(b^2+c^2)+d^2\}$ এর মান নির্ণয় কর ।

VII

- 1. নিম্নলিখিত রাশি ছুইটির মধ্যে পার্থক্য নির্দ্দেশ কর:
 - (1) a+bc and $a+b\times c$; (2) a^4 and 4a; (3) $3\sqrt{a}$ and $3\sqrt{a}$;
 - (4) $\sqrt{a+b}$ are $\sqrt{a+b}$; (5) \sqrt{ab} are \sqrt{ab} .
- $2 \cdot \sqrt{a} = 1, b = 2, c = 3, d = 0$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:
 - (1) $\frac{a^2b + b^2c + c^2d + d^2a}{(a+b)(c+d) \{(a-d) + (c-b)\}},$
 - (2) $\sqrt[3]{b-a^3} + \sqrt[3]{4(c-a)} \sqrt[4]{3(8a+5b+3c-2d)}$.
- . 3. প্ৰেশপ্ত যে, $(a+b+c)^3+a^3+b^3+c^3$, $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+6abc$ এবং $2a^3+3b^2(a+c)+2b^3+3c^2(a+b)+2c^3+3a^2(b+c)+6abc$ প্রস্পার স্মান,
 - (1) যখন a=2, b=3, c=4; (2) ,যখন a=7, b=4, c=1.
 - (1) $1 [1 \{1 (-1 + x)\}]$:
 - (2) $3a (b 2c) \{a + c (3a b 2c)\} (2a 3b + 4c)$
 - 5. নিম্মলিখিত বর্ণনাগুলি বীজগণিতীয় প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ কর:
 - (1) হুইটি সংখ্যার সমষ্টি ও উহাদের অন্তরের গুণফল, সংখ্যা ছুইটির বর্গদ্বয়ের অন্তরফলের সমান।
 - (2) তুইটি সংখ্যার সমষ্টির বর্গ, সংখ্যা তুইটির বর্গন্বয়ের সমষ্টি হইতে উহাদের

 প্রাণফলের দ্বিগুণ পরিমিত বড়।
- 6. a = 39, b = 52 হইলে, $17a 5b [7x 3b \{4(a b) (2a + 3b)\}]$ এর মান নির্ণয় কর, r ¹
- 7. यहि V = 5a + 4b 6c, X = -3a 9b + 7c, Y = 20a + 7b 5c, at Z = 13a 5b + 9c হয়, তাহা হইলে,

\[
V - (X + Y) + Z এর মান কত ?
\[
\text{[মাদ্রাজ প্রবেশিকা, 1883.]}
\]

8. $a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{6}d$, $-\frac{1}{2}c + \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b + d$, $\frac{1}{4}d - \frac{1}{6}b + c - a$, $\frac{1}{6}a - \frac{2}{6}d + b$ - \frac{2}{6}c এবং 8a - 6b + 3c - 4d এর সমষ্টি হইতে $\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d$ বিয়োগ কর।

VIII

- 1. $a ext{ ও } b$ তুইটি অথও ধনরাশি হইলে, প্রমাণ কর যে, $a ext{ × } b = b ext{ × } c$.
- 2. M = a(m+n) এবং N = b(m-n) হইলে,

$$rac{M}{a} + rac{N}{b}$$
 এবং $rac{M}{a} - rac{N}{b}$ এর প্রত্যেকের মান নির্ণয় কর।

এবং

- 3. c(a+b) = ca + cb এই অভেদ-(identity)টিতে,
- (1) c এর পরিবর্ত্তে m+n বসাও, এবং ইহা হইতে (m+n)(a+b) এর মান নির্ণয় কর L
- (2) c এর পরিবর্ত্তে a+b বসাও ,এবং ইহা হইতে $(a+b)^2$ এর মান্দ নির্ণয় কর।
 - 4. সরল কর : (1) x(y-z) + y(z-x) + z(x-y); (2) $\frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx} + \frac{x-y}{xy}$.
 - 5. প্রমাণ কর যে.
 - (1) m ও n ছইটি অথও ধনরাশি, এবং $\dot{m} > n$, হইলে, $a^m + a^n = a^{m-n}$;
 (2) a + b + c = a + c + b = a + bc.
- 6. a=3xy-yz-zx, b=3yz-zx-xy এবং c=3zx-xy-yz হইলে, $\frac{a+b+c}{xyz}$ এর মান নির্ণয় কর।
 - 7. ্ব 3 a 5 b 1 0 c 1 5 x 8 y 6 z 4 + 1 5 a 1 0 b 1 5 c 5 x 6 y 4 z 2 + 1 5 a 1 1 b 5 c 1 0 x 4 y 2 কে
 24 a 3 b 5 c 7 x 2 y 4 z 6 হারা গুণ কর ৷
 - 8. $\frac{3}{2}a^{10}b^{15}c^{20}x^{12}y^{10}z^8 + \frac{15}{4}a^{15}b^{20}c^{10}x^{10}y^8z^{12} + \frac{9}{4}a^{20}b^{10}c^{15}x^8y^{12}z^{10}$ কে $\frac{3}{4}a^{10}b^{10}c^{10}x^8y^8z^8$ দারা ভাগ কর)

চন্তুর্ অপ্রায় সর্ন সূত্রাবৃলী ও তাহাদের প্রয়োগ (Simple Formulæ and their applications)

53. সংজ্ঞা: বীজগণিতীয় প্রতীকের (algebraical symbols) সাহায্যে সাধারণভাবে প্রকাশিত কোন সিদ্ধান্তকে বীজগণিতীয় সূত্র (algebraical formula) বা সংক্ষেপে, শুধু সূত্র (formula) বলা হয়। প্রত্তর সাহায্যে সংখ্যা মহন্দীয় বে। সিদ্ধান্ত অত্যন্ত সাধারণভাবে প্রকশি করা যায়।

54.
$$7 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
.

$$[(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= a(a+b) + b(a+b)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

স্থতরাং, তুইটি রাশির সমষ্টির রর্গ, রাশি তুইটির বর্গদ্বের, এবং উহাদের গুণফলের দ্বিগুণের, সমষ্টির সমান।

অমুসি. \
$$a^2 + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab$$

= $(a \div b)^2 - 2ab$.

উদা. 1.
$$2x + 3y$$
 এর বর্গ নির্ণয় কর। $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$.

উদা. 2.
$$5x + 4$$
 এর বর্গ নির্ণয় কর। $(5x + 4)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(4) + 4^2 = 25x^2 + 40x + 16$.

উদা. 3.
$$4a^3 + 7b^4$$
 এর বর্গ নির্ণয় কর। $(4a^3 + 7b^4)^2 = (4a^3)^2 + 2(4a^3)(7b^4) + (7b^4)^2 = 16a^6 + 56a^3b^4 + 49b^8$.

উদা. 4.
$$a+b+c$$
 এর বর্গ নির্ণয় কর।
$$(a+b+c)^2 = \{a+(b+c)\}^2 \qquad [b+c$$
 কে একটি পদ ধরিয়া]
$$= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

 $=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

উদা. 5. a+b+c+d এর বর্গ নির্ণয় কর। $(a+b+c+d)^2 = \{(a+b)+(c+d)\}^2 \qquad [a+b \text{ কে একটি এবং } c+d \text{ কে আর }$ একটি পদ ধরিয়া] $= (a+b)^2 + 2(a+b)(c+d) + (c+d)^2$ $= (a^2+2ab+b^2) + 2(ac+ad+bc+bd) + (c^2+2cd+d^2)$ $= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$

বী---৫

. 6. সরল কর:

$$(a+b-c)^2 + 2(a+b-c)(a-b+c) + (a-b+c)^2$$

a+b-c এর পরিধর্ত্তে x এবং a-b+c এর পরিবর্তে y ধরিলে,

প্রাশিমালা
$$=x^2 + 2xy + y^2$$

 $=(x+y)^2$
 $=\{(a+b-c)+(a-b+c)\}^2$
 $=(2a)^2 = 4a^2$.

- . 7. x=15, y=-9 হইলে, $9x^2+30xy+25y^2$ এর মান নির্ণয় কর। প্রদত্ত রাশিমালা = $(3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2$ $=(3x+5y)^2$
- . $\int \sqrt{3x+5y} = 3 \times 15 + 5 \times (-9) = 45 45 = 0$.
- . প্রদত্ত রাশিমালা = 0.

প্রশালা 20

লিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর:

- 1. x+4.

- **2.** 3a+2. **3.** x+2y. **4.** 2x+7y.

- 5. 3a+4b. 6. 5a+7b. 7. ay+3bx. 8. a^2+2bc . 9. $3x^2+2y^2$. 10. $4x^2+y^3$. 11. a+2b+3c. 12. ab+bc+ca. 13. 2p+3q+4r. 14. $x^2+y^2+z^2$. 15. 2x+3y+4z. 16. $x^2+y^3+z^4$. 17. x+y+2a+3b.
- **18.** 3a+4b+c+2d. **19.** 2a+x+4y+3z.**20.** 4m+3n+3p+2q.

্র সরল কর:

- **21.** $(x+y)^2 + 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2$.
- 22. $(x-y+z)^2+(y+z-x)^2+2(x-y+z)(y+z-x)$.
- **23.** $(2a-3b+4c)^2+(2a+3b-4c)^2+2(2a-3b+4c)(2a+3b-4c)$.
- **24.** $(5a-7b)^2+2(5a-7b)(9b-4a)+(9b-4a)^2$.
- **25.** $(2x-5y-3z)^2+(6y+3z-x)^2+2(2x-5y-3z)(6y+3z-x)$.

মান নির্ণয় কর:

- 26. $9x^2 + 12x + 4$, $\sqrt{4} = -1$.
- 27. $16x^2 + 64x + 64$, যথন x = -2.

28.
$$25m^2 + 40mn + 16n^2$$
, यथन $m = -18$ এবং $n = 23$.

29.
$$49a^2 + 56ab + 16b^2$$
, যখন $a = -7$ এবং $b = 13$.

30.
$$64a^2 + 16ac + c^2$$
, $a = 6$ and $a = 6$ and $a = 6$

31.
$$81x^2 + 18xz + z^2$$
, 334 $x = 7$ and $z = -67$.

32.
$$36p^2 + 132pq + 12\mathbf{1}q^2$$
, যথন $p = 12$ এবং $q = -7$.

33. ম +
$$\frac{1}{m}$$
 = 4 হইলে, দেখাও যে, $m^2 + \left(\frac{1}{m}\right)^2 = 14$.

অর্থাৎ, তুইটি রাশিব অন্তরফলের বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের বর্গন্বয়ের সমষ্টি হইতে রাশি তুইটির গুণফলের দ্বিগুণ বিয়োগ করিতে হয়।

টীকা। এই স্ত্রটি প্রক্বতপক্ষে পূর্ব্ব স্থত্রেরই অন্তর্ভুক্ত ; কারণ, $(a-b)^2 = \{a+(-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

EXECUTE:
$$a^2 + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 2ab = (a - b)^2 + 2ab$$
.

অনুসি. 2. থেছেতু,
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
.....(1)

এবং
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \dots (2)$$

অতএব,
$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$
;

এবং
$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$$
.

আবার, (1) এর সহিত (2) যোগ করিয়া,

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$
;

এবং (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab.$$

(a+b)2-(a-b)2=4ab. উদা: 1. 3a-4b এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(3a-4b)^2 = (3a)^2 - 2(3a)(4b) + (4b)^2$$
$$= 9a^2 - 24ab + 16b^2.$$

$$(x-y-z)^2 = \{x-(y+z)\}^2$$

$$= x^2 - 2x(y+z) + (y+z)^2$$

সহজ বীজগণিত

$$= x^{2} - 2xy - 2xz + y^{2} + 2yz + z^{2}$$

$$= x^{2} + y^{2} + z^{2} - 2xy - 2xz + 2yz.$$

উদা. 3.
$$2x - 3y - 4z$$
 এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(2x - 3y - 4z)^{2} = \{2x - (3y + 4z)\}^{2}$$

$$= (2x)^{2} - 2(2x)(3y + 4z) + (3y + 4z)^{2}$$

$$= 4x^{2} - 2(6xy + 8xz) + \{(3y)^{2} + 2(3y)(4z) + (4z)^{2}\}$$

$$= 4x^{2} - 12xy - 16xz + 9y^{2} + 24yz + 16z^{2}$$

$$= 4x^{2} + 9y^{2} + 16z^{2} - 12xy - 16xz + 24yz.$$

' **উদা. 4.** a-b-c+d এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(a-b-c+d)^{2} = \{(a-b)-(c-d)\}^{2}$$

$$= (a-b)^{2} - 2(a-b)(c-d) + (c-d)^{2}$$

$$= (a^{2} - 2ab + b^{2}) - 2(ac - ad - bc + bd) + (c^{2} - 2cd + d^{2})$$

$$= a^{2} - 2ab + b^{2} - 2ac + 2ad + 2bc - 2bd + c^{2} - 2cd + d^{2}$$

$$= a^{2} + b^{2} + c^{2} + d^{2} - 2ab - 2ac + 2ad + 2bc - 2bd - 2cd.$$

छेका. 5. मदन कतः

St.

$$(ax - by + cz)^2 + (ax - by - cz)^2 - 2(ax - by + cz)(ax - by - cz).$$

 $ax - by + cz$ এর পরিবর্ত্তে m এবং $ax - by - cz$ এর পরিবর্ত্তে n ধরিয়া,

' প্রাপত্ত রাশি
$$= m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2$$

 $= \{(ax - by + cz) - (ax - by - cz)\}^2$
 $= (2cz)^2 = 4c^2z^2$.

উন্ধা. 6. a=15 এবং b=6 হইলে, $9a^2-48ab+64b^2$ এর মান নির্ণয় ক $^{-1}$ প্রদন্ত রাশি $=(3a)^2-2(3a)(8b)+(8b)^2$ ি $=(3a-8b)^2$

$$= (3a - 6b)^2 = (-3)^2 = 9.$$

. প্রথমালা 21

· নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর':

1.
$$x - 3$$
.

2.
$$2x - 5$$

$$3. \quad 3x - 5y.$$

5.
$$8m - 3n$$

6.
$$pm - qn$$

7.
$$p^2 - mn$$
. 8. $x^2y - xy^2$. 9. $x^3 - 2xz$.
10. $3a^3 - 5b^3$. 11. $-xyz - abc$. 12. $x^2yz - y^2zx$.
13. $a^2x^4 - b^2y^4$. 14. $a - 2b - 2c$. 15. $2x - 3y - 4z$.
16. $3m - 4n - 5q$. 17. $a^2 - 3b^2 - 5c^2$. 18. $x - y - a - b$.
19. $a - 2x - 3b - 4y$. 20. $90 - 1$. 21 . $120 - 3$.
22. $500 - 2$. 23. $1000 - 7$.

সরল কর:

24.
$$(a+3b)^2 - 2(a+3b)(a-3b) + (a-3b)^2$$
.

25.
$$(2a-4b+5c)^2 + (2a+4b+5c)^2 - 2(2a-4b+5c)(2a+4b+5c)$$
.

26.
$$(3a+5b+7c)^2 + (7c-4a+5b)^2 - 2(3a+5b+7c)(7c-4a+5b)$$
.

27.
$$(2x^2 - y^2 - 5z^2)^2 - 2(2x^2 - y^2 - 5z^2)(6z^2 + 2x^2 - y^2) + (6z^2 + 2x^2 - y^2)^2$$

28. $(ab-bc+ca)^2 + (ab+4bc+2ca)^2 - 2(ab-bc+ca)(ab+4bc+2ca)$.

মান নির্ণয় কর:

29.
$$a^2b^2 - 12abc + 36c^2$$
. $a=4$, $b=7$ and $c=5$.

30.
$$x^2y^2 - 24xyz + 144z^2$$
, যথন $x = 7$, $y = 9$ এবং $z = 6$.

81.
$$25(x+y)^2+z^2-10z(x+y)$$
, ব্ধন $x=47$, $y=-22$ এবং $z=129$.

32.
$$9c^2 - 42c(a+b) + 49(a+b)^2$$
, $a = -37$, $b = 57$ and $c = 45$.

33.
$$64(7p-5q)^2-96(7p-5q)r+36r^2$$
, $44 = 28$, $4 = 32$ 47 $r = 46$.

14.
$$c - \frac{1}{c} = 4$$
 হইলে, দেখাও যে, $c^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 = 18$.

56. সূত্র :
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
.
$$[(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$$

$$= a^2 - ab + ba - b^2$$

$$= a^2 - b^2$$

অর্থাৎ, তুইটি রাশির সমষ্টি ও বিয়োগফলের গুণফল, রাশি তুইটির বর্গদ্বয়ের বিয়োগফলের সমান ।

টীকা। বিপরীতভাবে প্রকাশ কলিলে, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. স্থাতরাং, $a^2 - b^2$ এর আকারে প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন রাশিকে, রাশিদ্বের সমষ্টি ও বিয়োগফল—এই তুইটি উৎপাদককে বিশ্লেষণ করা যায়।

[কোন একটি রাশি, অন্ত তুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হইলে, শেষোক্ত রাশিসমূহের ,প্রত্যেকটিকে পূর্ব্বোক্ত রাশিটির উৎপাদ্ধক বা গুণনীয়ক (factor) বলে।]

উপা. 1.
$$3x + 5y$$
 কে $3x - 5y$ দাবা তাণ কর। $(3x + 5y)(3x - 5y) = (3x)^2 - (5y)^2$ $= 9x^2 - 25y^2$.

ভিদা. 2.
$$a+b-c$$
 কৈ $a-b+c$ দাবা প্ৰণ কর।
$$(a+b-c)(a-b+c) = \{a+(b-c)\}\{c'-(b-c)\}$$

$$= a^2-(b-c)^2$$

$$= a^2-(b^2-2bc+c^2)$$

$$= a^2-b^2+2bc-c^2.$$

উদো. 3.
$$x^2 + xy + y^2$$
 কে $x^2 - xy + y^2$ দারা গুণ কর।
$$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = \{(x^2 + y^2) + xy\}\{(x^2 + y^2) - xy\}$$
$$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$$
$$= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$$
$$= x^4 + x^2y^2 + y^4.$$

উদা. 4. সরল কর:
$$(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2$$
.
প্রাণভ বাশি = $\{(a^2 + ab + b^2) + (a^2 - ab + b^2)\}$

$$\times \{(a^2 + ab + b^2) - (a^2 - ab + b^2)\}$$

$$= (2a^2 + 2b^2) \times 2ab$$

$$= 2(a^2 + b^2) \times 2ab = 4ab(a^2 + b^2).$$

- উদা. 5. (9726854)² (9726849)² এর মান নির্ণয় কর ৮ , প্রদন্ত রাশি = (9726854 + 9726849)(9726854 - 9726849) - 19453703 × 5 = 97268515.
- উদা. 6. $(a+3)^2-(c-2)^2$ কৈ উৎপাদকৈ বিশ্লেষণ কর। প্রদন্ত রাশি = $\{(a+b)+(c-d)\}\{(a+b)-(c-d)\}$ = (a+b+c-d)(a+b-c+d).
 - 1. 7. $16a^4 81x^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। প্রদূর্ভ রাশি = $(4a^2)^2 - (9x^2)^2$ = $(4a^2 + 9x^2)(4a^2 - 9x^2)$.

আবার, $4a^2 - 9x^2 = (2a)^2 - (3x)^2 = (2a + 3x)(2a - 3x)$. অতএব, প্রদত্ত রাশি = $(4a^2 + 9x^2)(2a + 3x)(2a - 3x)$.

প্রথমালা 22

গুণ কর:

- 1. x+3 93 x-3.
- 3. x + 2a 43 x 2a.
- $am + n^2$ (43° $am n^2$).
 - 7. $x^2 2yz$ এবং $x^2 + 2yz$.
 - 9. x+1, x-1 $93^{\circ} x^2+1$.
- 11. a+b+c এবং a+b-c.
- 2. 5x+13 43.5x-13.
- 4. ax + by এবং ax by.
- 6. xy + yz at xy yz. 8. $x^2y + xy^2$ at $xy^2 x^2y$.
 - 10. $a^2 + b^2$, $a^2 b^2$ and $a^2 + b^4$.
 - 12. a+b+c 93: a-b-c.
- 13. $m^2 + mn + n^2$ এবং $m^2 mn + n^2$.
- 14. $x^2 + 2xy + 2y^2$ and $x^2 2xy + 2y^2$.
- 15. ax by + cz এবং ax + by cz.
- $16. -ax + by + cz ext{ ax} + by + cz.$
- 17. $b^2m-c^2n+a^2p$ and $b^2m+c^2n-a^2p$.
- 18. $a^3 8b^3 + 27c^3$ 93: $a^3 + 8b^3 27c^3$.
- 19. $a^2x^2 2ax + 2$ এবং $a^2x^2 + 2ax + 2$.
- 20. $a^4x^4 a^2x^2 + 1$ and $a^4x^4 + a^2x^2 + 1$.
- 21: $m^2 + \sqrt{2.mn + n^2}$ এবং $m^2 \sqrt{2.mn + n^2}$.
- $2. x^2 \sqrt{2x+1}, x^2 + \sqrt{2x+1}$ and $x^4 1$.

সরল কর :

23.
$$(a+b-c)^2 - (a-b+c)^2$$
. 24. $(a-2b+3c)^2 - (a+2b-3c)^2$.

- **25.** $(x^2 + xy + y^2)^2 (x^2 xy + y^2)^2$.
- **26.** $(x+y-a+b)^2-(x-y+a-b)^2$.
- **27.** $(2a+3b-5c+7d)^3 (2a-3b+5c-7d)^2$.

মান নির্বয় কর:

- **28.** $2345 \times 2345 2343 \times 2343$.
- **29.** $(53497)^2 (53487)^2$.
- 30. 498567 × 498567 498562 × 498562.

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

- **31.** $25x^2 36$. **32.** $9a^2 16c^2$. **33.** $16m^2 49n^2$.

34.
$$4p^2 - 81q^2$$
. 35. $a^2x^2 - 64b^2$. 36. $36x^4 - 121y^4$. 37. $49 - 64d^2$. 38. $144c_2^2 - 25d^2$. 39. $(a+b)^2 - c^2$. 40. $(a+2b)^2 - 25c^2$. 41. $4x^2 - (3a-4b)^2$. 42. $a^2 - (2b-3c)^2$. 43. $a^4 - 81b^4$. 44. $(x-y)^2 - (a-b)^2$. 45. $81x^4 - 625y^4$. 46. $(4a+7b)^2 - (3a-8b)^2$. 47. $(3x+5y)^2 - (2x-7y)^2$. 48. $(a+2b-3c)^2 - (a+b-c)^2$. 49. $(2m+3n-5p)^2 - (2n+3p)^2$. 50. $(3x-4y+7z)^2 - (2x-3y+5z)^2$.

. 57. সূত্র :
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
; অথবা $= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

$$[(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$$

$$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

আবার, এই শেষোক্ত রাশি = $a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ = $a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.]

অমুসি. I
$$a^3 + b^3 = \{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)\} - 3ab(a+b)$$

= $(a+b)^3 - 3ab(a+b)$.

উদা. 1.
$$3a + 5b$$
 এর ঘন (cube) নির্ণয় কর।
$$(3a + 5b)^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2(5b) + 3(3a)(5b)^2 + (5b)^3$$
$$= 27a^3 + 3(9a^2)(5b) + 3(3a)(25b^2) + 125b^3$$
$$= 27a^3 + 135a^2b + 225ab^2 + 125b^3.$$

छिना. 2. मत्न कतः

$$(x-y)^3 + (x+y)^3 + 3(x-y)^2(x+y) + 3(x+y)^2(x-y).$$
 [কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

'x-y' এর পরিবর্জে a এবং 'x+y' এর পরিবর্জে b লিখিলে, প্রদন্ত রাশি = $a^3+b^3+3a^2b+3b^2a$ = $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, = $(a+b)^3=\{(x-y)+(x+y)\}^3$ $(2x)^3=8x^3$.

উদা. 3.
$$a+b=5$$
 এবং $ab=6$ হইলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর। এখন, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$, $=5^3-3\times6\times5=125$ $-90=35$.

ভাগা. 4.
$$x + \frac{1}{x} = p$$
 হইনো, দেখাও যে, $x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = p^3 - 3p$. যেহেছু, $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$,
$$\therefore \qquad x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

নির্ণেয় মান = $p^3 - 3p$.

উদা. 5.
$$p+q+r$$
 এর ঘন নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} (p+q+r)^3 &= \{(p+q)+r\}^3 \\ &= (p+q)^3 + 3(p+q)^2r + 3(p+q)r^2 + r^3 \\ &= (p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3) + 3(p^2 + 2pq + q^2)r \\ &\quad + 3(p+q)r^2 + r^3 \\ &= p^3 + q^3 + r^3 + 3p^2q + 3pq^2 + 3p^2r + 3pr^2 + 3q^2r \\ &\quad + 3qr^2 + 6pqr, \end{aligned}$$

উলা. 6. x=5 এবং y=-2 হইলে, $x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি =
$$x^3 + 3x^2(3y) + 3x(3y)^2 + (3y)^3$$

= $(x + 3y)^3 = (5 - 6)^3 = (-1)^3 = -1$.

প্রথমালা 23

নিম্নলিখিত রাশিগুলির ঘন (cube) নির্ণয় কর:

1.
$$x+3$$
.

2.
$$2x + 1$$
. 3. $3a + b$.

4.
$$4x + 3y$$

5.
$$x^2 + 2y$$
 6. $xy + yz$ 7. $a^2b + c^2d$ 8. $a + b + 2c$

6.
$$xy + y$$

$$a^2b+c^2d.$$

8.
$$a+b+2c$$

9.
$$2x + 3y + z$$
. 10. $x^3 + y^3$.

সরল কর:

11.
$$(3m+5n)^3+3(3m+5n)^2(2m-5n)$$
, r.
+3(3m+5n)(2m-5n)² + (2m-5n)³.

12.
$$(3x-8y)^3+(9y-2x)^3+3(x+y)(3x-8y)(9y-2x)^3$$

13.
$$(3a-7b)^3+(10b-3a)^3+9b(3a-7b)(10b-3a)$$
.

14.
$$(5x-2)^3 + (3-4x)^3 + 3(x+1)(5x-2)(3-4x)$$
.

15.
$$(3-7x)^3+(8x-1)^3+3(8x-1)(3-7x)(x+2)$$
.

16.
$$(a-b+c)^3+(a+b-c)^3+6a\{a^2-(b-c)^2\}.$$

 $a^3 + b^3$ এর মান নির্ণয় কর:

(;

18. যথন
$$a+b=7$$
 এবং $ab=8$.

19.
$$a + \frac{1}{a} = 3$$
 হইলে, দেখাও যে, $a^3 + \left(\frac{1}{a}\right)^3 = 18.$

$$z$$
20. $z+rac{1}{z}=4$ হইলে, $z^3+\left(rac{1}{z}
ight)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

নিমূলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

21.
$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$
, $\sqrt[3]{4}$ $x = -2$.

22.
$$x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$
, यशन $x = -5$.

23.
$$8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$$
, यशन $a = -3$ এবং $b = 2$.

24.
$$x^3 + 18x^2 + 108x + 351$$
, $\sqrt[3]{4}$ $x = -11$.

25.
$$x+y=5$$
 হইলে, দেখাও যে, $x^3+y^3+15xy=125$.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
 হইলে, দেখাও যে, $a^6 + b^6 + 3a^2b^2c^2 = c^6$.

. 27.
$$p+q=2$$
 ইইলে, দেখাও যে, $p^3+q^3+6pq=8$.

58. সূত্র :
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
,
অথবা, $= a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.
$$[(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$$

$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= (a - b)(a - 2ab + b^{2})$$

$$= a(a^{2} - 2ab + b^{2}) - b(a^{2} - 2ab + b^{2})$$

$$= a^{3} - 3a^{2}b + 3ab^{2} - b^{3}.$$

এবং শেষোক্ত রালি =
$$a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

$$= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) + 3ab(a-b)$$

$$= (a-b)^3 + 3ab(a-b).$$

উদা. 1.
$$3x - 4y$$
 এর ঘন নির্ণয় কর।

$$(3x - 4y)^3 = (3x)^8 - 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 - (4y)^8$$

= $27x^3 - 3(9x^2)(4y) + 3(3x)(16y^2) - 64y^3$
= $27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$.

941. 2.
$$a-b-c$$
 এর ঘন নির্ম কর।
$$(a-b-c)^3 = \{(a-b)-c\}^3$$

$$= (a-b)^3 - 3(a-b)^2c + 3(a-b)c^2 - c^3$$

$$= (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) - 3(a^2 - 2ab + b^2)c$$

$$+ 3(a-b)c^2 - c^3$$

$$= a^3 - b^3 - c^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2c + 3ac^2$$

$$- 3b^2c - 3bc^2 + 6abc.$$

5দা. 3.
$$x = 2\frac{1}{3}$$
 হইলে, $27x^3 - 54x^2 + 36x - 64$ এর মান নির্ণয় কর। প্রদত্ত রাশি = $(3x)^3 - 3(9x^2).2 + 3(3x).4 - 8 - 56$ = $(3x - 2)^3 - 56$.

অতএব, নির্ণেয মান = $(7-2)^3 - 56 = 125 - 56 = 69$.

প্রশ্নালা

নিমলিখিত রাশিগুলির ঘন নির্ণয় কর:
1. x-2.
2. 2x-1.
3. 2-3a.
4. 3-4a.
5. 2a-3b.
6. 5m-4n.
7. 2x-5y.
8. 2a-b-c.
10. $p^2-q^2-r^2$.

$$1. x-2.$$

$$2x - 1$$
.

6.
$$5m - 4n$$

$$\frac{3}{7}$$
, $2x - 5y$

8.
$$2a - b - c$$

, স্কুল ক্ম ঃ

11.
$$(a+2b)^3-3(a+2b)^2(a-2b)+3(a+2b)(a-2b)^2-(a-2b)^3$$
.

12.
$$(3x-8y)^3-(2x-7y)^3-3(3x-8y)(2x-7y)(x-y)$$
.

13.
$$(5x-8)^3-(3x-8)^3-6x(5x-8)(3x-8)$$
.

নিয়লিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

14.
$$m^3 - 12m^2n + 48mn^2 - 64n^3$$
, यशन $m = 12$ এবং $n = 3$.

16.
$$8 - 9a + 27a^2 - 27a^3$$
, যথন $a = 3$.

17.
$$216 - 144x + 108x^2 - 27x^3$$
, यथन $x = 3$.

18.
$$a - \frac{1}{a} = 3$$
 হইলে, $a^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

19.
$$c - \frac{1}{c} = 5$$
 হইলে, $c^3 - \left(\frac{1}{c}\right)^3$ এর মান নির্ণয় কর।

20.
$$x-y=3$$
 হইলে, দেখাও যে, $x^3-y^3-9xy=27$.

21.
$$p-2q=4$$
 হইলে, দেখাও যে, $p^3-8q^3-24pq=64$.

22.
$$2a-3b=5$$
 হুইলে, দেখাও যে, $8c^3-27b^3-90ab=125$. ``

59.
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3.$$

$$[(a+b)(a^2-ab+b^2) = a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$$

$$= (a^3-a^2b+ab^2) + (a^2b-ab^2+b^3)$$

 $= a^3 + b^3$

। বিপরীতভাবে প্রকাশ করিলে, $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. স্থতরাং, $a^3 + b^3$ এর আকারে প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন রাশিকে সর্বাদা উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

উদা. 1.
$$x^4-x^2+1$$
 কে x^2+1 দারা গুণ কর। x^2 এর পরিবর্ত্তে a , এবং 1 এর পরিবর্ত্তে b নিথিনে, $x^4-x^2+1=(x^2)^2-x^2.1+1^2=a^2-ab+b^2.$

অতএব,
$$(x^2+1)(x^4-x^2+1)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$=a^3+b^3$$

$$=(x^2)^3+1^3=x^6+1.$$

উদা. 2. 9x2 - 12x + 16 কে 3x + 4 দারা তাণ কর।

3x এর পরিবর্ত্তে a এবং 4 এর পরিবর্তে b লিখিলে, $9x^2 - 12x + 16 = (3x)^2 - (3x) \cdot 4 + 4^2$ $= a^2 - ab + b^2.$

মতবাং,
$$(3x+4)(9x^2-12x+16) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

= $a^3+b^3=(3x)^3+4^3$
= $27x^3+64$.

ভিজা 3.
$$16a^2 - 20ab + 25b^2$$
 কে $4a + 5b$ দাবা শুণ কর। $4a$ এব পরিবর্জে x , এবং $5b$ এব পরিবর্জে y লিখিলে, $16a^2 - 20ab + 25b^2 = (4a)^2 - (4a)(5b) + (5b)^2$ $= x^2 - xy + y^2$.

হতরাং, $(4a + 5b)(16a^2 - 26ab + 25b^2)$ $= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ $= x^3 + y^3 = (4a)^3 + (5b)^3$ $= 64a^3 + 125b^3$.

• উলা 4. $a^3b^3 + 8c^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। $a^3b^3 + 8c^3 = (ab)^3 + (2c)^3$ $= (ab + 2c)\{(ab)^2 - (ab)(2c) + (2c)^2\}$ $= (ab + 2c)(a^2b^2 - 2abc + 4c^2)$.

• ইমালা 25

• এই মালা 25

• এই মা

(

টাকা । বিপরীতভাবে প্রকাশ করিলে, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, অতএব, a^3-b^3 এর আকারে প্রকাশ করা যায় এরূপ যে কোন রাশিকে সর্বন্দা উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হাইতে পারে।

উপা. 1.
$$4a^2b^4 + 2ab^2 + 1$$
 কে $2a^{\frac{1}{2}}^2 - 1$ দারা গুণ কর।
$$(2ab^2 - 1)(4a^2b^4 + 2ab^2 + 1)$$

$$= (2ab^2 - 1)\{(2ab^2)^2 + (2ab^2).1 + 1^2\}$$

$$= (2ab^2)^3 - 1^3 = 8x^3b^6 - 1.$$

উদা. 2.
$$64x^6 - a^3y^6$$
 কে উৎপাদকে বিশেষণ কর।

$$64x^{6} - a^{3}y^{6} = (4x^{2})^{3} - (ay^{2})^{3}$$

$$= (4x^{2} - ay^{2})\{(4x^{2})^{2} + (4x^{2})(ay^{2}) + (ay^{2})^{2}\}$$

$$= (4x^{2} - ay^{2})(16x^{4} + 4ax^{2}y^{2} + a^{2}y^{4}).$$

প্রথমালা 26

প্রণ কর:

1.
$$1+2x+4x^2$$
 কে $1-2x$ বারা। 2. x^2+3x+9 কে $x-3$ বারা।

4.
$$x^4 + 2x^2yz + 4y^2z^2$$
 ($x^2 - 2yz$ at at 1)

5.
$$9m^2 + 6mnq + 4n^2q^2$$
 কে $3m - 2nq$ হারা।

ডৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: 6. 125a³-1. 7. 343x³-8y°. 216k³-125l³.

6.
$$125a^3 - 1$$
.

7.
$$343x^3 - 8y^6$$

9.
$$1-512k^3$$
.

10.
$$729m^3 - 64a^3n^6$$

61.
$$= x^2 + (a+b)x + ab.$$

$$[(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab.]$$

টীকা। সপষ্টই দেখা যায় যে, নিয়লিখিত স্ত্রগুলিও উপরোক্ত স্ত্রটির অন্তর্ভুক্ত:

(1)
$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$$

(2) $(x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab$
(3) $(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab$

(2)
$$(x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab$$

(3)
$$(\tilde{x} + a)(x - b) = \hat{x}^2 + (a - b)x - ab$$

দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$$(x-a)(x-b) = \{x + (-a)\}\{x + (-b)\}\$$

$$= x^2 + \{(-a) + (-b)\}x + \{(-a) \times (-b)\}$$

$$= x^2 - (a+b)x + ab.$$

অক্সান্তগুলির যথার্থতাও অতুরূপ্ত্রাবে প্রমাণ করা যায়।

অতএব, আমরা 61 নিয়মের স্ত্রাট্ট আরও পরিষ্কারভাবে নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করিতে পারি:

উদা. 1. x+3 এবং x+4 এর গুণফল লিখ।

যেহেতু,
$$3+4=7$$
 এবং $3\times 4=12$ \cdots নির্দেয় গুণফল $=x^2+7x+12$.

উদা. 2. x - 7 এবং x + 4 এর গুণফল লিখ।

থেছেতু,
$$-7+4=-3$$
 এবং $(-7)\times 4=-28$ \cdot নির্ণেয় গুণফল $=x^2-3x-28$.

উদা. 3. x+5 এবং x-9 এর গুণফল লিখ।

বেংছতু,
$$5-9=-4$$
 6 . . নির্ণেয় গুণফল $=x^2-4x-45$.

উদা. 4. x-2 এবং x+7 এর গুণফল লিখ।

উদা. 5. x-5 এবং x-8 এর গুণফল লিখ।

্থেছেডু,
$$-5-8=-13$$
 এবং $(-5)\times(-8)=$ 40 \cdot

প্রখ্নালা. 27

खनकन निश्रः

1.
$$x+1$$
 43 $x+2$ 43

3.
$$x-5$$
 এবং $x+6$ এর।.

```
5. a-11 এবং a+16 এর I
                            6. m − 7 এবং m + 19 এব |
7. p + 13 এবং p − 11 এর I
                             8. p+12 এবং p-17 এর।
9. x-4 এবং x+9 এর।
                            10: x-5
                                     এবং x-10 এর |
11. x - 12 এবং x+5 এর।
                            12: k-13 এবং k+2 এর |
   a+5 এবং a+14 এর।
13.
                            14. m-14 এবং m+6 এর।
15. x-5 এবং x-13 এর।
                            16. x+7 এবং x+12 এর।
17.
   a-3 এবং a-11 এর I
                            18. x+4 এবং x-13 এর I
19. m+5 এবং m-16 এর I
                            20.
                               a+6 এবং a-12 এর।
21.
                               22.
   x - 10 এবং x - 16 এর ।
23.
                           24.
                               25.
   x-16 এবং x+10 এর 1
```

পঞ্জন অপ্র্যায় সরল সমীকরণ (Simple Equation)

62. স্থেক্তাঃ ছইটি রাশি সমতাচিক্ন দারা সম্বন্ধ হইলে একটি সমীকরণ (equation) উৎপন্ন হইল বলা হইয়া থাকে; এবং সমতাচিক্নের উভয় পার্যস্থিত রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে সমীকরণের একটি পার্ম্ম (side) বা পক্ষা (member) বলা হয়।

সমীকরণ শব্দটিকে অবস্থ এইরূপ ব্যাপক অর্থে প্রয়োগ করা হয় না। একটি বীজগণিতীয় রাশি অস্থ একটি বীজগণিতীয় রাশির সমান হইলে, উহাদের সমতা, রাশিরয়ে অন্তর্গত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানের জন্তও রক্ষিত হইতে পারে; যথা, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; অথবা, অক্ষর বা অক্ষরসমূহের এক বা একাধিক নির্দিষ্ট মানের জন্তই কেবল মাত্র রক্ষিত হয়, যথা, 4x=8 (যাহা কেবলমাত্র, x=2 হইলেই রক্ষিত হয়)। এই শেষোক্ত শ্রেণীকেই শুধু সমীকরণ (equation) প্রকৃতপক্ষে, সাপেক সমীকরণ (equations of condition] বলে, এবং প্রেনিক শ্রেণীকে অন্তেদ সমীকরণ (identical equation) বা স্ইক্ষেপে শুধু অন্তেদ (identity) বলে।

যথা, (x+1)+(2x+3)=3x+4 একটি অভেদ; কিন্তু (x+1)+(x+3)=3x+2 থাকিটি সমীকরণ; কারণ, প্রথম সমতাটি x এর যে কোন মানের জন্মই রক্ষিত

হয়, কিন্তু দ্বিতীয়টি কেবল মাত্র x=2 হইলেই বজায় থাকে, অন্নূ কোন মানের জন্ম বজায় থাকে না।

সমীকরণস্থিত যে অক্ষরটির এক বা একাধিক নির্দিষ্ট মান সমীকরণের উভয় পক্ষকে সমানমানবিশিষ্ট করে, সেই অক্ষরটিকে সমীকরণের **অক্তর্যাভ রাশি** (unknown quantity) বলে। সাধারণতঃ, সঞ্জীকরণের অক্তাত রাশিকে বর্ণমালার শেষাংশের অক্ষরসমূহের (যথা, x, y, z,...এর) যে কান একটি দ্বারা স্থচিত করা হয়।

অজ্ঞাতরাশির যে নির্দিষ্ট মানটি বা মানগুলি সমীকরণের উভয় পক্ষকে সমান করে, সেই মানটি বা মানগুলিদ্বারা সমীকরণ টি সিদ্ধ হইয়াছে, এরপ বলা হয়; এবং ঐ মানটি বা মানগুলিকে সমীকরণের বীজ প্রতিচা অথবা solution) বলে।

কোন সমীকরণ 'সমাধান করা (to solve)' অর্থে 'উহার বীজ নির্ণয় করা' ব্ঝায়।

যে সমীকরণে প্রথমশক্তিবিশিষ্ট একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাহাকে সরল সমীকরণ (simple equation) বলে।

- 63. স্বভপ্তসিক্রে: সমীকরণের সমাধান প্রণালী সাধারণতঃ নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলির উপর নির্ভর করে:
 - (1) সমান সমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফলগুলিও সমান হইবে।
 - (2) সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিযোগ করিলে বিয়োগফলুগুলিও সমান হইবে।
 - (3) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান বস্তু দারা গুণ করিলে গুণফলগুলিও সমান হইবে।
 - (4) •সমান সমান বস্তুকে সমান সমান বস্তু দারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলিও সমান হইবে।

অব্যুদ্ধি. 1. স্বতঃসিদ্ধ (1) ও (2) হইতে আমরা সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিবার নিম্নলিখিত অত্যাবশুকীয় নিয়মটি প্ররর্ত্তন করিতে পান্ধি।

• সুমীকরণের যে কোন পার্শের একটি পদকে উহার চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া অপর পার্শে পক্ষান্তর (transpose) করা যাইতে পারে।

এই প্রক্রিয়াকে প্রাক্রাকরণ (transposition) বলে।

ধর x-a=b+c; এই সমতার তুই পার্শ্বের গোগ করিলে, x-a+a=b+c+a, \cdots শিত্যাসিদ্ধ 1]

অথবা,
$$x = b + c + a$$
;

আবার, উপরোক্ত সমতার তুই পার্শ্ব হইতে c বিয়োগ কবিলে.

$$x-a-c=b+c-c=b,$$
 ... [স্বতঃসিদ্ধ 2]

অতএব প্রথম ক্ষেত্রে, বাম পার্শ্ব হইতে $-\sqrt{2}$ কে পক্ষান্তর করিয়া ডা'ন পার্শ্বে +a রূপে পাওয়া গেল, এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, ডা'ন পার্শ্ব হইতে +c কে পক্ষান্তর করিয়া বাম পার্শ্বে -c রূপে পাওয়া গেল।

তজ্ঞপ, x - a = b - c + d হইলে, x - a - b + c - d = 0 হইবে।

অন্যুসি. 2. সমীকরণস্থিত প্রত্যেকটি পদের ইচ্ছই একসঙ্গে পরিবর্ত্তন করিলে সমীকরণের সমতা নষ্ট হয় না।

কারণ, ধর
$$x-a=b+c$$
:

তাহা হইলে, তৃতীয় স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে,
$$(x-a) \times (-1) = (b+c) \times (-1)$$
 ; অথবা, $-x+a=-b-c$.

- 64. সহজ্জ উদ্পাহব্রপ: উপরোক্ত নিয়মাবলীর সাহায্যে সরল সমীকরণের বীজ নির্ণয় করিবার পদ্ধতি পরিষ্কার করিয়া বুঝাইবার জন্ম নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া গেল:
 - উলা. 1. সমাধান কর: 18x = 54.
- ০ [দ্রষ্টব্য : ৺ প্রশ্নটিকে আরও একভাবে বলা যায় ; যথা, 18x = 54 হইলে, x এর
 মান কত ?]

থেহেতু, 18x = 54,

অতএব, উভয় পক্ষকে 18 দারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{18x}{18} - \frac{54}{18}$$
; অথবা $x = 3$.

স্তরাং, x এর নির্ণেয় মান = 3.

উদা. 2. সমাধান কর: 3x+5=x+19.

[দ্রষ্টব্য: অন্তর্গণেও বলা যায়; যথা, যদি 3x+5=x+19 হয়, তবে x এর মান-কত ?]

বেহেছ,
$$3x + 5 = x + 19$$
,

অতঐ্ব,• পক্ষান্তর করিয়া,

এখন, উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

x=7 পাওয়া গেল।

স্বিতঃসিদ্ধ 4]

মতরাং. x এর নির্ণেয় মান = 7.

উদা. 3. সমাধান কর: -11x + 2(3-x) = 32.

বন্ধনী অপসারণ করিয়া -11x + 6 - 2x = 32.

অথবা, -13x+6=32, অথবা, -13x=32-6, ... [পক্ষান্তর করিয়া] অথবা, -13x=26.

এখন, উভয় পক্ষকে - 1 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$(-1) \times (-13x) = (-1) \times 26,$$

 $13x = -26$:

উভয় পক্ষকে 13 দারা ভাগ করিয়া.

অথবা.

$$x = -\frac{26}{18} = -2$$
.

স্থতরাং, x এর নির্ণেয় মান = -9

উলা. 4. সমাধান কর: (x+2)(3x+4)-6x=10+(3x+2)(x+1).

বাম পক্ষ = $3x^2 + 10x + 8 - 6x = 3x^2 + 4x + 8$:

ড়া'ন পক $= 10 + 3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 5x + 12$;

 $3x^2 + 4x + 8 = 3x^2 + 5x + 12$

উভয় পক্ষ হইতে $3x^2$ বাদ দিয়া,

$$4x + 8 = 5x + 12$$
;

স্বিতঃসিদ্ধ 2]

প্সতএব, পক্ষান্তর করিয়া.

4x - 5x = 12 - 8; -x = 4;

কাজেই, x=-4 [পূর্ণ ,্নিয়মের দ্বিতীয় অমুসি.]

• স্থতরাং. x এর নির্ণেয় মান = -4.

টীকা। অতি সহজেই প্রতাক্ষ করা যাইতে পারে যে, দমীকরণের উভয় পক্ষে 🗫 এর পরিবর্ত্তে ঊহার এই মান (অর্থাৎ – 4) বসাইলে, প্রত্যেক পক্ষই 40 এর সমান হয়।

উদা. 5. $\frac{x}{6} + 5 = \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$ হইলে, x ওঁর মান নির্ণয় কর। .

$$\frac{x}{6} + 5 = \frac{x}{3} + \frac{x}{4},$$

উভদ্ম পক্ষকে 12 (হরগুলির ল. সা. গু.) দ্বারা গুণ করিয়া,

$$12\left(\frac{x}{6}+5\right) = 12\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{4}\right),$$

2x + 60 = 4x + 3x = 7x;

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া. 2x - 7x = -10.

-5x = -30: অথবা.

কাজেই, -5 দারা উভয় পক্ষকে ভাগ কঞিয়া, x=12.

স্কুতরাং, সমীকরণের নির্ণেয় বীজ = 12.

প্রগ্রমালা 28

্রীনিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর: 1. 4x=16. 2. 3x=-15.

$$3x = -15$$

4.
$$-5x = 25$$
. **5.** $\frac{x}{5} = -1$. **6.** $\frac{-x}{3} = 20$.

7.
$$3x + 3(2 - x) = -10$$
.

7.
$$3x + 5(2 - x) = -16$$
. 8. $5(1 - x) + 3(2 - x) = -29$.

9.
$$4(2-x)+2(3-2x)=30$$

9.
$$4(2-x)+2(3-2x)=30$$
. **10.** $7(3-2x)+5(x-1)=34$.

11.
$$4x + 3 = 2x + 5$$
.

12.
$$3x+2=x+6$$
.

13.
$$5x - 6 = 2x + 3$$
.
15. $4(x - 3) = 2(x - 6)$.

14.
$$15x - 9 = 11x - 25$$
.

16.
$$2(x-15)=5(x-11)+4$$
.

117.
$$19 - 3x = 5x + 35$$
.

18.
$$3(x-2)+7(2x-3)=5(1-2x)-59$$
.

119.
$$13x - 4(5x - 8) + 17 = 0$$
.

20.
$$14(x-4)+3(x-5)=6(7-2x)+4$$
.

21.
$$8(2x-7)-9(3x-14)=15$$
. 22 . $3x-13(2x-13)=4x-20$

23.
$$49 + 13(5x + 27) = 8(5 + x) - 3x$$
.

24.
$$16 - 5(7x - 2) = 13(x - 2) + 4(13 - x)$$
.

25.
$$8x + 5(x + 7) + 9(2x + 23) - 3(x + 6) = 0.$$

26.
$$(x-7)(4x-29)=(2x-5)(2x-17)+1$$
.

.27.
$$(3x+2)(2x-6)=(4-3x)(1-2x)-10$$
.

28.
$$(3x+5)(6x-7)=(3x+2)(9x-13)-(3x+1)(3x-1).$$

29.
$$(x+2)(2x+5) = 2(x+1)^2 + 13$$
.
30. $(x+1)(4x-7) - (x-1)(x+5) = 3(x+2)^2 + 5$.
31. $\frac{x}{2} + 5 = \frac{x}{3} + 7$.
32. $\frac{x}{6} - \frac{x}{5} = \frac{x}{15} - \frac{x}{3} + 7$.
33. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2 - \frac{x}{3} + \frac{5x}{12}$.

ষ্ট অধ্যাহ

সরল সমীকরণ বিষয়ক প্রশাবলী

(Problems leading to Simple Equations)

- 65. সাক্ষেতিক বাক্য (Symbolical Expression) সমীকরণ বিষয়ক প্রশাবলী সমাধান করার পক্ষে, প্রতীক সাহায্যে প্রশ্ন-প্রদন্ত সর্প্তসমূহের যথাযথ সাক্ষেতিক বাক্য (symbolical expression) গঠন করাতেই প্রধান অস্ক্রবিধা। স্থতরাং প্রশাবলী সমাধান করার পূর্ব্বে ছাত্রগণের প্রথমতঃ এই বিষয়েই বিশেষ অভ্যন্ত হওয়া কর্ত্তব্য। নিম্নপ্রদন্ত উদাহরণগুলি দারা এই বিষয়ের বিশেষ ধারণা হইবে।
- ্ উদ্ধা. 1. একজন লোক মাসিক x টাকা আয় করিলে, অর্দ্ধ মাসে সে কতগুলি সিকি আয় করিবে ?

acksim কাজেই, তাহার অর্দ্ধমাসের আয়=4x সিকির অর্দ্ধ, অর্থ $^{\circ}$ র 2x সিকি।

ৈ উদা. 2. একটি পোকা কোন খঁ টিতে য়দি মিনিটে x ইঞ্চি করিয়া উঠিতে থাকে, তবে y ঘণ্টায় পোকাটি কত ফুট উঠিবে ?

যেহেতু, 1 ইঞ্চি = এক ফুটের 🗓 ভাগ;

অতএব, x ইঞ্চি = এক ফুটের $\frac{x}{12}$ ভার্গ ;

কাজেই, এক মিনিটে পোকাটি $rac{x}{12}$ ফুট উঠে ;

60 মিনিটে পোকাটি $\frac{x}{12} \times 60$ ফুট উঠে অর্থাৎ, এক ঘণ্টায় পোকাটি 5x ফুট উঠে ; y ঘণ্টায় পোকাটি $(5x \times y)$ ফুট উঠে ; অতএব, নির্ণেয় ফুট-স্থ্যা = 5xy.

উদা. 3. প্রতি ঘণ্টায় x মাইল হিসাবে গ্লমন করিলে, একজন লোকের 10 মাইল পথ যাইতে কত সময় লাগিবে ?

এক ঘণ্টায় x মাইল যায় ; t এক মাইল যাওয়ার সময় $=\frac{1}{x}$ 'হ'টা ; t 10 মাইল যাওয়ায় সময় $=\frac{10}{x}$ ঘণ্টা ;

উদা. 4. তুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যাব বামদিকেব অঙ্কটি x দারা এবং ডা'নদিকের অঙ্কটি y দারা নিন্দিষ্ট হইলে, সংখ্যাটিকে কি প্রকারে স্থচিত করিবে ?

অতএব, নির্ণেয সময় = $\frac{10}{m}$ ঘণ্টা।

বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া অঙ্ক চুইটি যথাক্রমে,

4 ও 5 হইলে, সংখ্যাটি = $10 \times 4 + 5$; 5 ও 7 হইলে, সংখ্যাটি = $10 \times 5 + 7$; 8 ও 4 হইলে, সংখ্যাটি = $10 \times 8 + 4$; ইত্যাদি।

অতএব, ইহা স্থম্পষ্ট যে, বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া অঙ্ক তুইটি যথাক্রমে $x \ \ y$ হইলে, নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10 \times x+y$, অর্থাৎ, 10x+y.

প্রশ্নালা 29

- 1. তুইটি সংখ্যার যোগফল 15 ; উহাদের একটি যদি x হয়, অপরটি কত ? i
- 2. তুইটি সংখ্যার বিয়োগর্ফল 20 ; বড়টি x হইলে, অপরটি কত ?
- 3. তুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 25; ছোটটি x হইলে, বড়টি কত ?
- 4. 25 হইতে y কত বুড় ? 5. y হইতে 2x কত ছোট ?
- $\tilde{}$ 6. 21 এর একটি উৎপাদক x হইলে, অপরটি কত ?
 - 7. কোন্ সংখ্যাটি 100 হইতে 3x পরিমিত ছোট ?
 - 8. 42 হইতে কোন্ সংখ্যা বাদ দিলে 3y অবশিষ্ট থাকে ?.

- 9. একটি লোক ঘণ্টায় y মাইল হিসাবে পরিভ্রমণ করিলে, x ঘণ্টায় সে কত মাইল পরিভ্রমণ করিবে ?
- 10. যদি এক ব্যক্তি ঘণ্টায় y মাইল হিসাবে পরিভ্রমণ করে, তবে x মাইল পথ সেকত সময়ে পরিভ্রমণ করিবে ?
- 11. এক ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স ্ম বৎসর হইলে, 20 বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ? 3 বৎসর পূর্বের তাহার বয়স ফুত ছিল ?
- 12. এক ব্যক্তি x দিনে 60 মাইও ভ্রমণ করিয়া থাকিলে, তাহার দৈনিক ভ্রমণের পরিমাণ কত ?
- 13. একটি রেলগাড়ী x ঘণ্টার্y 30 মাইল অতিক্রম করিলে, এক সেকেণ্ডে উহা কত ফুট অতিক্রম করিবে ?
- 14. আমি সপ্তাহে x আনা হিসাবে থরচ করিয়া, আমার বাৎসরিক আয় 5x টাকা হইতে কত টাকা বাঁচাইতে পারি ?
 - 15. এরূপ 5টি ক্রমিক সংখ্যা লিখ, যাহাদের মধ্যমটি x.
 - 16. $\stackrel{\checkmark}{x}$ ঠিক মধ্যম সংখ্যা হয়, এরূপ তিনটি ক্রমিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।
 - 17. 2m+1 এর ঠিক পরবর্ত্তী অযুগ্ম সংখ্যাটি কত ?
 - 18. $\checkmark 2x$ এর ঠিক পূর্ববর্তী যুগ্ম সংখ্যাটি কত ?
- 19. \dot{x} ব্যক্তির একটি কাজ করিঙে 10 দিন সময় লাগিলে, y ব্যক্তির কাজটি করিতে কত দিন সময় লাগিবে ?
- 20: একটি ঘরের দৈর্ঘ্য a গজ এবং প্রস্থ b ফুট হইলে, ঘরটির ক্ষেত্রফলের পরিমাণ বর্গফুটে-প্রকাশ কর।
 - 21. পূর্ব্বপ্রশ্নে, 4 ফুটকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিলে, ক্ষেত্রফলের সাংখ্যমান কত ?
- 22. এক ব্যক্তি x মাইল পরিমিত পথ y ঘণ্টীয় ভ্রমণ করিলে 20 মিনিটে সেকত মাইল ভ্রমণ করিবে 2
- 23. ্ এক ব্যক্তি x মাইল a ঘণ্টায় ভ্রমণ করিলে, কত সময়ে সে 16 মাইল পরিমিত পথ ভ্রমণ করিবে ?
- ackprime 24. 20 বৎসর পূর্বে এক ব্যক্তির বয়স x-5 বৎসর হইনে, তাহার বর্ত্তমান বয়স কত x = 30 বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ?
- 25. তুই অঙ্কবিশিষ্ট কোঁন একটি সংখ্যার ডানীদকের অঙ্কটি x এবং বামদিকের অঙ্কটি y হইলে, স্বংখ্যাটিকে কিরূপে প্রকাশ করিবে ?
- 26. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কগুলি, ব্রামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া, যথাক্রমে x,y ও z হইলৈ, সংখ্যাটিকে কিন্ধানে প্রকাশ ক্রিবে ?
- 27: পূর্বকপ্রশ্নের অক্ষণ্ডলিকে বিপরীওক্রমে লইলেঁ যে সংখ্যাটি উৎপন্ন হয়, তাহাকেই বা কিরূপে প্রকাশ করিবে ?

- 66. সমীক্রপ সম্বন্ধীয় সহজ্য প্রাপ্তাবলী (Easy Problems): বর্ত্তনান অধ্যায়ে বর্ণিত বিষয়ের সহিত স্থারিচিত হইবার নিমিত্ত নিমে কতকগুলি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই অজ্ঞাত রাশিটিকে (unknown quantity কে) x দারা স্থাচিত করা হইবে।
- উদা. 1. A ও B একত্রে 540 টাকা মূল্পন লইয়া একটি যৌথ কারবার আরম্ভ করিল; মূলধনে A এর অংশ B এর অংশ র্মিপেক্ষা দ্বিগুণ হুইলে, প্রত্যেকের অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর।

ধর, B এর অংশ x দারা স্থাচিত হইতেছে ; \তাহা হইলে, Λ এর অংশ অবশুই 2x.
অতএব, মোট মূলধন -x+2x=3x.

কিন্তু, মোট মূলধন 540 টাকা বলিয়া দেওয়া আছে ;

অতএব, 3x = 540 টাকা। x = 130 টাকা।

অর্থাৎ, B এর অংশ = 180 টাকা।

স্থতরাং, A এর অংশ $=(2\times180)$ টাকা, অর্থাৎ, 360 টাকা।

. **উদা. 2.** 34 সংখ্যাটিকে এরপ ছুইটি ভাগে ভাগ কর, যেন ঐ ভাগদ্বয়ের বিয়োগফল ৪ এর সমান হয়।

ধর, বড় ভাগটি x দারা স্থচিত হইতেছে। তাহা হইলে, ছোট ভাগটি 34-x দারা স্থচিত হইবে। অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তামুসারে,

> x-(34-x)=8অধ্বং 2x-34=8; অধ্বং, 2x=34+8=42; অভ্যবং x=21.

স্থতরাং, বড় ভাগটি 21 এবং ছোট ভাগটি 34 – 21, অর্থাৎ, 13.

উদা. 3. কোন্ সংখ্যাটির এক-তৃতীয়াংশ, উহার এক-পঞ্চমাংশ হইতে 4 বড় ? ধর্, নির্নেয় সংখ্যাটি x.

তাহা হইলে, প্রদত্ত সর্তামুসারে, $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 4$; অথবা, 5x - 3x = 60 ;

অথবা, 2x = 60; ... x = 30.

্রিদা. 4. 10 বৎসর পূর্বের B এর যে বয়স ছিল, 10 বৎসর পরে A এর বয়স তাহার দ্বিগুণ হইবে; বর্ত্তমানে B অপেক্ষা A, 9 বৎসর বড় হইলে, উহাদের প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স ক্রু ?

ধর, B এর বর্ত্তমান বয়স x দ্বারা স্থাচিত হইল । তাহা হইলে, A এর বর্ত্তমান বয়স x+9 দ্বারা স্থাচিত হইবে । কাজেই, 10 বৎসর পরে, A এর বয়স =x+9+10=x+19; এবং 10 বৎসর পূর্বে, B এর বয়স =x-10; এখন, প্রদন্ত সর্ত্তামুসারে, $x+\sqrt{9}=2(x-10)$; অথবা, x+19=2x-20; পক্ষান্তর করিয়া, $2x-\frac{1}{2}=20+19$; অথবা, x=39; অর্থাৎ, B এর মর্ত্তমান বয়স 39 বৎসুর । স্থাতরাং, A এর বর্ত্তমান বয়স 48 বৎসুর ।

গ্রেমালা 30

- ন 1. 9 ফুট দীর্ঘ একটি সর্বারেখাকে এরপ তুই অংশে ভাগ করা হইল যে, এক অংশ অপর অংশের বিশুণ; প্রত্যেক অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
- 2. একটি থলিতে যত সংখ্যক টাকা আছে, ঠিক তত সংখ্যক আধুনি আছে। থলিতে সৰ্ব্বশুদ্ধ 30 টাকা থাকিলে, উহাতে কতগুলি আধুনি আছে ?
 - ্ । সুইটি সংখ্যার সমষ্টি 50 এবং অক্তরফল 30 হইলে, সংখ্যা হুইটি নির্ণয় কর।
- 4. এমন একটি সংখ্যা বাহির কর, যাহা 96 ও উক্ত সংখ্যাটির অন্তরফলের পাঁচগুণ হয়।
- 5. একটি সংখ্যার জ্বাটগুণ, সেই সংখ্যাটির অর্দ্ধভাগ হইতে 90 বেশী ; সংখ্যাটি নির্ণয় কুর ।
- ় 6. একটি সংখ্যা হইতে 40 বিয়োগ করিলে, ব্লিয়োগফল সংখ্যাটির এক-তৃতীয়াংশের সমান ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 7. কোন একটি সংখ্যা 35 হইতে যত বড় এবং 67 হইতে কত ছোট, সেই বৃদ্ধি ও হাসের অন্তর্মল 22; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 8. √ কোন একটি সংখ্যা 16 হইতে যত বড় তাহার চারিগুণ, 416 হইতে সংখ্যাটি যত ছোট তাহার সমান; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
 - 9. তিনটি ক্রমিক অথগু সংখ্যার সমষ্টি 129 হইলে, সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।
- 10. এরপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাকৈ 7 দ্বারা গুণ করিলে, গুণফল 132 হইতে যক্ত বড়, সংখ্যাটি 132 হইতে তত ছোট।
- 90 কে এরপ তুইটি অংশে ভাগ কর, যেন এক অংশের তিনগুণ অপর অংশের চারিগুণের সহিত যোগ করিলে, যোগফল ৪35 হয়।

- 12. তুইটি সংখ্যার সমষ্টি 39 এবং একটির এক-পঞ্চমাংশ অক্সটির এক-অষ্টমাংশের সমান ; সংখ্যা তুইটি নির্ণয় কর।
- 🏸 🌬 কোন সংখ্যার এক-চতুর্থাংশ উহার এক-নবমাংশ হইতে 5 বেশী ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- ু 14. কোন সংখ্যার এক-ষষ্ঠাংশ উহার এক-অষ্ট্রমাংশ হইতে 3 বেশী হইলে, সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 15. 21 কে এরূপ তুই অংশে ভাগ কর, ুয়ন এক অংশের দশগুণ অবশিষ্টাংশের নয়গুণ হইতে 1 বেশী হয়।
- 16. একটি বাড়ীর এবং একটি বাগানের মূল্য শ্রকত্রযোগে £850 এবং বাগানের মূল্য বাড়ীর মূল্যের 📆 অংশ; প্রত্যেকটির মূল্য নির্ণয় ফর।
- 17. £420 ছই ব্যক্তির মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন এক ব্যক্তির প্রত্যেক শিলিং এর জন্ম অপর ব্যক্তি অর্দ্ধ-ক্রাউন পায়।
- 18: তুইজন মেষপালক তাহাদের একপাল মেষকে নিজেদের মধ্যে মূল্যাস্থসারে সমান্তাবে ভাগ করিয়া লইতে রাজী হইল। A 72টি মেষ লইল এবং B, A কে $\pounds35$ দিয়া 92টি মেষ লইল। প্রত্যেক মেষের মূল্য সমান হইলে, একটির মূল্য নির্ণয় কর।
- ্রুপ্ত হুই ব্যক্তির বয়সের অস্তর 10 বৎসর। 15 বৎসর পূর্বের জ্যেষ্ঠের বয়স কনিষ্ঠের ঠিক দ্বিগুণ ছিল; প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।
- 20. পিতার বয়স বর্ত্তমানে পুত্রের বয়সের তিনগুণ, এবং 10 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে; প্রত্যেকের বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় কর।

সপ্তম অধ্যায়

বিন্দু সংস্থাপন (Plotting of Points) ?

লেখাবলী (Graphs)

67. ত্রিক্রমপিকা (Introduction) বিতীয় ও তৃতীয় অধ্যায়ে, বীজগণিতের বিষয়সমূহ লৈথিক দৃষ্টান্ত ধারা কি প্রকারে অতি সহজে এবং স্থচারুরূপে বুঝান যাইতে প্লাবে, তাহা দেখান হইয়াছে। বস্তুতঃ, সম্ভবস্থনে, লৈথিক চিত্রগুলি আলোচ্য বিষয়সমূহের সম্যক্ ধারণা করিতে যথেষ্ট সহায়তা করে। লৈথিক চিত্র সাহায্যে বীজগণিতীয় রাশিগুলির অভেদ সংস্থাপন ও বীজগণিতীয় সমীকরণসমূহের সমাধানের মুথবন্ধস্বরূপ, বর্ত্তমান অধ্যায়ে শুধু বীজগণিতীয় রাশিসমূহ কি ভাবে জ্যামিতিক বিন্দুগুলি দ্বারা স্থচিত হইতে পারে, তাহাই দেখান হইবে। উপরোক্ত জ্যামিতিক চিত্রকেই লেখার হিচিত্র হৈতে পারে, তাহাই দেখান হইবে। উপরোক্ত জ্যামিতিক চিত্রকেই লেখার (graph), এবং চিত্র সাহায্যে বীজগণিতীয় রাশি বিষয়ক প্রশ্ন সমাধানের প্রক্রিয়াকে লৈখিক প্রক্রিয়া (graphical method) বলা হয়।

- 68. আবশ্যকীয় হাস্ত্রস্থিতঃ শিক্ষার্থির সর্বপ্রথমে নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলিকে নিপুণভাবে ও যথাযথরূপে ব্যবহার করা শিক্ষা করিতে হইবে।
 - (ক) একটি আঁকিবার পেন্সিল (a drawing pencil).

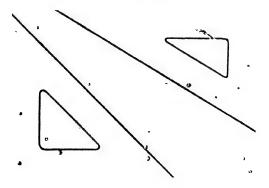
টীকা। পেন্দিলটির অগ্রভাগ এরূপ স্চাল হওঁয়া দরকার, যেন উহাদারা অঙ্কিত রেখা বা বিন্দু অতি সক্ষ হয়।

(খ) এক জোড়া কাঁটা-কম্পাস্ (a pair of dividers).

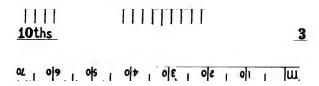


, (গ) হইটি **ত্রিকোণী** (two set-squares).

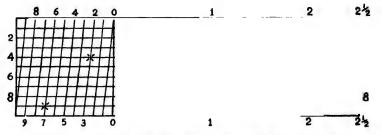
γ΄.



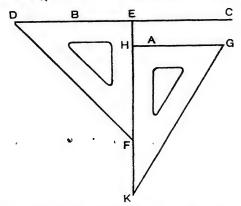
(ছা) এক ইঞ্চির দশমাংশস্তক চিহ্নবিশিষ্ট একথানি মাপনী (a graduated ruler shewing tenths of an inch).



(৩) এক ইঞ্চির শতাংশস্চক চিহ্নবিশিষ্ট একথানি মাপনী (a scale giving hundredths of an inch).



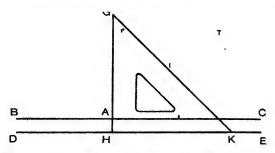
উদ্ধা. 1. A বিন্দু দিয়া এবং BC এর সমাস্তরাল-করিয়া একটি সরলরেখা টান।



DEF ত্রিকোণীথানিকে এরপভারুর স্থাপন কর, যেন উহার DE ধারটি ঠিক BC রেখার সহিত মিলিয়া যায় ; তারপর GHK ত্রিকোণীথানির HK ধারটি DEF ত্রিকোণীর

EF ধারটির সহিত মিলাইয়া GHK ত্রিকোণীকে এরপভাবে সরাইতে থাক, যেন উহার GH ধারটি A বিন্দু দিয়া যায় ; এই অবস্থানে GH এর বরাবর একটি রেথা টানিলেই উহা BC এর সমাস্তরাল হইবে (উপরের চিত্র দেখ)।

উদা. 2. BC সরলরেখার A বিন্দৃতে BC এর উপর একটি লম্ব আঁক।



প্রথমে BC এর সমাস্তরাল DE রেখাটি আঁক (চিত্র দেখ)। এখন GHK ত্রিকোণীখানি এরূপভাবে স্থাপন কর, যেন উহার HK ধারটি DE-এর সহিত মিলিয়া যায় এবং GH ধারটি A বিন্দু দিয়া যায়। তাহা হইলে, HG এর বরাবর একটি রেখা টানিলেই উহা BC এর উপর A বিন্দুতে লম্ম হইবে।

উদা. 3. AB ও CD সরলরে থাছয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Α-

C-

শতাংশস্তক মাপনী এবং কাঁটা-কম্পাসের সাহiন্দ্র্ দেখা গেল যে, AB এর দৈর্ঘ্য 2.24 ইঞ্চি এবং CD এর দৈর্ঘ্য 1.69 ইঞ্চি ।

প্রশ্নমালা 31"

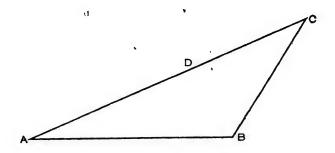
1. AB সরলরেথাটিকে, উহার দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য পর্য্যস্ত বর্দ্ধিত কর।

-'B

2. কোন একটি সরলরেখা AB এর উপর একটি বিন্দু D কে মধ্যবিন্দু বলিয়া

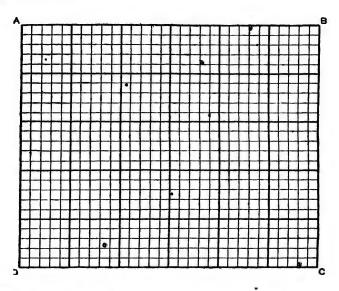
ধরা হইল.; কিন্তু কম্পাস্ দারা মাপিয়া দেখা গেল যে, AD, BD হইতে কিঞ্চিৎ ছোট। কি করিয়া এই ভূল সংশোধন করা যাইবে ?

3. ABC একটি ত্রিভূজ এবং D, AC এর উপরিস্থিত যে কোন এক বিন্দু (নিমের চিত্র দেখ); D বিন্দু দিয়া, AB এর দিকে CB এর সমান্তরাল করিয়া একটি রেখা অঙ্কিত কর।



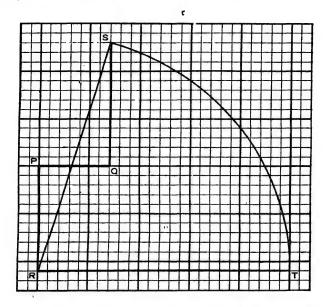
- 4. উপরিস্থিত চিত্রে, D বিন্দু দিয়া, AC এর যে পার্ষে AB অবস্থিত উহার বিপরীত পার্মে, BC এর সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।
- 5. প্রশ্ন 3 এর চিত্রে, B বিন্দু দিয়া AC এর সমাস্তরাল করিয়া একটি রেখা আঁকি।
- 6. কোন নির্দিষ্ট, ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি হইতে উহাদের বিপরীত বাহুত্তরের উপর লম্ব অঙ্কিত কর।
- 7. প্রশ্ন ৪ এর চিত্রে, AB, BC, CA বাহু তিনটির এবং AD ও DC এর, দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
- 69. বর্গাব্দিত ক্রাপ্তর (Squared paper) বর্গান্ধিত কাগজের একটি নম্না পরবর্তী পৃষ্ঠার দেওয়া হইল। উহাতে ছই শ্রেণীর সমদ্রবতী সমাস্তরাল সরলরেথা অন্ধিত আছে। এক শ্রেণীর রেথাসমূহ কাগজের দৈর্ঘ্যের এবং অপর শ্রেণীর রেথাসমূহ কাগজের প্রস্তের সমাস্তরাল হওয়ায়, প্রথম শ্রেণীর প্রত্যেকটি রেথা দিতীয় শ্রেণীর সকল রেথাকেই লম্মভাবে ছেদ করিয়াছে। প্রত্যেক শ্রেণীর রেথাগুলিই ধারাবাহিক ক্রমে পরস্পর এক-দশমাংশ ইঞ্চি দ্রে অবস্থিত বলিয়া, ছই শ্রেণীর রেথাসমূহের পরস্পর ছেদ হইতে কতকগুলি ক্ষ্ম ক্ষ্ম পরস্পর-সমান বর্গক্ষেত্র

উৎপন্ন হইয়াছে। আবার, উভয় শ্রেণীতেই কতকগুলি অপেক্ষাকৃত স্থুল রেখা দেখা যায়, যাহারা পরস্পর অর্দ্ধ ইঞ্চি দ্রে অবস্থিত। অতএব, এই স্থুল রেখাগুলি দারাও কতকগুলি অপেক্ষাকৃত বড় পরস্পার-সমান বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন হইয়াছৈ, যাহাদের প্রত্যেকের বাহুর দৈখ্য অর্দ্ধ ইঞ্চি। স্পষ্টই দেখা যায় যে, প্রত্যেকটি বড় বর্গক্ষেত্রের মধ্যে পঁচিশটি ছোট কোট বর্গক্ষেত্র আছে। •



- . টীকা 1. বর্গান্ধিত কাগজের নমুনাটিতে, AB এর সমাস্তরাল রেথাগুলিকে পূর্ব্ব-পশ্চিম (east-west) রেথা এবং AD এর সমাস্তরাল রেথাগুলিকে উত্তর-দক্ষিণ (north-south) রেথা বলা ঘাইতে পারে। উহাদিনকে ঘথাক্রমে অসুভূমিক (horizontal) ও উল্লম্ব (vertical) রেথা বলিয়াও কল্পনা করা যায়।
- টীকা 2. স্থবিধার জক্ত যে কোন একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'a' দারা স্থচিত করা যাইতে পারে।
- টীকা 3. উপরে প্রদর্শিত কাগজখানি এরপেন্ড রল করা যাইতে পারে যে, একটি জ্বোট বর্গক্ষেত্রের আছর দৈর্ঘ্য এক সৈন্টিমিটারের এক-দূশমাংশ অর্থাৎ এক মিলিমিটার হয়। সেক্ষেত্রে, প্রত্যেক বড় বর্গক্ষেত্রের বাছর দৈর্ঘ্য আর্দ্ধ সেন্টিমিটার বা 5 মিলিমিটার হইবে।

উদা. 1. চারিটি ষ্টেশন P,Q,R,S এরপভাবে অবস্থিত যে, Q,P হইতে পূর্বের 7 মাইল দূরে, R,P হইতে দক্ষিণে 11 মাইল দূরে, এবং S,Q হইতে উত্তরে 13 মাইল দূরে অবস্থিত। R হইতে S এর দূরত্ব নির্ণয় কর।



ধর, একটি ছোট বর্গকোঁত্রের যে কোন একটি বাছর দৈর্ঘ্যকে a ছারা স্থাচিত করা হইল, এবং উহা এক মাইল পরিমিত দূরত্ব জ্ঞাপন করে। তাহা ইইলে, P, Q, R, S এর অবস্থান উপরের চিত্রাস্থ্যায়ী ইইবে, এবং PQ=7a, PR=11a, এবং QS=13a.

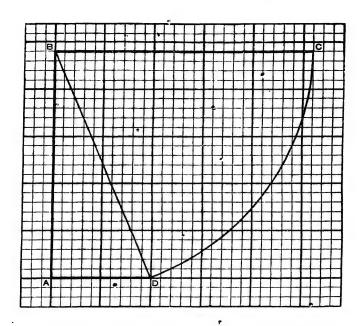
এখন, R কে কেন্দ্র করিয়া এবং RS কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ আঁক এবং মনে কর উহা R বিন্দু দিয়া অঙ্কিত 'পূর্ব্ব-পশ্চিম' সরলরেখাটিকে T বিন্দুতে ছেদ করিল;

এখন, যেহেতু RT=25a, অতএব, RS=25a ; স্তরাং, নির্ণেয় দূরুম্ব =25 **আইল।**

উলা. 2. একটি নোজা খুঁটি উল্লম্ভাবে (vertically) দাঁড় করান আছে; উহার উচ্চ্তা ৪ ফুট। ৪ ফুট দীর্ঘ একগাছা দড়ির এক প্রান্ত খুঁটিটির উপরিভাগে

100

বাঁধিয়া অপর প্রান্তটিকে এরপভাবে মাটির সহিত সংলগ্ন করা হইল, বেন দড়িগাছা বেশ টান থাকে। খুঁটিটির পাদবিন্দু হইতে দড়িগাছার মাটিসঙ্গাগ্ন প্রান্তটির দূরত্ব নির্ণয় কর।



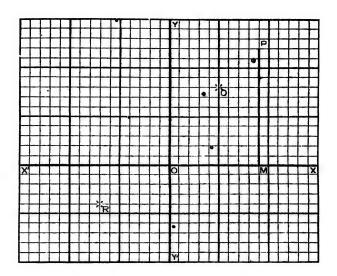
ধর, 3a (অর্থাৎ, একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর তিনগুণ) এক ফুট দৈর্ঘ্য স্থাচিত করিতেছে; তাহা হুটলে, 8 ফুট দৈর্ঘ্য 24a দারা এবং $8\frac{2}{5}$ ফুট দৈর্ঘ্য 26a. দারা স্থাচিত হুইবে। এখন, খুঁটিটি AB দারা নির্দ্দিপ্ত হুইলে, AB=24a. B বিন্দু দিয়া অন্ধিত অন্নভূমিক (horizontal) সরলরেখাটির উপর C বিন্দু এরূপে শুও, যেন BC=26a. B কে কেন্দ্র করিয়া এবং BC কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া এরূপ একটি বৃত্ত-চাপ আঁকি, যাহা A বিন্দু দিয়া অন্ধিত অন্থভূমিক রেখাটিকে D বিন্দুতে কাটে। BD যুক্ত কর; তাহা হুইলে, BD ই দড়িগাছার অবস্থান স্থাচিত করিবে।

এখন, AD কে 10a (অর্থাৎ 9a+a) এর সমান দেখা যায় ; অতএব উহার দৈখ্য $3\frac{1}{8}$ ফুট।

প্রথমালা 32

- . 1. A, O হইতে পূর্বে $5\frac{1}{3}$ একক পরিমিত দুরে এবং P, A হইতে উত্তরে 4 একক পরিমিত দূরে অবস্থিত ; O হইতে P এর দূরত্ব নির্ণয় কর ।
- 2. B, O হইতে 3 ফুট পশ্চিমে, এবং Q, B হইতে $7\frac{1}{8}$ ফুট দক্ষিণে অবস্থিত ; O হইতে Q এর দূরত্ব নির্ণ্যু কর।
- ${f 3.}$ C, O হইতে 2 গজ উ্তুরে এবং R, C হইতে 6 গজ পশ্চিমে অবস্থিত ; O হইতে R এর দূরত্ব নির্ণয় কর ।
- 4. D, O হইতে $2^{\circ}1$ ইঞ্চি দক্ষিণে এবং S, D হইতে $2^{\circ}8$ ইঞ্চি পূর্ব্বে অবস্থিত ; S হইতে O এর দূরত্ব নির্ণয় কর।
- ${f 5.}$ ${f A,}$ ${f O}$ হইতে ${f 2.7}$ ফুট পূর্ব্বে অবস্থিত ; ${f P,}$ ${f A}$ এর উত্তরে এবং ${f O}$ হইতে ${f 4.5}$ ফুট দূরে থাকিলে, ${f P}$ এবং ${f A}$ এর দূরস্ব নির্ণয় কর ।
- 6. Q, B হইতে 2.4 ফুট দক্ষিণে আছে। O, B এর পূর্ব্বে এবং Q হইতে 2.5 ফুট দূরে অবস্থিত হইলে, O হইতে B এর দূরত্ব নির্ণয় কুর।
- 7. B, A হইতে $4\frac{4}{5}$ গজ পূর্বের ; C, A হইতে $\frac{2}{5}$ গজ উত্তরে এবং D, B হইতে 2 গজ উত্তরে অবস্থিত ; C এবং D এর দূরত্ব নির্ণয় কর ।
- 8. B, A হইতে 25 ফুট উত্তরে ; P, A হইতে 40 ফুট পশ্চিমে ; এবং Q, B হইতে 20 ফুট পূর্বেষ অবস্থিত হইলে, Q এবং P এর দূরত্ব নির্ণয় কর।
- 9. তুইটি উল্লম্ব (vertical) খুঁটি যথাক্রমে 14 ফুট ও 3 क्रू ফুট লম্বা এবং উহারা পরস্পর 13 क्रुं ফুট দ্রে অবস্থিত; উহাদের উপরিস্থিত প্রান্তদ্বয়ের দ্রম্ব নির্ণয় কর।
- 10. 30 ফুট লম্বা একথানি মইএর পাদপ্রান্ত একটি উল্লম্ব দেওয়াল হইতে 10 ফুট দূরে অবস্থিত। দেওয়ালের কত দূর পর্যান্ত মইথানির উর্দ্ধ পৌছাইবে? [প্রয়োজনামুস্যুরে শতাংশস্টক মাপনী ব্যবহার করা যাইতে পারে।]

70. কোন সমতলে যদি একটি নির্দিষ্ঠ বিন্দু, এবং ঐ বিন্দু দিয়া অক্ষিত এবং পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত তুইটি নির্দিষ্ঠ সরলরেথা অবস্থিত থাকে, তবে ঐ রেখাদ্বরের সম্পর্কে, সমতলস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা যাইতে পারে।



ধর, কোন নির্দিষ্ট সমতলে XOX' এবং YOY' হুইটি পরস্পরচ্ছেন্ধী নির্দিষ্ট মরলুরেখা, এবং উহারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত (উপারে প্রদর্শিত চিত্র দেখ)। P যদি
সমতলস্থিত যে কোন একটি বিন্দু হয়, তবে P এর অবস্থান কিরূপে নির্ণয় করা যায়, দেখা
শাউক।

আমরা XOX' রেখাটিকে পূর্ব্ব-পশ্চিম রেখা এবং YOY' কে উত্তর-দক্ষিণ রেখা বিলয়া ধরিয়া লইতে পারি । P বিন্দু দিয়া YOY' এর সমান্তরাল করিয়া একটি সরল-রেখা আঁক এবং মনে কর, উহা XOX' রেখাটির সহিত M বিন্দুতে মিলিত হইল । (চিত্রামুসারে) স্পষ্টই, M, O বিন্দুর পূর্ব্বে এবং P, M বিন্দুর উত্তরে অবস্থিত । অতএব, OM এবং MP রেখাদ্বন্ধের দৈর্ঘ্যমান জানা থাকিলে, P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা যায় । \cdot

উপরিস্থিত বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক-

নির্দেশক মনে করিলে, OM=9 একক দীর্ঘ এবং MP=12 একক দীর্ঘ। অতএব, P বিন্দুর অবস্থান আমরা নিম্নলিখিতভাবে স্থচিত করিতে পারি:

পূর্বে 9 একক দূরে, উত্তরে 12 একক দূরে।

- **টীকা 1**. Q যদি এরূপ একটি বিন্দু হয়, যাহার অবস্থান 'পূর্ব্বে 5 একক দূরে, উত্তরে ৪ একক দূরে' এই বর্ণনা দারা নির্দ্দেশ করা হইতেছে, তাহা হইলে, Q বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করিতে আমাদিগকে O বিন্দুর পূর্বের 5 একক পরিমিত দূরে একটি বিন্দু লইয়া, তৎপরে ঐ বিন্দু হইতে উত্তরে ৪ একক পরিমিত দূরে বাইতে হইবে।
- **টীকা 2**. R যদি এরূপ একটি বিন্দু হয়, যাহার অবস্থান 'O হইতে পশ্চিমে 7 একক দূরে, দক্ষিণে 4 একক দূরে', এই বর্ণনা দারা স্থচিত হইতেছে, তবে $\,R$ বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করিতে হইলে, আমাদিগকে O বিন্দুর পশ্চিমে 7 একক পরিমিত দূরে যাইয়া, তথা হইতে দক্ষিণে 4 একক পরিমিত দূরে যাইতে হইবে।

প্রথমালা 33

[প্রতিক্ষেত্রেই বর্গাঙ্কিত কাগজ (squared paper) ব্যবহার করিতে হইবে।]

- 1. যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নলিখিত বর্ণনা দ্বারা স্থচিত, তাহাদিগকে স্থাপন কর:
 - (1) 5 একক পূর্বের, 7 একক উত্তরে;
 - (2) ৪ একক পশ্চিমে, 5 একক উত্তরে;
 - (3) 10 একক পশ্চিমে, 12 একক দক্ষিণে;

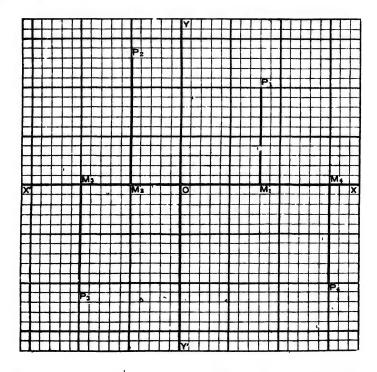
 - (4) 15 একক পূর্বের, 6 একক দক্ষিণে;
 (5) ৪ একক পশ্চিমে, 13 একক উত্তরে;
 - 14 একক পূর্বের 15 একক দক্ষিণে। (6)
- 2. দ্বিতীয় অধ্যায়ের (অর্থাৎ, ধনরাশি ও ঋণরাশি সম্বনীয় অধ্যায়ের) ব্যাখ্যা হুইতে ইহা স্কুম্পষ্ট যে, '6 এফক পশ্চিমে' অংবা - 6 একক পূর্ব্বেণ একই কথা। তদ্রপ, '৪ একক দক্ষিণে' বা '-৪ একক উত্তরে' একই কথা, ইত্যাদি। শ্ই অমুসারে, যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নলিখিত বর্ণনা দ্বারা নির্দিষ্ট, তাহাদিগকে স্থাপন কর :
 - (1) 7 একক পূর্বের, 8 একক উত্তরে;
 - (2) -10 একক পূর্বের, '6 একক উত্তরে;
 - (3) 9 একক পূর্বে, 13 একক উত্তরে।

- 3. যদি ইহা সর্ব্ধসম্মতিক্রমে স্থীকার করিয়া লওয়া হয় যে, প্র্বদিকের দ্রত্বগুলিকে সকল ক্ষেত্রেই প্রথমে লেখা হইবে, তাহা হইলে বিন্দুর অবস্থান বর্ণনা করার সময় 'প্রের ও উত্তরে' শব্দ ছইটির উল্লেখ না করিলেও চলে। উপরোক্ত স্বীকৃতি অফুসারে, যে বিন্দুগুলির অবস্থান নিম্নোক্ত বর্ণনা দ্বারা নির্দিষ্ট হইতেছে, উহাদিগকে স্থাপন করঃ
 - (1) ৪ একক, 9 একক; (2) 6 একক, 11 একক;
 - (3) -12 একক, 15 একক; (4) -10 একক, -14 একক।
- 4. প্রত্যেকস্থলেই 'একক' শব্দটিকে বাদ দিয়া, বিন্দুর অবস্থান আরও সংক্ষেপে স্চিত করা যায়; এই প্রথা অনুসারে, নিম্নলিখিত বর্ণনা দারা নির্দিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন কর:
 - (1) 6, 4; (2) 13, 8; (3) -7, 6;
 - (4) 8, -6; (5) -10, -13; (6) -9, -15.
- 71. স্থেকাঃ পূর্বনিয়মে দেখান হইয়াছে যে, পরম্পর লম্বভাবে অবস্থিত XOX' এবং YOY' রেখা তুইটির সাহায়ে (পূর্বনিয়মের চিত্র দেখ) সমতলস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা যায়। এই স্থির রেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে অক্ষ(axis) বলে; এবং XOX' ও YOY' অক্ষর্বের ছেদ্ধিন্দু O কে মূলবিন্দু (origin), XOX' কে x-অক্ষরেখা (axis of x) এবং YOY' কে y-আক্ষরেখা (axis of y) বলা হয়। আবার, OM এবং MP এর দৈর্ঘ্যমান্দ্রেকে P বিন্দুর ভুজ-কোটি (co-ordinates) বলে; OM এর দৈর্ঘ্যমানকে ভুজ (abscissa বা x-co-ordinate) এবং MP এব দৈর্ঘ্যমানকে বিশ্বি
- '(x, y) বিন্দু' বা শুধু 'x, y' এর অর্থ 'একটি' বিন্দু, যাহার ভুজ (abscissa) .x-একক দীর্ঘ এবং যাহার কোটি (ordinate) y-একক দীর্ঘ'।
- 1. একটি বিন্দুর 'x এবং y' এর কথা বলা হইলে, প্রকৃতপক্ষে তদ্ধারা ঐ বিন্দুর যথাক্রমে ভূজ ও কোটির কথাই বলা হয়।
- 2. মূলবিন্দু O এর ডা'নুদিকে M বিন্দু থাকিলে, (70 নিয়মের চিত্র দেখ) P বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে থাকিলে, \hat{O} ভুজটি ঋণাত্মক, বলা হইয়া থাকে। তজ্ঞপ, P বিন্দু $\mathring{X}OX'$ এর উপরিভাগে থাকিলৈ, P বিন্দুর কোটি ধনাত্মক, এবং \hat{P} বিন্দু XOX' এর নীচে থাকিলে, P বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক, বলা হয় \blacksquare
- টীকা 3. 'বিন্দু সংস্থাপন করা (to plot a point)' এর অর্থ বিন্দৃটির ভূজ-কোটি দেওয়া থাকিলে, উহার অবস্থান নিরূপণ করা।

উদা. 1. নিমপ্রদর্শিত চিত্রে, P_1 , P_2 , P_3 , P_4 বিন্দুগুলির প্রত্যেকটির ভূজ-কোটি লিখ।

চিত্রের ব্যাখ্যা অনাবশ্যক। ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে,

- (1) $OM_1=8$ একক, এবং M_1 , O বিন্দুর ডা'নদিকে অবস্থিত; আবার, $M_1P_1=10$ একক, এবং P_1 বিন্দুটি XOX' এর উপরিভাগে অবস্থিত। অতএব, P_1 বিন্দুটির ভুজ ও কোটি মুথাক্রমে 8 এবং 10.
- (2) $OM_2=5$ একক, এবং M_2 , O এর বামদিকে; আবার, $M_2P_2=13$ একক, এবং P_2 বিন্দৃটি XOX' রেখার উপরিভাগে। অতএব, P_2 বিন্দৃটির ভূজ ও কোটি যথাক্রমে -5 ও 13.



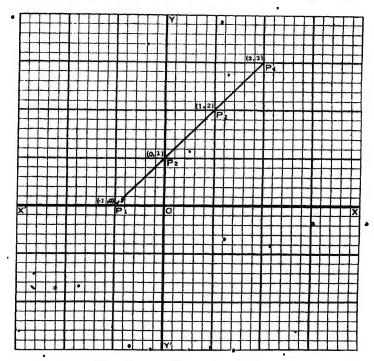
(3) $OM_8 = 10$ একক, এবং M_3 , O এর বামদিকে; $M_3P_3 = 11$ একক এবং P_8 , XOX' এর নীচে; কাজেই, P_3 বিন্দুটির ভুজ-কোটি (-10, -11).

(4) $OM_4=15$ একক, এবং M_4 , O এর ডা'নদিকে; এবং $M_4P_4=10$ একক, এবং P_4 , XOX' এর নীচে; অতএব, P_4 বিন্দুটির ভুজ-কোটি (15, -10).

উদা. 2. (-1, 0), (0, 1), (1, 2) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর এবং দেখাও যে, উহারা সমরেখ।

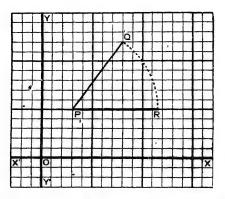
ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 5 গুণকে একক ধরিয়া বিন্দুগুলিকে যথাস্থানে সংস্থাপন কর।

ধর, $P_1,\,P_2,\,P_3,\,P_4$ দ্বারা এই বিন্দুচতুষ্টয়কে নির্দ্দিষ্ট করা হইল $\,$ [চিত্র দেখ $\,$] $\,$ $\,$ $\,$ ।



এখন, একখানা মাপনীর এক পার্স উ্হাদের যে কোন তুইটি বিন্দুর সহিত
মিলাইয়া স্থাপন করিলে দেখা যাইবে, সেই পার্স অপুর তুইটি বিন্দু দিয়াও যাইবে।
অতএব, চারিটি বিন্দুই সমুরেখ।

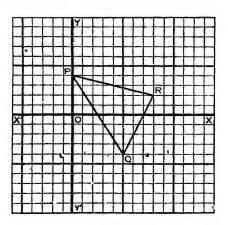
উদা. 3. (3, 5) এবং (8, 12) এই বিন্দৃষয় সংস্থাপন কর, এবং উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর। ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া বিন্দু তুইটি সংস্থাপন কর। মনে কর, P ও Q ঐ বিন্দুছয়কে নির্দেশ করিতেছে [চিত্র দেখ]।



P কে কেন্দ্র করিয়া এবং PQ কে ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ আঁক ; ধর, উহা P বিন্দু দিয়া অতিক্রান্ত পূর্ব্ব-পশ্চিম রেখাটিকে R বিন্দুতে ছেদ কবিল ।

তাহা হইলে, নির্ণের দূরত্ব=PQ=PB=8°6 একক (চিত্র হইতে)।

উদা. 4. P(0,4), Q(5,-4) এবং R(8,2) বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন PQR ত্রিভূজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



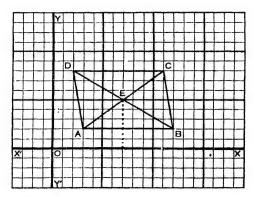
ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে, $P,\ Q$ ও R এর অবস্থান, চিত্রে যেরূপ দেখান ইইয়াছে, সেইরূপ হইবে। এখন, PQR ত্রিভুজের অভ্যস্তরস্থ ছোট

বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা কর; তারপর, যে যে বর্গক্ষেত্রগুলির ভিতর দিয়া ত্রিভুজের বাহু গিয়াছে, তাহাদের মধ্যে যেগুলির অর্দ্ধ বা তদধিক অংশ ত্রিভুজৈর ভিতরে আছে সেইগুলিকে গণনা করিয়া বাকীগুলি বাদ দাও। যেহেতু, একটি ছোট বর্গক্ষেত্র 'ক্ষেত্রফলের একক' স্থচিত করে, অতৃএব বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যাই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্দ্দেশ করিবে।

উপরোক্ত নিয়মে গণনা করিয়া PQR ত্রিভূজের অভ্যন্তরস্থ বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যা 27 পাওয়া গেল।

ু অতএব, PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 27 একক (ক্ষেত্রফলের)।

উদা. 5. A(3,2), B(12,2), C(11,8) এবং D(2,8) বিন্দুচতুষ্টয় সংস্থাপন কর। ABCD চতু ৰ্ভুজটির ক্ষেত্রফল, এবং AC ও BD এব ছেদবিন্দুর ভূজ-কোটি (co-ordinates) নির্ণয় কর।



ছোট বর্গন্ধেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিলে, $A,\ B,\ C$ ও D এর অবস্থান, চিত্রে বেরূপ দেখান হইয়াছে, সেইরূপ হইবে।

উদাহরণ 4 এ বর্ণিত নিয়ম্বাস্থ্যপারে গণনা করিয়া ABCD চতুর্ভুজের অভ্যন্তরস্থ বর্গক্ষেত্রগুলির মোট সংখ্যা 54 পাওয়া গেল।

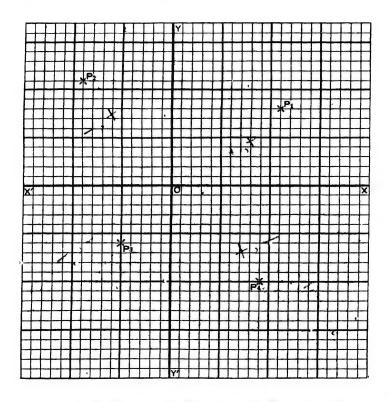
অতএব, নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = 54 একক (ক্ষেত্রফলের)।

স্থাবার, চিত্র ইইতে দেখা যায় যে, AC ও BD এর ছেদবিন্দু \dot{E} এর ভূজ 7 একক এবং কোটি 5 একক।

অতএব, E বিন্দুটির ভুজ-কোটি (7, 5).

প্রশ্নালা 34

া. নিম্নপ্রদত্ত চিত্রে, P_1 , P_2 , P_3 , P_4 বিন্দুগুলির ভূজ-কোটি (co-ordinates) নির্ণয় কর, যথন (1) ছোট বর্গক্ষেত্রের একবাছ্র দৈর্ঘ্যকে একক ধরা হইবে; (2) ছোট বর্গক্ষেত্রের একবাছর দৈর্ঘ্যের পাঁচগুণকে একক ধরা হইবে 1



- 2. ছোট বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্যের তিনগুণকে 'একক'রূপে ধরা হইলে, উপরিপ্রদন্ত চিত্রে, P_1 , P_2 , P_3 , P_4 বিন্দুগুলির ভুজ-কোটি কি কি হইবে, তাহা নির্দিয় কর।
- 3. (-4, -4), (7, 7) ও (13, 13) বিন্দুগুলি সংস্থাপন করিয়া প্রত্যক্ষ কর যে, উহারা মূলবিন্দু (origin) দিয়া অতিক্রান্ত একটি সরলরেখায় অবস্থিত।

- 4. (-8, 4) এবং (10, -5) বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন কর এবং প্রত্যক্ষ কর যে, উহাদের সংযোজক সরলরেথা মূলবিন্দু দিয়া যায়।
 - 5. (8, 5) ও (-4, -11) বিন্দুদর সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।
 - 6. (-7, 9) ও (-12, 21) বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।
- 7. (-11, 13) ও (3, -35) বিন্দু ছুইটি সংস্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।
- 8. (0, 0) ও (5, 5) বিন্দুদ্ম যুক্ত করিয়া একটি স্রলরেখা টান এবং উহাকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। এই সরলরেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দৃটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভুজ 11; এবং সেই বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি 13.
- 9. (0, 7) এবং (12, 0) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটিকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। এই রেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভূজ 18, এবং সেই বিন্দুটির ভূজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি 14.
- 10. (-4,0) এবং (0, -8) বিন্দু তুইটির সংযোজক সরলরেখাটিকে উভয়-দিকে বর্দ্ধিত কর; এই রেখার উপরিস্থিত সেই বিন্দুটির কোটি নির্ণয় কর, যাহার ভুজ -10, এবং সেই বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর, যাহার কোটি -24.
- $m{11.}$ A(3, 2), B(3, 7) এবং C(8, 5) বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- 12. P(-2,5), Q(6,5) এবং R(8,9) বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের •দার। উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- 13. $\cdot D(5, 2)$, E(6, 8) এবং F(7, 12) বিন্দু তিনটি সংস্থাপন কর এবং উহাদের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- 14. (11, 2), (3, 2), (3, 7) এবং (11, 7) বিন্দু চারিটি দারা উৎপন্ন চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর; উহার কর্ণন্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।
 - 15. নিম্নলিথিত বিন্দু চারিটি দারা উৎপন্ন চতুর্ভূজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর:
 - (1) (16, 6), (2, 3), (11, 14) এবং (5, 11);
 - (2) (3, 6), (5, 4), (17, 16) এবং (9, 18);
 - (8) (-12, 5), (-12, -010), (16, -10) and (16, 5);
 - (4) (0, 1), (10, 8), (2, 13) এবং (-2, 8).

- 16. এরপ একটি ত্রিভূজ অন্ধিত কর, যাহার ভূমি 12 সেণ্টিমিটার এবং বাহুদ্ম যথাক্রমে 5 এবং 13' সেণ্টিমিটার। ত্রিভূজটির ক্ষেত্রফল, উচ্চতা এবং বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ্টি নির্ণয় করা।
- 17. এরূপ একটি ত্রিভূজ অঙ্কিত কর, যাহার ভূমি 6 সেটিমিটার এবং বাছদ্বর
 যথাক্রমে 3 ও 5 সেটিমিটার। উহার উচ্চতা বথাসম্ভব সুক্ষভাবে পরিমাপ কর।
 - 18. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর:
 - (i) (6, 0), (6, 3), (6, 4), (6, 6), (6, 8) এবং (6, 10);
 - (ii) (-2, 7), (3, 7), (5, 7), (7, 7), (8, 7) এবং (10, 7).

উপরিস্থিত (i) এর বিন্দুগুলি সমরেথ এবং (ii) এর বিন্দুগুলিও সমরেথ; দেখাও যে, এই রেথাদ্বয় যথাক্রমে y-অক্ষরেথা ও x-অক্ষরেথার সমান্তরাল; রেথাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি নির্ণয় কর।

- 19. (3, 4), (4, 3), (5, 0), (-4, -3), (4, -3) বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর। মূলবিন্দু হইতে উহাদের দূরস্বগুলি মাপিয়া দেখাও যে, উহারা মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত একটি বুত্তের উপরে অবস্থিত।
- 20. A(5,2), B(9,2), C(5,8), D(9,8) এবং E(7,12) বিন্দুগুলি সংস্থাপন কর ; ABDEC পঞ্চভুজটির ক্ষেত্রফল, এবং AD ও BC এর ছেদবিন্দুর ভুজ-কোটি, নির্ণয় কর ।

বিবিধ প্রশ্নমালা II

l

- 1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, এই অভেদটির মধ্যে a এর পরিবর্ত্তে x এবং b এর পরিবর্ত্তে -y-z বসাইয়া (x-y-z) এর বর্গ নির্ণয় কর।
 - 2. নিম্নলিখিত স্ত্রেদ্য় প্রতিপন্ন কর:
 - (i) $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (a-b)^2\}$;
 - (ii) $4ab = (a+b)^2 (a-b)^2$.
 - 3. প্রমাণ কর যে,

$$(y-z)(y+z-x)+(z-x)(z+x-y)+(x-y)(x+y-z)=0.$$

$$(a-b)(a+1)(b+1) - a(b+1)^2 + b(a+1)^2 = (a-b)(a+b+2ab).$$

5.
$$a=x+m$$
, $b=y+m$, $c=z+m$ ইইলে,
দেখাও যে, $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

6.
$$s = a + b + c$$
 ইইলো,
প্রমাণ কর বে, $(as + bc)(bs + ac)(cs + ab) = (b + c)^2(c + a)^2(a + b)^2$.

7.
$$(m+n)^3 - 27p^3$$
 কে $m+n-3p$ দারা ভাগ কর।

8.
$$(9x^2-17xy+13y^2)^2$$
 ভাজ্য, $49y^2(2x+5y)^2$ ভাগশেষ এবং $3x^2-xy+16y^2$ ভাজ্ক হইলে, ভাগফল নির্ণয় কর।

9.
$$x+\frac{2}{y}=\frac{8}{3}$$
 এবং $y+\frac{3}{x}=\frac{9}{2}$ হইলে, $x^3y^3+\frac{216}{x^3y^3}$ এর মান

V10. দেখাও যে.

$$(x-y+z)^3 + (x+y-z)^3 + 6x(x-y+z)(x+y-z) = 8x^3$$
.

П

নিম্নলিখিত সমীকরণ কয়টি সমাধান কর:

1.
$$3(x-3)-2(x-2)+x-1=x+3+2(x+2)+3(x+1)$$
.
2. $(x-3)(x-5)=(x-2)(x-7)$.
3. $2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5)$.

$$(x-3)(x-5) = (x-2)(x-7)$$
.

3.
$$2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5)$$

নিম্লিখিত স্মীকরণ ক্যটি হইতে n এর মান নির্ণয় কর:

4.
$$(a+b)(b-x)=b(a-x)$$
.

5.
$$\frac{mnx-p}{mn} + \frac{npx-m}{np} + \frac{pmx-n}{pm} = \frac{2p}{mn} + \frac{2m}{np} + \frac{2n}{pm}$$

6.
$$\frac{2x+7}{7} - \frac{9x}{11} = \frac{x-11}{2}$$
. **7.** $4x - \frac{x-1}{2} = x + \frac{2x-2}{5} + 24$.

8.
$$x - \frac{x-2}{2} = 5\frac{3}{4} - \frac{x+10}{5} + \frac{x-2}{4}$$
.

9.
$$\frac{2x-1}{\sqrt{2}} + \frac{2x-2}{3} + \frac{4x-3}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

10.
$$\frac{2}{3}(x-1) - \frac{5}{6}(2x-3) + \frac{3}{4}(1-2x) = \frac{1}{12}(4x-5)$$
.

Ш

- প্র এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার সহিত 29 যোগ করিলে, যোগফল ঐ সংখ্যাটির চতুগুর্ণ ইইতে ৪ বেশী হয়।
- 2. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার এক-সপ্তমাংশ উহার এক-নবমাংশ অপেকা 4 বেশী।
- ✓ 3. এক ব্যক্তি তাঁহার মাসিক আয়ের দশভাগের একভাগ সঞ্চয় করেন এবং
 বাকী অংশের এক-তৃতীয়াংশৃ খুচরা দ্রব্যাদি ক্রয় করিতে খরচ করেন; মাসিক চল্তি
 খরচা বাবদ তাঁহার সমস্ত আয়ের পাঁচভাগের ত্ইভাগ খরচ করিয়া মাসশেষে তাঁহার নিকট
 300 টাকা খাকিলে, ঐ ব্যক্তির মাসিক আয় কত?
- ∠4. এক ব্যবসায়ী তাঁহার তহবিলের পাঁচভাগের তুইভাগ চিনির ব্যবসায়ে,
 তিনভাগের একভাগ পাটের ব্যবসায়ে এবং বাকী অংশের অর্দ্ধেক কাপড়ের ব্যবসায়ে
 খাটাইয়া তাঁহার নিকট £300 রহিন; ঐ ব্যবসায়ীর মোট মূলধন এবং তিনি কোন্
 ব্যবসায়ে কত খাটাইলেন, তাহা স্থির কর।
- 5. A এর বয়স B এর বয়সের দিগুণ এবং C এর বয়স অপেক্ষা A বৎসর বেশী; উহাদের তিনজনের বয়সের সমষ্টি 96 বৎসর হইলে, প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।
- 6. তুইটি থলির অর্থের সমষ্টি 54 পা. 12 শি., এবং একটি থলিতে যত সংখ্যক পাউণ্ড আছে, অক্টাতৈ তত সংখ্যক শিলিং আছে; প্রত্যেক থলির অর্থের পরিমাণ নির্ণিয় কর।
- 7. একথানি বর্গান্ধিত কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দু ক্য়টির অবস্থান নির্দেশ কর এবং দেখাও যে, উহারা একটি আয়তক্ষেত্রের চারিটি কৌণিক বিন্দু: $(1\frac{1}{2}, 2)$, $(-1\frac{1}{2}, 2)$, $(-1\frac{1}{2}, -2)$ এবং $(1\frac{1}{2}, -2)$; আরও দেখাও যে, উপরোক্ত আয়তক্ষেত্রটির প্রত্যেক কর্ণেরই দৈর্ঘ্য 5 একক।
- 8. O একটি নির্দিষ্ট স্থান ; A, O হইতে 20 মাইল উত্তরে, B, A হইতে 4 মাইল পূর্বের এবং C, B হইতে 17 মাইল দক্ষিণে অবস্থিত ; দেখাও যে, O এবং C এর দূরত্ব 5 মাইল ।
- 9. উপরোক্ত উদাহরণে, A, O হইতে 12 মাইল পশ্চিমে, P, A হইতে 5 মাইল উত্তরে, B, O হইতে 12 মাইল পূর্ণ্ধে এবং Q, B হইতে 5 মাইল দক্ষিণে অবস্থিত হইলে, প্রমাণ কর যে, P এবং Q এর দূরত্ব 26 মাইল ।
- 10. একথানি বর্গান্ধিত কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দু কয়টির অবস্থান নির্দ্দেশ কর এবং দেখাও যে, উহারা মূলবিন্দুগামী একটি স্বলরেখায় অবস্থিত : '

অষ্ট্ৰম অধ্যায়

জটিল যোগ ও বিয়োগ

(Harder Addition and Subtraction)

1. বেগগ

- 72. তৃতীয় অধ্যায়ে যোগের নিম্নলিখিত নিয়মাবলী ব্যাখ্যা করা হইয়াছে:
- (1) যোগফল নির্ণয় করিবার সমযে, যোজ্য রাশিগুলিকে যে কোন ক্রমে (orderএ) ই লওয়া যাইতে পারেণ। যথা,

$$a+b+c=b+c+a=c+a+b$$
 ; ইত্যাদি। [নিয়ম 31]

ইহাকে যোগের বিনিময়-নিয়ম (Commutative Law) বলে।

(2) যোগফল নির্ণয় করিবার সময়ে, যোজ্য রাশিগুলির কতক কতক এক এক ভাগে লইয়া, উহাদিগকে বিভিন্ন বিভাগে (groupএ) ভাগ করা যায়, এবং নির্দের যোগফল ঐ বিভাগসমূহের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। যথা,

a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c=b+(c+a), ইত্যাদি। [নিয়ম 32] ইহাকে যোগের **সংযোগ-নিয়ম** (Associative Law) বলে।

(3) সাংখ্য-সহগ(numerical co-efficient)-যুক্ত সদৃশপদস্হের যোগফলও একটি সদৃশপদ (like term) এবং পদগুলির সাংখ্য-সহগের বীজ্ঞাণিতীয় সমষ্টিই যোগফুলের সাংখ্য-সহগ হইয়া থাকে। যথা, 5x, -2x, 7x এবং 6x এর যোগফল 16x; কারণ, 5+(-2)+7+6=16.

ইহাকে যোগের পদ-সংযোগ প্রণালী (process of collecting terms) বলে। সদৃশ ও অসদৃশ পদযুক্ত মিশ্ররাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিবার সাধারণ প্রণালীও 33 নিয়মে ব্যাখ্যা করা ইইয়াছে।

উপরোক্ত নিয়মাবলী এ পর্যান্ত কেবলমাত্র সহজ সহজ ক্ষেত্রেই প্রযুক্ত হইয়াছে ; বর্ত্তমানে উহাদিগকে জটিল যোগফল নির্ণয় করিবার জন্ম প্রয়োগ করা হইবে।

73. ভপ্লাংশ-সহগ (Fractional co-efficient) বিশিষ্ট নিশ্র-ব্রাশিসমূহের খোঁপ্লফল নির্পন্থ: ভগ্নাংশ-সংগবিশিষ্ট মিশ্ররাশিসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হুইলে, প্রথমে প্রত্যেকটি রাশিকে আবশ্রুকমত সরল করিয়া তারপর রাশিগুলিকে, একটির নীচে একটি করিয়া, এরপভাবে স্থাপন কুরিতে হুইবে, যেন বিভিন্ন রাশির অন্তর্গত সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তস্তে বসে; তারপর সর্ব্বনিম্ন রাশিটির নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেকটি স্থস্তের পদগুলির সমষ্টি ঐ রেখার নীচে লিখিতে হইবে। যোগফলের সাংখ্য-সহগগুলিকে পাটীগণিতীয় নিয়মান্মসারে সরল করিয়া রাখিতে হইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দারা প্রক্রিয়া-প্রণালী পরিষ্কার করিয়া বুঝান হইতেছে:

উদা. 1. যোগ করঃ

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} - \frac{z}{7}, \frac{4}{10}y + \frac{12}{7}z + \frac{7}{3}x + 12a$$
 এবং $\frac{3}{7}z - \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y - 2b$.

প্রথম রাশি = $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{7}z$

বিভীগ রাশি = $\frac{7}{3}x - \frac{9}{6}y + \frac{12}{7}z + 12a$

ভূতীয় রাশি = $-\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y + \frac{3}{7}z$ — $-2b$

∴ যোগফল = $2x + \frac{1}{10}y + 2z + 12a - 2b$

[যোগফল, x এর সহগ = $\frac{1}{3} + \frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1 + \frac{7}{3} - 2}{10} = \frac{6}{3} = 2$;

 y এর সহগ = $\frac{1}{5} - \frac{9}{10} + \frac{4}{5} = \frac{2 - \frac{9}{10} + 8}{10} = \frac{10 - 9}{10} = \frac{1}{10}$;

 z এর সহগ = $-\frac{1}{7} + \frac{12}{7} + \frac{3}{7} = -\frac{1 + \frac{1}{7}2 + 3}{7} = -\frac{1 + \frac{1}{7}2 + 3}{7} = \frac{1}{7}4 = 2$;

 a এর সহগ = $0 + 12 + 0 = 12$:

৳ এব সহগ=0+0-2=-2.]
টীকা। লক্ষ্য করিবে বে, প্রথম ও তৃতীয় রাশিতে a-সংযুক্ত পদের স্থানদ্বাকে
শৃক্ত রাখা হইযাছে। স্থবিধার জন্ত ঐ স্থান তুইটিকে 0.a দ্বারাও পূর্ণ করা যাইত।

Term. 2.
$$\frac{6x-2y}{6} + \frac{4y-3z}{12} + \frac{2z-4x}{8}$$
, $\frac{4x-3y}{12} + \frac{6y-4z}{8} + \frac{3z-6x}{6}$

এবং $\frac{2x-4y}{8} + \frac{3y-2z}{6} + \frac{4z-6x}{12}$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

পদ-সংযোগ প্রণালীমতে প্রত্যেকটি রাশিকে সরল করিয়া পূর্ব্বপ্রদর্শিত নিয়মান্ত্রসারে যোগফল নির্ণয় করিতে হইবে। যথা,

তজ্ঞপ, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশিতে b-সংযুক্ত পদ তুইটির সহগদ্বয়কেও 0 বলিয়া ধরা যায়।

প্রথম রাশি =
$$(\frac{6}{6} - \frac{4}{8}) x + (-\frac{2}{6} + \frac{4}{13})y + (-\frac{3}{12} + \frac{2}{8})z$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) x + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) y + (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4})z = \frac{1}{2}x$$
ঘিতীয় রাশি = $(\frac{4}{12} - \frac{6}{6}) z + (-\frac{3}{12} + \frac{8}{8}) y + (-\frac{4}{8} + \frac{3}{6})z$

$$= (\frac{1}{3} - 1) x + (-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) y + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})z = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y$$
এবং তৃতীয় রাশি = $(\frac{2}{8} - \frac{6}{12})x + (-\frac{4}{8} + \frac{8}{6}) y + (-\frac{2}{6} + \frac{4}{12})z$

$$= (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) x + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) y + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3})z = -\frac{1}{4}x$$

$$(যোগফল = -\frac{1}{13}x + \frac{1}{2}y)$$

$$x$$
 এর সহগ = $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6-8-3}{13} = \frac{-5}{12}$, y এর সহগ = $0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$.

উদা. 3.
$$x = 98$$
, $y = 79$, $a = 5$ এবং $b = 4$ হইলে, $\frac{3}{7}x^3 + \frac{5}{11}y^5 - 20a^2 + \frac{49}{2}b^3$, $17a^2 - \frac{27}{2}b^3 - \frac{23}{7}x^3$,

$$-rac{y^5}{11}+rac{3}{2}\,b^3-3a^2$$
 এবং $-rac{23}{2}b^3-rac{4}{11}y^5+7a^2+rac{20}{7}\,x^3$ এর সমষ্টির

মান রির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে, রাশিগুলির যোগফল হইতেই নির্ণেয় মান অতি সহজে পাওয়া যায়।

প্ৰথম বাশি =
$$\frac{3}{7}x^3 + \frac{5}{11}y^5 - 20a^2 + \frac{4}{2}9b^3$$
দিতীয় বাশি = $-\frac{27}{7}x^3 + 17a^2 - \frac{27}{2}b^3$
তৃতীয় বাশি = $-\frac{1}{11}y^5 - 3a^2 + \frac{3}{2}b^3$
চতুৰ্থ বাশি = $\frac{27}{7}x^3 - \frac{4}{11}y^5 + 7a^2 - \frac{23}{3}b^3$
∴ বোগফল = $a^2 + b^3$
= $5^2 + 4^3 = 5 \times 5 + 4 \times 4 \times 4 = 25 + 64 = 89$.

[যোগফলে,

$$x^3$$
 এর সহগ = $\frac{4}{7} - \frac{23}{7} + 0 + \frac{20}{7} = \frac{3-23+0+20}{7} = \frac{9}{7} = 0$, y^5 এর সহগ = $\frac{5}{11} + 0 - \frac{1}{11} - \frac{4}{11} = \frac{5+0-1-4}{11} = \frac{0}{11} = 0$, a^2 এর সহগ = $-20+17-3+7=24-23=1$, b^3 এর সহগ = $\frac{49}{27} - \frac{27}{27} + \frac{3}{2} - \frac{23}{23} = \frac{49-27+3-23}{7} = \frac{52-50}{2} = \frac{2}{3} = 1$.

74. ্আক্রিক সহগবিশিষ্ট মিশ্ররাশির যোগফল নির্পন্ন : সহগগুলি কেবলমাত্র অঙ্ক না হইলে, উহাদিগকে আক্ষরিক সহগ (literal co-efficient) বলা হয়। যথা, ax, 6bx, (c+d-e)x,... প্রভৃতিতে x এর সহগ বথাক্রমে a, 6b, (c+d-e),... রলিয়া, উহাদের প্রত্যেককেই আক্ষরিক সহগ বলে।

x এর সম্পর্কে ধরিলে, ax, 6bx, (c+d-e)x,... প্রভৃতি পদগুলি কেবলমাত্র উহাদের সহ্গাতেই বিভিন্ন; এইরূপে ধরিয়া ax, 6bx, (c+d-e)x,... পদগুলিকেও সদৃশপদ (like terms) ধলা যায়।

ux এরং bx, x-সংযুক্ত তুইটি সদৃশপদ হইলে, স্পষ্টতঃই যোজ্যদ্যের **সদৃশ**। উহাদের যোগফল = ax + bx = (a + b)x.

অতএব, আক্রিক সহগবিশিষ্ট তুইটি সদৃশপদের যোগফল ও একটি সদৃশপদ, এবং যোগফলের আক্রিক সহগ, পদন্বয়ের আক্রিক সহগ তুইটির সমষ্টির সমান। 47 নিয়মের 3 অন্ত্রসিদ্ধান্ত হইতে বুঝা যায় যে, যোগের উপরোক্ত নিয়মটি তুই এর অধিক পদের বেলায়ও থাটিবে।

স্কুতরাং, সহগগুলি সাংখ্যই হউক বা আক্ষরিকই হউক, সদৃশপদসমূহের যোগের নিয়ম উভয়ক্ষেত্রেই এক।

ইহা হইতেই বুঝা যাও যে, মিশ্ররাশিসমূহের যোগের নিয়ম, উভয়প্রকার সহপ্রের ক্ষেত্রেই, এক থাকিবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিদারা যোগের উপরোক্ত নিয়মটি উত্তমরূপে বুঝা যাইবে।

छेला. 1. योश क्र :

$$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z$$
, $ax + by + cz$ and $x + y + z$.

মিশ্ররাশি তিনটিকে একটির নীচে একটি করিয়া এরূপে সাজাও, যেন উহাদের অন্তর্গত সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তম্ভে বসে; সর্ব্বনিমটির নীচে একটি রেখা টানিয়া প্রত্যেক স্তম্ভের সমষ্টি ঐ রেখার নীচে লিখিলেই নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যাইবে। যথা,

প্রথম রাশি =
$$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z$$

দিতীয় রাশি =
$$ax + by + cz$$

তৃতীয় রাশি =
$$x + y + z$$

অতএব, যোগফল = (a+b+c+1)x+(a+b+c+1)y+(a+b+c+1)z ্ যোগফণে,

$$x$$
 এর সহগ = $(b+c)+a+1=a+b+c+1$,

$$y$$
 এর সহগ = $(c+a)+b+1=a+b+c+1$,

$$z$$
 এর সহগ = $(a+b)+c+1=a+b+c+1$.

উদ্ধা. 2. বোগ কর ঃ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z, (b-c)y+(a-b)x+(c-a)z এবং (b-c)z+(c-a)x+(a-b)y.

x, y ও z এর সম্পর্কে ধরিলে, রাশি তিনটি সদৃশপদবিশিষ্ট। কাজেই, পূর্ববর্তী ওদাহরণে প্রদর্শিত নিয়মাস্ক্রসারে যোগফল নির্ণয় করা যাইবে। যথা,

প্ৰথম রাশি =
$$(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z$$

দ্বিতীয় রাশি = $(a-b)x + (b-c)y + (c-a)z$
দ্বিতীয় রাশি = $(c-a)x + (a-b)y + (b-c)z$

অতএক নির্ণেয় যোগফল = 0.

িযোগফলে,

$$x$$
 এর সহগ = $(b-c)+(c-a)+(a-b)=b-c+a-a+a-b=0$.
তথ্যপ, y এবং z এর সহগদ্ধাও প্রত্যেকে 0 .

উদা. 3. (ax-by)+(bx-cz), (ay-bx)+(by-cz) এবং (cz-ax)+(cz-by) এর যোগফল নির্ণয় কর।

x, y এবং z এর সম্পর্কে ধরিলে, রাশি তিনটি সদৃশপদবিশিষ্ট। কাজেই পূর্ব্ব-প্রদর্শিত নিয়মান্ত্রসারে যোগফল পাওয়া যাইবে। যথা,

প্রথম রাশি =
$$ax + bx - by - cz = (a+b)x - by - cz$$
দ্বিতীয় রাশি = $-bx + ay + by - cz = -bx + (a+b)y - cz$
তৃতীয় রাশি = $-ax - by + 2cz = -ax - by + 2cz$
তৃতীয় রাশি = $-ax - by + 2cz = -ax - by + 2cz$

[যোগফলে,

$$x$$
 এর সহগ = $(a+b)-b-a=a+b-b-a=0$, y এর সহগ = $-b+(a+b)-b=-b+a+b-b=a-b$, z এর সহগ = $-c-c+2c=0$.

- টীকা 1. বন্ধনীসংযুক্ত একটি মিশ্ররাশিকে সদৃশ মিশ্ররাশির সহিত (with like compound expressions) যোগ করিতে হইলে, বন্ধনী অপসারণ না করিয়া যোগ করাই স্থবিধাজনক (উদা. 2 দেখ)।
- **টীকা 2.** আবশ্যক হইলে উদা. 3 এ প্রদর্শিত নিয়মান্তবায়ী, বোজ্যরাশিসমূহকে • পদশংযোগ প্রণালী (process of collecting terms)" মতে সরল করিয়া লওয়া উচিত।

উদা. 4. $(a^2+b^2)x+(b^2+c^2)y+(c^2+a^2)z$, $(b^2+c^2)m+(c^2+a^2)n$, $(c^2+a^2)p+(a^2+b^2)q$ এবং $(a^2+b^2)j+(b^2+c^2)k$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

উপরোক্ত রাশিগুলি (b^2+c^2) , (c^2+a^2) এবং (a^2+b^2) এর সম্পর্কে সদৃশপদ-বিশিষ্ট । কাজেই, পূর্ববর্ত্তী নিয়মান্ত্র্যায়ী যোগফল পাওয়া যাইবে।

প্রথম রাশি =
$$x(a^2+b^2)+y(b^2+c^2)+z(c^2+a^2)$$
দিক্তীয় রাশি = $m(b^2+c^2)+n(c^2+a^2)$
তৃতীয় রাশি = $q(a^2+b^2)$ + $p(c^2+a^2)$
চতুর্থ রাশি = $j(a^2+b^2)+k(b^2+c^2)$

অতএব, যোগফল

$$= (x + q + j)(a^2 + b^2) + (y + m + k)(b^2 + c^2) + (z + n + p)(c^2 + a^2).$$

িযোগফলে,

$$(a^2+b^2)$$
 এর সহগ $=x+0+q+j=x+q+j$, (b^2+c^2) এর সহগ $=y+m+0+k=y+m+k$, এবং (c^2+a^2) এর সহগ $=z+n+p+0=z+n+p$.

প্রশ্নালা 35

যোগ কর:

- 1. $2x^2 5xy + y^2$, $4y^2 7x^2 5x + 2y$, $3xy 5 + y 6y^2$ and 3 4y + 3x.
- **2.** $abc + a^2b b^2c^2$, $5a^2b 12b^2c^2 3abc$, $8b^2c^2 4a^2b + 2abc$ at $2a^2b + 5b^2c^2$.
- 3. $m^3n^2 3mnp + 2m^2n^3 + 6m^2n^2$, $7mnp 10m^2n^2 + 5m^3n^2 m^2n^3$, $2m^2n^2 5mnp + 3m^2n^3$ (43° $-7m^3n^2 + m^2n^2 4m^2n^3$.
- ે. $12a^3b^2x 29b^3x^2a + 37x^3a^2b + 45a^2b^2x^2$, $25b^3x^2a 16a^2b^2x^2 18a^3b^2x 5x^3a^2b$, $32a^2b^2x^2 23x^3a^2b + 20a^3b^2x 28b^3x^2a$ વર $-9x^3a^2b 14a^3b^2x 60a^2b^2x^2 + 32b^3x^2a$.
- **6.** $25a^3b^3 8b^3c^3 23c^3a^3 + 19a^2b^2c^2$, $16c^3a^3 14a^2b^2c^2 19a^3b^3 12b^3c^3$, $27a^2b^2c^2 + 13a^3b^3 + 17c^3a^3 20b^3c^3$, $29b^3c^3 6a^2b^2c^2 21a^3b^3 13c^3a^3$ and $10b^3c^3 + 3a^3b^3 + 4c^3a^3 27a^2b^2c^2$.
- 7. $5a^3 18b^3 53c^3 25abc$, $38c^3 37a^3 7abc + 29b^3$, $26abc 17c^3 + 11b^3 + 43a^3$, $13b^3 18abc + 4a^3 + 21c^3$ 93° $-14a^3 + 12c^3 + 21abc 34b^3$.
 - 8. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}$, $\frac{3x}{4} + \frac{2y}{3} + \frac{3z}{5}$ and $\frac{3x}{4} + y + \frac{6z}{5}$.
 - 9. $\frac{3x}{5} + \frac{4y}{7} + \frac{10z}{11}$, $\frac{2y}{7} + \frac{4z}{11} + \frac{x}{5}$ and $\frac{8z}{11} + \frac{6x}{5} + \frac{8y}{7}$.

10.
$$\frac{4x^2y}{15} + \frac{4y^2z}{13} + \frac{5z^2x}{17}$$
, $\frac{7y^2z}{13} + \frac{6z^2x}{17} + \frac{7x^2y}{15}$ eqq. $\frac{6z^2x}{17} + \frac{4x^2y}{15} + \frac{2y^2z}{13}$.

11. $\frac{7a^2b}{19} + \frac{9b^2c}{17} + \frac{11ca^2}{21} + \frac{13ab^2}{35}$, $\frac{8b^2c}{17} + \frac{10c^2a}{21} + \frac{12a^2b}{19} + \frac{17bc^2}{35}$ eqq. $\frac{22ab^2}{35} + \frac{18bc^2}{35} + \frac{10ca^2}{21} + \frac{11ac^2}{21}$.

12. $\frac{2abc^2}{35} + \frac{3}{4}bca^2 + \frac{4}{7}b^2d$, $\frac{5}{9}cab^2 + \frac{1}{3}abc^2 + \frac{2}{11}a^2d$, $\frac{1}{4}bca^2 + \frac{4}{3}c^2d + \frac{4}{9}cab^2$ eqq. $\frac{9}{11}a^2d + \frac{3}{7}b^2d + \frac{9}{19}c^2d$.

13. $\frac{x-2y}{2} + \frac{2y-3z}{6} + \frac{3z-4x}{12}$, $\frac{2x-3y+3y-4z}{6} + \frac{z-2x}{2}$ eqq. $\frac{3x-4y}{6} + \frac{y-2z}{2} + \frac{2z-3x}{6}$ eqq. $\frac{3x-4y}{6} + \frac{y-2z}{2} + \frac{2z-3x}{6}$ eqq. $\frac{3x-4y+y-2z}{6} + \frac{3z-5x}{15}$ eqq. $\frac{3x-4y+y-2z}{6} + \frac{3z-5x}{15}$ eqq. $\frac{5x-7y}{35} + \frac{3c-4a}{6} + \frac{4a-2b}{ab}$, $\frac{2c-3a}{ab} + \frac{3a-4b}{ab} + \frac{4b-2c}{bc}$ eqq. $\frac{3a}{ab} + \frac{3b-4c}{bc} + \frac{4c-2a}{ab}$ eqq. $\frac{3a-3b}{ab} + \frac{3b-4c}{ab} + \frac{4c-2a}{ab}$ eqq. $\frac{3a-3b}{ab} + \frac{3b-4c}{ab} + \frac{4c-2a}{ab}$ eqq. $\frac{3a-3b}{ab} + \frac{3c-4a}{ab} + \frac{4a-2b}{ab}$ eqq. $\frac{3a-3b}{ab} + \frac{3c-4a}{ab} + \frac{3bz-ax}{ab}$ eqq. $\frac{3a-3b}{ab} + \frac{3c-5bz}{ab} + \frac{4cz-bx}{ab}$ eqq. $\frac{3a-2cy}{ab} + \frac{4ay-3cz}{abyz} + \frac{5az-cx}{abz}$ eqq. $\frac{3a-3b}{ab} + \frac{3c-5bz}{abz} + \frac{4cz-bx}{abz}$ eqq. $\frac{3a-3b}{ab} + \frac{3c-5bz}{abz} + \frac{4cz-bx}{abz}$ eqq. $\frac{3a-3b}{abx} + \frac{3c-5bz}{abz} + \frac{4cz-bx}{abz}$ eqq. $\frac{3a-3b}{abx} + \frac{3c-5bz}{abz} + \frac{4cz-bx}{abz}$ eqq. $\frac{3a-3b}{abx} + \frac{3c-5bz}{abz} + \frac{3$

- 19. $(35xy_{\xi}^{4} + 207ab^{4} 98bx^{4} 62ya^{4} 83abx^{2}y) + (68bx^{4} + 102ya^{4} 65xy^{4} 87ab^{4} + 53abx^{2}y) + (26abx^{2}y 75ab^{4} 25ya^{4} + 43bx^{4} + 53xy^{4}) + (28ya^{4} 29xy^{4} 65abx^{2}y + 45ab^{4} + 26bx^{4}) + (-89ab^{4} 43ya^{4} + 69abx^{2}y + 6xy^{4} 39bx^{4}).$
- 20. $(57a^4bx + 25b^4xy 143x^4ya + 37y^4ab 253a^2b^2x^2) + (63x^4ya 92y^4ab 63a^4bx + 73a^2b^2x^2 85b^4xy) + (35y^4ab + 132b^4xy + 82a^2b^2x^2 + 36x^4ya + 96a^4bx) + (-50a^2b^2x^2 78a^4bx + 27y^4ab 17x^4ya 52b^4xy) + (61x^4ya 20b^4xy + 148a^2b^2x^2 7y^4ab 12a^4bx).$

যোগ কব:

21.
$$(a^2+b^2)(m+n)+(a^2-b^2)(p+q)+c^2l$$
, $(a^2-b^2)(m+n)+(a^2+b^2)(p+q)+c^2m$ and $nc^2+l(a^2+b^2)+k(a^2-b^2)$.

22. $(x+y)^2a + (y+z)^2b + (z+x)^2c$, $(x-y)^2a + (y-z)^2b + (z-x)^2c$ 93. $2(x^2-y^2)a + 2(y^2-z^2)b + 2(z^2-x^2)c$.

23.
$$\sqrt[k]{ab(a-b)}$$
, $bc(b-c)$, $ca(c-a)$ এব° $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$. উহু অংশ নির্ণয় কব :

24.
$$a^2 + h^2 + c^2 - ah - ac - hc$$

$$= \{ \} - \{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2\}.$$
25. $(b+c)x^2 + (c+a)y^2 + (a+b)z^2 = \{ \} - (ax^2 + by^2 + cz^2).$

2. বিয়োগ

- 75. 35 নিযমে ব্যাপ্যা কবা হইষাছে যে, 'কোন একটি সরলবাশি a কে বিযোগ কবা' অথবা '-a সবলবাশিটিকে যোগ কবা', উভযই এক। যথা, x-a=x+(-a). তজ্ঞপ, 'কোন একটি মিশ্রবাশিকে বিযোগ কবা' অথবা 'ঐ বাশিব অস্তর্গত পদসমূহেব চিষ্ঠ পবিবর্ত্তন কবিয়া যোগ কবা' উভযই এক। একটি মিশ্রবাশিকে অপব একটি মিশ্রবাশি হইতে বিযোগ কবাব প্রণালী 38 নিযমে ব্যাপ্যা কবা হইষাছে। এ পর্যান্ত উক্ত নিযম সহজ সহজ ক্ষেত্রেই প্রযোগ কবা হইযাছে; বর্ত্তমানে উহা জটিলতব ক্ষেত্রে-প্রযোগ কবা হইবে।
- উদা. 1. (b+c)y+(c+a)z+(a+b)x হইতে ax+by+cz বিযোগ কব। x, y ও z এব সম্পর্কে সদৃশপদগুলি সাজাইয়া 38 নিষমে বর্ণিত প্রণালী অনুসাবে বিযোগফল নির্ণয়, কবা হইবে।

বিয়োজন =
$$(a + b)x + (b + c)y + (c + a)z$$

বিয়োজা = $ax + by + cz$
বিয়োগফল = $bx + cy + az$

বিয়োগফলে,

x এর সহগ = a+b-a=b. তজ্ঞপ, y ও z সহগদ্ম মথাক্রমে c ও a.

উদা. 2.
$$(b+c)^2yz + (c+a)^2zx + (a+b)^2xy$$
 ইইতে
$$(b-c)^2yz + (c-a)^2zx + (a-b)^2xy$$
 বিয়োগ কর। বিযোজন = $(b+c)^2yz + (c+a)^2zx + (a+b)^2xy$ বিয়োজা = $(b-c)^2yz + (c-a)^2zx + (a-b)^2xy$ বিয়োগফল = $4bcyz + 4cazx + 4abxy$

িবিয়োগফলে,

$$yz$$
 এর সহগ = $(b+c)^2-(b-c)^2=b^2+2bc+c^2-(b^2-2bc+c^2)$
= $b^2+2bc+c^2-b^2+2bc-c^2=4bc$.
তদ্ধপ, zx এবং xy এর সহগদ্ধ যথাক্রমে $4ca$ এবং $4ab$.

উদা. 3. নিম্নলিখিত সমতাটির শৃত্যস্থান প্রণ কর: (2a+3b)x+(3b+4c)y+(4c+2a)z = (a+b)x+(b+c)y+(c+a)z+1

স্পষ্টতঃই, (2a+3b)x+(3b+4c)y+(4c+2a)z হইতে $(a+b)x+(b+\partial)y+(c+a)z$ বিয়োগ করিলে উহ্ন রাশিটি পাওয়া ঘাইবে। প্রথম ও দ্বিতীয় উদাহরণে প্রদর্শিত শির্মামুসারে বিয়োগ করিয়া বিয়োগফল (a+2b)x+(2b+3c)y+(3c+a)z পাওয়া ঘাইবে।

উদা. 4.
$$3\frac{3}{4}ax + 2\frac{4}{9}by + 6\frac{8}{9}\frac{3}{9}z$$
 হইতে $2\cdot 5ax - 3\cdot 7by - 8\cdot 32z$ বিয়োগ কর। বিয়োজন $= 3\frac{3}{4}ax + 2\frac{4}{9}by + 6\frac{8}{9}\frac{3}{9}z$ বিয়োজ $= 2\cdot 5ax - 3\cdot 7by - 8\cdot 32z$ বিয়োগদল $= \frac{5}{4}ax + \frac{5}{9}by + \frac{8\cdot 3}{4}b^{2}z$

িবিয়োগফলে,

$$ax$$
 এর সহগ = $3\frac{3}{4} - 2 \cdot 5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4}$, by এর সহগ = $2\frac{4}{9} - (-3 \cdot 7) = 2\frac{4}{9} + 3 \cdot 7 = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}$

টাকা। যোগের মত বিয়োগেও ভগ্নাংশ-সহগগুলিকে পাটীগণিতীয় নিয়মান্ত্রসারে সরল করিতে হইবে।

িবন্ধনীসংযুক্ত মিশ্ররাশিসমূহরে বিয়োগফল নির্ণয়কালে বন্ধনী অপসারণ না করাই কর্ত্তব্য (1-3 উদাহরণ তিনটি দেখ)।]

প্রশ্নালা 36

বিয়োগ কর:

- 2. $\checkmark 5m^3nx 17n^3xm + 26x^3mn 13m^2n^2x 19n^2x^2m$ হইতে $3m^3nx$ $-10n^3xm + 14x^3mn 20m^2n^2x 27n^2x^2m$.
- 3. $48x^6 31x^5y 7x^4y^2 39x^3y^3 41x^2y^4 + 65xy^5 53y^6$ হইতে $37x^6 28x^5y + 43x^4y^2 54x^3y^3 67x^2y^4 + 84xy^5 93y^6$.
- $4. \int 3ax^4 5a^2x^3 + 6yzbc^2 7y^2zbc + 8yz^2bc$ হইতে $-2yzbc^2 + 4yz^2bc 2ax^4 9y^2zbc + 3a^2x^3$.
- *5. $25 16x^3y^5z 17xy^3z^5 + 21x^3z^5y 6x^2y^2z^2 + 8xyz^4$ * $25 16x^3y^5z + 27 + 11xyz^4 12x^2y^2z^2 19xy^3z^5$.
- 6. $\sqrt{29}x^4y^3z^2 37x^3y^4z^2 + 54x^2y^3z^4 45x^3y^2z^4 67x^4y^2z^3 + 89x^2y^4z^3$ 250 $43x^3y^4z^2 23x^3y^2z^4 + 25x^4y^3z^2 66x^2y^4z^3 + 26x^2y^3z^4 + 35x^4y^2z^3$.
- 8. $3x^2-5xy+6y^2+7yz$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $-x^2-y^2-yz$ হইবে ?
- 9. $-5x^3 + 13x^2y^2 a^2bx + 5bxy^2 + 7xyab$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $x^3 + x^2y^2 + a^2bx 2bxy^2 2xyab$ হইবে ?
- 10. $5x^4-6x^3y+7x^2y^2-8xy^3-19y^4$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $3x^4+5x^2y^2-12y^4$ হঁইবে ?
- 11. $-5x^5 3x^4y + 6x^3y^2 + 17x^2y^3 + 13xy^4 + 21y^5$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল $-7x^5 4x^3y^2 + 13x^2y^3 + 29y^5$ হইবে ?

 $12.^{9}$ $2a^2+5ab-6b^2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল a^2+2b^2 হইবে ?

i.

13. $5x^2 - 6xy + 4y^2 - 8x + 10y + 15$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 5y + 6$ হইবে ?

 $14.^{57}3a^3-4a^2b+5ab^2-8b^3$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $a^3-2ab^2+7b^3$ হইবে ?

- 15. $-8x^3y + 4x^2y^2 11xy^3 + 12x^2 13y + 27$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $4x^3y 3x^2y^2 11xy^3 + 20x^2 30y + 56$ হইবে ?
- 16. কোন্ রাশিমালা হইতে $3a^2 7ab 8bc + 9b^2$ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল $2a^2 + 3ab + 3bc + 2b^2$ হইবে ?
- 17. কোন্ রাশিমালা হইতে $-3x^3 + 5y^2 7xy + 8x 9$ বিয়োগ করিলে বিযোগফল $x^3 8y^2 + 2xy 11x + 7$ হইবে ?
- 18. কোন্ রাশিমালা হইতে $-7a^3 8b^2c 13ac^2 + 3b^3$ বিয়োগ করিলে বিযোগফল $4a^3 3b^2c + 7ac^2 8b^3$ হইবে ?
- 19. কোন্ রাশিমালা হইতে $21x^3 37xy^2 + 42y^3 18x^2 + 19xy 39$ বিয়োগ করিলে বিযোগফল $-25x^3 + 15xy^2 87y^3 + 7x^2 43xy + 24$ হইবে ?

বিয়োগ কর:

- 20. $\frac{13}{24}x + \frac{213}{166}y + \frac{201}{19}z$ হইতে $\frac{1}{12}x + \frac{97}{83}y + \frac{107}{57}z$.
- 21. $-\frac{1}{20}ax + \frac{3}{7}y + \dot{8}mz$ হইতে $-\dot{3}5ax + \frac{1}{5}\frac{3}{6}y + \dot{1}\dot{7}mz$.
- 22. $32^{\circ}39c^{\circ}by + 2^{\circ}37a^{\circ}cx 62^{\circ}73c^{\circ}z$ হইতে

$$1.17a^2cx + 2.31c^2by - 63.18c^3z.$$

23.
$$3 \cdot 3lx + \frac{3}{4} \frac{5}{4} a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{5}{4}} y - \frac{3}{7} nz - \frac{8}{23} b^{\frac{3}{6}} c^{\frac{15}{2}} z - 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x$$
 $\gtrsim 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} x = 2 \cdot 5my - \frac{6}{5} \frac{5}{8} a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{$

24. নিম্লিখিত সমতাগুলির উহু অংশ নির্ণয় কর:

(i)
$$3.2x + 5.3y + 5.4z - ($$
 $) = 2x + 3y + 6z;$

(ii)
$$17x + 23y + \frac{121}{21}z = 52x - 1.7y + \frac{40}{7}z - ($$
);

(iii)
$$1.2a + 15.52l^2 + 16m^2 + 14p$$

= () $-(2.2a + 3.52l^2 + 4m^2 + 16p)$.

বিয়োগ কর:

25.
$$bc(b+c) + ca(c+a)ab(a+b)$$
 হৈছে $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$.

26.
$$bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$$
 হৈছে $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$.

27.
$$2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
 হৈছে $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$.

28. $(1+a)^2x+(1+b)^2y+(1+c)^2z$ হৈছে $(1+a+a^2)x+(1+b+b^2)y+(1+c+c^2)z$.

- 29. এক ব্যক্তি এক বৎসরে মাসিক (ax+by)+cz) সংখ্যক টাকা উপার্জ্জন করিয়া সেই বৎসরেই (10ax+13cz) সংখ্যক টাকা খরচ করিলেন। বৎসরের শেষে তাঁহার হাজে ক্লত টাকা থাকিবে ?
- 30. (50x+71y+18z) সংখ্যক ভেড়া হইতে (13x+12y) সংখ্যক এবং (15y+8z) সংখ্যক ভেড়া বিক্রীত হইল এবং (3z+23x) সংখ্যক ভেড়া মরিয়া গেল। কসগুলি ভেড়া অবশিষ্ট রহিল ?

নবম অধ্যায়

জটিল গুণন

(Harder Multiplication)

ঁ 76. তৃতীয় অধ্যায়ে গুণনের নিম্নলিথিত নিয়মগুলি ব্যাখ্যা করা হইয়াছে :

(1)
$$a \times b = b \times a$$
; [नियम 42]

abc=bca=cab, ইত্যাদি; [নিয়ম 43]

অর্থাৎ, উৎপাদকগুলিকে যে কোন ক্রমেই লওয়া হউক না কৈন, গুণফল সকল ক্ষেত্রেই এক থাকে;

ইহাকে গুণনের বিনিময় নিয়ম (Commutative Law) বলে।

(2) $(ab) \times c = a \times (bc) = b \times (ac) = a \times b \times c$; [ARN 43]

অর্থাৎ, গুণফলের উৎপাদকগুলিকে যে কোন রকনে সভ্যবদ্ধ (grouped together) করা স্বায়।

ইহাকে গুণনের **সংযোগ নিয়ম** (Associative Law) বলৈ।

(3) $a(b \div c) = ab + ac$. [মিয়ম 47] ইহাকে শুণনেঁর বিচেছদ নিয়ম (Distributive Law) বলে। (4) m এবং n ছুইটি অথও ধনরাশি (positive integer) হইলে, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ইহাকে গুণনের সূচক নিয়ম (Index Law) বলে।

বর্ত্তমানে, মিশ্ররাশির (compound expression এর) গুণনের নিয়ম এবং জটিল গুণনের উদাহরণ দেওয়া যাইতেছে।

77. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd.$$

, c+d এর পরিবর্তে x ধরিয়া,

$$(a+b)(c+d) = (a+b)x = x(a+b) = xa+xb$$
 [নিয়ম 47]
= $ax + bx = a(c+d) + b(c+d)$
= $ac + ad + bc + hd$.

জামুসি. | খেছেতু,
$$a-b=a+(-b)$$
 এবং $c-d=c+(-d)$,
ভাতএব, $(a-b)(c-d)=\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$
 $=ac+a(-d)+(-b)c+(-b)(-d)$
 $=ac-ad-bc+bd$.

78. প্রসাপ করিতে হইবে যে,

$$(a+b+c+d+...)(m+n+p+q+...)$$

= $a(m+n+p+q+...)+b(m+n+p+q+...)$
+ $c(m+n+p+q+...)+d(m+n+p+q+...)+...$ $\geq tother$

 $^{ullet}m+n+p+q+\cdots$ এর পরিবর্তে x লিখিয়া,

$$(a+b+c+d+\cdots)(m+n+p+q+\cdots) = (a+b+c+d+\cdots)x$$

$$= ax + bx + cx + dx + \cdots$$

$$=a(m+n+p+q+\cdots)+b(m+n+p+q+\cdots)+c(m+n+p+q+\cdots)+d(m+n+p+q+\cdots)+\cdots$$
 ইত্যাদি।

এইরূপে, তুইটি বহুপদরাশির (multinomial এর) গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, বাশিদ্বয়ের যে কোনটির প্রত্যেকটি পদ-(term) কে অপর্টির প্রত্যেকটি পদ দারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি লইতে হয়।

উপা. 1.
$$2a+3b$$
 কে $4a+5b$ বাবা গুণ কর।
$$(4a+5b)(2a+3b) = (4a)(2a)+(4a)(3b)+(5b)(2a)+(5b)(3b)$$

$$= 8a^2+12ab+10ab+15b^2$$

$$= 8a^2+22ab+15b^2.$$

উপা. 2.
$$3x - 7y$$
 কে $2x - 5y$ দারা গুণ কর। $(2x - 5y)(3x - 7y) = (2x)(3x) + (2x)(-7y) + (-5y)(3x) + (-5y)(-7y)$
 $= 6x^2 - 14xy - 15xy + 35y^2$
 $= 6x^2 - 29xy + 35y^2$.

প্রশ্নমালা 37

গুণ কর:

- 1. 2a + 3b ($\Phi \cdot a + b$ π) 1 2. 2m 3n ($\Phi \cdot m n$ π)
- 3. a+b+c ($\overline{\Phi}$ a+b+c $\overline{\Psi}$) $\overline{\Lambda}$ | 4. a-b+c ($\overline{\Phi}$ a-b+c $\overline{\Pi}$) |
- 5. a-b-c কে a-b-c হারা। 6. a-2b-3c কে 2a-b-c হারা।
- 7. 2x 3y 4z (x y z y = 1)
- 8. -5x + 2a 3b (-5x + 2a a + b -5x + 2a a + b
- 9. $x^2 + y^2 + z^2$ কে x y z দারা।
- 10. xy + yz + zx কে xy yz zx হারা।
- 79. কোন রাশিমালাকে ভদন্তর্গত কোন একটি অক্ষরের শক্তির অপ্তক্রম (descending order) বা উদ্ধিক্রম (ascending order) অনুসাত্রে সাজানঃ রাশিমালার পদসমূহ, উহাদের অন্তর্গত যে কোন একই অক্ষরের বিভিন্ন শক্তিবিশিষ্ট, হইলে, যদি ঐ পদগুলিকে এরূপে সাজান যায় যে, নির্দিষ্ট অক্ষরটির সর্ব্বোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদটি প্রথম, তল্লিম-শক্তিবিশিষ্ট পদটি প্রথম পদের ডা'নদিকে, তরিমুশক্তিবিশিষ্ট পদটি দ্বিতীয় পদের ডা'নদিকে, ইত্যাদি, এবং এ অক্ষরবিবর্জ্জিত পদটি অর্থাৎ প্রবকটি (constant). সর্বশেষে লিখিত হয়, তাহা হইলে উক্ত রাশিমালাকে নির্দিষ্ট অক্ষরটির শক্তির **অধঃক্রেম অনুসারে সাজান হইল, বলা হয়। ইহার ঠিক বিপরীতভাবে স্বাজাইলে (অর্থাৎ** প্রথমে ফ্রবকটি, তৎপরে সর্ব্ধনিম্নশক্তিবিশিষ্ট পদটি, ইত্যাদি, এবং সর্ব্ধশেষে সর্ব্বোচ্চ-শক্তিবিশিষ্ট পদটি লিখিলে রাশিমালাকে নির্দিষ্ট অক্ষরটির শক্তির উদ্ধিক্তম অমুসারে সাজান হইল, বলা হয়। যথা, $a^5x^3+3a^4xy-5a^3x^6y^2+4a^2x^4y^3-2ax^2y^4$ $+x^5y^5$ রাশিমালাটি a এর শক্তির অধ্যক্তম অমুসীরে, অথবা y এর শক্তির উর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজান রহিয়াছে। কিন্ত ইহাকে $-5a^3x^6y^2+x^5y^5+4a^2x^4y^3+a^5x^3$ • $-2ax^2y^4+3a^4xy$ এইরূপে লিখিলে, রাশিমালাটিকে x এর শক্তির অধঃক্রম অমুসারে \cdot সাজান হইয়াছে, বলিতে হইবে।
- 80. কোন বৃশ্নিমালাকে অন্ত একটি রাশিমালা দারা গুণ করিতে হইলে, গুণ্য-রাশি এবং গুণকরাশিন অন্তর্গত কোন একটি সাধারণ অক্ষরের শক্তির, হয় উৰ্দ্ধক্রম, না

হয় অধঃক্রম অন্তুসারে উভয়কেই সাজাইয়া নিম্নলিথিত উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়মান্ত্যায়ী গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করিতে হয়।

উপা. 1.
$$a^2-b^2-ab$$
 কে $ab-b^2+a^2$ দারা গুণ কর।
গুণ্য = a^2-ab-b^2
গুণ্ক $\pm a^2+ab-b^2$
 a^2 দারা গুণন = $a^4-a^3b-a^2b^2$
 $+ab$ দারা গুণন = $+a^3b-a^2b^2-ab^3$
 $-b^2$ দারা গুণন = $-a^2b^2+ab^3+b^4$
সতএব, নির্ণেয় গুণফল = a^4 $-3a^2b^2$ $+b^4$

টীকা। উপরোক্ত উদাহরণের প্রক্রিযা-বিশ্লেষণ ঃ

গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই a এর অধ্যক্রম অনুসারে সাজাইয়া গুণ্যের নীচে গুণককে লিথা হইয়াছে এবং গুণকের নীচে একটি রেখা টানা হইয়াছে; তৎপরে বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া, গুণকের প্রত্যেকটি পদ দ্বারা গুণ্যকে গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলগুলিকে সারি করিয়া একটির নীচে একটি একপে লিখা হইয়াছে যে, বিভিন্ন সারির সদৃশপদগুলি ঠিক একই স্তম্ভে বসে। সর্ব্বনিম্ন সারির নীচে একটি রেখা টানিয়া বিভিন্ন স্তম্ভের বীজগণিতীয় যোগফলগুলি উহার নীচে লিখিয়াই নির্ণেয় গুণফল পাওয়া গিয়াছে।

উদা. 2.
$$2a^2-3x^2-5ax$$
 কে $-3x^2+2a^2+5ax$ দারা গুণ কর। গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই x এর শক্তির উদ্ধর্কন অন্সারে সাজাইলে, . গুণ্য $=2a^2-5ax-3x^2$ গুণ্য $=2a^2+5ax-3x^2$

$$2a^2$$
 বারা গুণন $= 4a^4 - 10a^3x - 6a^2x^2$ $+ 5ax$ বারা গুণন $= +10a^3x - 25a^2x^2 - 15ax^3$ $-3x^2$ বারা গুণন $= -6a^2x^2 + 15ax^3 + 9x^4$. . নির্ণেয় গুণফল $= 4a^4$ $-37a^2x^2$ $+9x^4$

1. 3. $2a^3b-5ab^3-a^4+3a^2b^2$ কে $2a^4-3a^3b+4ab^3-5a^2b^2$ ছারা গুণ কর।

[গুণ্য এবং গুণক উভয়কেই a এর অধ্যক্রম অনুসারে সাজাইয়া গুণ্লকর ।]

প্রণা
$$-a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 - 5ab^3$$
প্রণাক : $2a^4 - 3a^3b - 5a^2b^2 + 4ab^3$
 $-2a^\circ + 4a^7b + 6a^6b^2 - 10a^5b^3$
 $+3a^7b - 6a^6b^2 - 9a^5b^3 + 15a^4b^4$
 $+5a^6b^2 - 10a^5b^3 - 15a^4b^4 + 25a^3b^5$
 $-4a^5b^3 + 8a^4b^4 + 12a^3b^5 - 20a^2b^6$
নির্ণেয় প্রণাকল = $-2a^8 + 7a^7b + 5a^6b^2 - 33a^5b^3 + 8a^4b^4 + 37a^3b^5 - 20a^2b^6$

টীকা। উপরোক্ত উদাহরনে, গুণ্য ও গুণক উভয়ই চতুর্থমানবিশিষ্ট সমমাত্র রাশি এবং গুণফলও অষ্টমমানবিশিষ্ট সমমাত্র রাশি। তজপ দেখান যাইতে পারে যে, গুণ্য ও গুণক উভয়ই সমমাত্র রাশি হইলে গুণফলও সমমাত্র রাশি হইবে, এবং গুণফলের মান (degree of the product) রাশিষ্যের মানের সমষ্টি হইবে। গুণ্য ও গুণক উভয়ই সমমাত্র রাশি হইলে, গুণফলের শুদ্ধি পরীক্ষা করার পক্ষে এই নিয়মটি অত্যাবশ্রক; কারণ, গুণফল সমমাত্র না হইলেই ব্ঝিতে হইবে যে গুণনে ভুল হইয়াছে।

উপা. 4.
$$mx^2 - nx - p$$
 কে $x^2 + px - 1$ হারা কর।
তথা $= mx^2 - nx - p$
তথা $= x^2 + px - 1$

$$mx^4 - nx^3 - px^2$$

$$+ pmx^3 - pnx^2 - p^2x$$

$$- mx^2 + nx + p$$
তথাকল $= mx^4 - (n - pm)x^3 - (p + pn + m)x^2 + (n - p^2)x + p$

উদা. 5. $\frac{11}{5}ax^3 + \frac{7}{15}b^2x^2y + 3\cdot 5cxy^2 + 1\cdot 05g^2y^3$ কে $2lx^2 + 3\cdot 5mxy + 1\cdot 5ny^2$ দারা ওণ কর।

িটীকা। গুণ্য এবং গুণকে সাধারণ ও দশমিক এই উভয়বিধ ভগ্নাংশ-সহগই বর্দ্তনান থাকিলে, সকল ভগ্নাংশগুলিকেই একজাতীয় ভ্গাংশে পরিণত করিয়া গুণনক্রিয়া সম্পন্ন করাই স্থবিধাজনক। বর্ত্তনানক্ষেত্রে, 📆 কে দশমিকে গরিবর্ত্তিত করিলে, দশমিক বিন্দুর পর অনেকগুলি অঙ্ক আসিবে বল্লিয়া সকল ভগ্নাংশগুলিকেই সাধারণ ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তিত করা হইল।]

প্রা =
$$\frac{1}{5}$$
 $ax^3 + \frac{7}{16}b^2x^2y + \frac{7}{2}cxy^2 + \frac{2}{16}g^2y^3$
প্রবৃত্ত = $2lx^2 + \frac{7}{2}mxy + \frac{3}{2}ny^2$
 $\frac{2^3}{5}alx^5 + \frac{1}{16}b^2lx^4y + 7clx^3y^2 + \frac{2}{16}g^2lx^2y^3 + \frac{7}{16}amx^4y + \frac{4}{5}\frac{3}{6}b^2mx^3y^2 + \frac{2}{5}\frac{1}{6}b^2nx^2y^3 + \frac{1}{40}g^2mxy^4 + \frac{6}{16}anx^3y^2 + \frac{2}{5}\frac{1}{6}b^2nx^2y^3 + \frac{21}{4}cnxy^4 + \frac{6}{3}g^2ny^5$

প্রবৃত্ত = $\frac{2^2}{5}alx^5 + (\frac{1}{16}b^2l + \frac{7}{10}am)x^4y + (7cl + \frac{4}{3}\frac{3}{6}b^2m + \frac{3}{10}an)x^3y^2 + (\frac{2}{16}g^2l + \frac{4}{4}cm + \frac{2}{3}\frac{1}{6}b^2n)x^2y^3 + (\frac{1}{4}\frac{7}{10}g^2me + \frac{2}{4}lcn)xy^4 + \frac{6}{10}g^2ny^5$
3.10 1.6. প্রবৃত্ত কর : $a^2 - ab + b^2$, $a^2 + ab + b^2$ এবং $a^4 - a^4b^2 + b^4$.

(i) $a^2 - ab + b^2$

$$a^2 + ab + b^2$$

$$a^4 - a^3b + a^2b^2$$

$$+ a^3b - a^2b^2 + ab^3$$

$$+ a^2b^2 - ab^3 + b^4$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4$$

$$a^4 + a^2b^2 + a^4b^4$$

$$a^8 + \frac{9}{9}b^2 + a^4b^4$$

$$- a^9b^2 - a^4b^4 - a^2b^6$$

$$+ a^4b^4 + a^4b^4 + b^8$$

NO এব, নির্বেষ্ প্রবৃত্ত = $a^6 + a^4b^4 + b^8$.

• "চীকা। তিন বা তদধিক রাশির পর পর গুণনের ফলে বৈ রাশিটি পাওয়া যায়, তাহাকে ঐ রাশিগুলির **ধারাবাহিক গুণফল** (continued product) বলে। কতক-গুলি রাশির ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের যে কোন তুইটির গুণফলকে অক্ত একটি দ্বারা গুণ করিয়া, লব্ধ গুণফলকে আবার অপর একটি দ্বারা, ইত্যাদিক্রমে, পর পর গুণ করিয়া যাইতে হয়।

পারাবাহিক গুণনে, গুণ্য রাশিগুলিকে স্থবিধামত ক্রমান্থ্যারে সাজাইয়া গুণ করিতে হয়।

81. 'সহগ বিচ্ছিন্ন করণ' প্রণাকৃণী (Method of detached co-efficients) ঃ ধনি ভুণা এবং গুণক রাশিদ্বরের পদসমূহ একই অক্ষরের বিভিন্ন শক্তিবিশিষ্ট হয়, অথবা উভয়ই তুইটি অক্ষরের সমমাত্র রাশি হয়, ভাহা হইলে পদগুলির আক্ষরিকাংশ হইতে সাংখ্য-সহগগুলিকে বিচ্ছিন্ন করিয়া এবং যথাস্থানে স্থান্ধন করিয়া এ

সহগগুলি দ্বারাই গুণনক্রিয়া সংক্ষেপে ও সহজে সম্পন্ন করা যায়। রাশিদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত সাধারণ অক্ষরটির কোন এক শক্তিবিশিষ্ট পদ বর্ত্তমান না থাকিলে, ঐ পদটির সহগ () বলিয়া ধরিতে হয়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দারা প্রক্রিয়া-প্রণালী স্থস্পষ্টরূপে বুঝিতে পারা যাইবে।

উপা. 1. গুণ কর:
$$x^2-4x+4$$
 কে $x-2$ হারা।
$$x^2-4x+4$$

$$x-2$$

$$1-4+4$$

$$-2+8-8$$

... নিৰ্ণেয় গুণফল = $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

উদা. 2. গুণ কর:
$$3x^3 - 2x + 4$$
 কে $x + 5$ ছারা। $3x^3 + 0.x^2 - 2x + 4$ $\frac{x + 5}{3 + 0} - \frac{1}{2 + 4}$ $\frac{15}{3 + 0} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

.:. নির্বের গুণফল = $3x^4 + 15x^3 - 2x^2 - 6x + 20$.

প্রশালা 38

ত্রণ কর :

```
14. 1+2x+x^4+2x^3+3x^2 (\sqrt{2} 1+x^2-2x \sqrt{2}
        15. b^4 + a^2b^2 + a^3b + a^4 + ab^3 (a^2b^2 - a^3b + b^4 - ab^3 + a^4 and )
        16. x^2 - xy - xz + y^2 - yz + z^2 (x + y + z वीज)
        17. <sub>1</sub>a<sup>2</sup> + b<sup>2</sup> + c<sup>2</sup> - bc - ca →ab কে a+b+c হারা।
        18. 5a^2b+4b^3+2a^3-3ab^2 কে 2ab^2-3a^2b+a^3-5b^3 ছারা।
        19. ax^2 + bx - c (\Phi px - q \pi \pi) | 20. mx^2 - nx - r (\Phi nx - r \pi) \pi
        21. ax^2 - bx + c (x^2 - bx - c )
        •23× px² - (q - r)x + s কে mx² - nx - s বারা।
       24. \int ax^2 + 2hxy + by^2 কে lx + my + n घोता।
       25. 2x^2 + m^2xy + n^2y^2 + 2g^2x + 2f^2y + c^2 কে px^2 + qx + r বারা।
     -26: \sqrt[3]{\frac{7}{9}}x^3 + \frac{2}{6}x^2y + \frac{3}{6}xy^2 + \frac{3}{7}y^3 কে \frac{9}{7}x^2 + \frac{5}{3}xy + \frac{7}{9}y^2 হারা।
       27. \chi \frac{9}{7}x^4 + \frac{5}{7}x^3y + \frac{9}{7}x^2y^2 + \frac{1}{7}xy^3 + \frac{1}{7}y^4 কে \frac{7}{9}x^2 + \frac{7}{11}y^2 ছারা।
       28.115x^5 + 23x^9 + 123x^4 + 325x^2 + 5 কে 27x^3 + 139x + 9 ছারা।
       29. 0.057a^3 + 1.025a^2b + 2.021ab^2 + 2.8b^3 (0.07a^2 + 2ab + 9b^2 and 1
       30. 2.3x^3 + 3.15x^2y + 1.17xy^2 + 2.07y^3 CF lx^2 + mxy + ny^2 Fig. 1
       31. \sqrt[4]{\frac{5}{3}}ax^3 + \frac{7}{3}bx^2y + \frac{9}{4}cxy^2 + 2dy^3 কে \frac{2}{5}ax^2 - \frac{3}{7}bxy + \frac{4}{9}cy^2 দাবা।
       32. \sqrt{1.5am^3-1.2bm^2n+1.3cmn^2-1.6dn^3}
                                          1'5am3 + 1'2bm2n + 1'3cmn2 + 1'6dn3 वाता।
       ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর:
    • 33. 2a+3b. 2a-3b এবং 4a²+9b² এর।
       34. x^8 + 6by, 5ax - 6by এবং 25a^2x^2 + 36b^2y^2 এর। 35. x^8 + x^4y^4 + y^8, x^2 + y^2, x + y এবং x - y এর।
       36. x^2 + 3xy + 5y^2, x^2 - 3xy + 5y^2 and x^4 - x^2y^2 + 25y^4 and y^2 + 25y^4
       37. a^{12}x^{12} + \dot{a}^6b^6x^6y^6 + b^{12}y^{12}.
                                                                       a^4x^4 + a^2b^2x^2y^2 + b^4y^4
ax + by এবং ax - by এর ।
        m ও \dot{n} এর সকল মানের জন্মই, a^m \times a^n = a^{m+n} ধরিয়া লইয়া, প্রমাণ কর যে:
       38. a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a. \left[ a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a \right] 39. x^{\frac{1}{8}} \times x^{\frac{2}{39}} = x^{\frac{1}{39}}
       40. a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a. \left[ a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} = a \right]
       41. a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}. \left[ \left( a^{\frac{1}{4}} \right)^4 = a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = a^1 = a \right]
                                                                                                  a^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{a}
```

42.
$$x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{x^2}$$
. 43. $= \sqrt[4]{z^3}$. 44. $c^{\frac{3}{5}} \times c^{\frac{4}{5}} \times c^{\frac{8}{5}} = c^3$. 45. $y^2 \times y^{\frac{3}{2}} \times y^{\frac{7}{2}} = y^7$. 46. $x^{-2} \times x^5 = x^3$. $[x^{-2} \times x = x^{-2+5} = x^3]$. 47. $z^{\frac{3}{2}} \times z^{-\frac{1}{2}} = z$. 48. $a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{a^{-3}}$.

$$\begin{bmatrix} \left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 = a^{-\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}} = a^{-3} ; & \therefore & a^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{a^{-3}} \end{bmatrix}$$
50. $x^{-\frac{5}{3}} \times x^{-\frac{4}{3}} = x^{-3}$.

49.
$$b^{-\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{b^{-5}}$$
.

$$50. \quad x^{-\frac{3}{3}} \times x^{-\frac{5}{3}} = x^{-3}$$

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণফল লিখঃ

51.
$$-3x^{\frac{3}{2}}$$
 and $2x^{\frac{3}{2}}$.

52. $5y$
54. $-5xy^{\frac{3}{4}}$ and $-3x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}$.

58. $2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ and $3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.

59. $5x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$ and $-3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.

53.
$$2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$$
 and $3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}$.

56. $\frac{3}{5}a^{\frac{3}{5}}y^{3}$ and $-\frac{5}{3}a^{\frac{3}{5}}y^{-4}$.

57. $4a^{-2}b^{3}$ and $-\frac{3}{4}a^{3}b^{-5}$.

58. $-5x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{5}}z^{\frac{4}{5}}$ and $-3x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{2}{5}}z^{\frac{4}{5}}$.

55.
$$4a^{-2}b^3$$
 এবং $-\frac{3}{4}a^3b^{-5}$. 56. $\frac{1}{8}a^3y^{-5}z^{-\frac{1}{3}}$. 57. $-4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{4}}$ এবং $-3a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{5}{4}}$. 58. $-5x^{\frac{3}{3}}y^{\frac{3}{5}}z^{\frac{4}{3}}$ এবং $-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}z^{-\frac{1}{3}}$.

59.
$$-6a^{5}b^{-2}$$
 $-6a^{5}b^{-2}$ $-6a^{5}b^{-4}b^{-4}$ $-6a^{5}x^{-\frac{3}{5}}y^{-\frac{6}{5}}$.

জ্ঞান কর:
61.
$$a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$$
 কে $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ হারা।
62. $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$ কে $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$ হারা।

61.
$$a^2 + b^2$$
 বে a

63. $3x^3 - 4y^{\frac{1}{3}}$ কে $3x^{\frac{2}{3}} + 4y^{\frac{1}{3}}$ হারা।

63.
$$3x^3 - 4y$$
 $4x^3 + 6x^3 + 6x^3 = 6x^3 - 6x^3 + 6x^3 = 6x^3 = 6x^3 + 6x^3 = 6x^3 + 6x^3 = 6x^3 = 6x^3 + 6x^3 = 6x^3 = 6x^3 + 6x^3 = 6x^$

64.
$$a^3 - a^3b^3 + b^3$$
 ($a^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$) $a^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}$ ($a^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$) $a^{\frac{1}{3}}$

65.
$$a^3 + x^3y^3 + y^3$$
 (or $a^3 + a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{2}}$ and $a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{2}}$ and $a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}$ and $a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}$

66.
$$a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{4}{4}} + b^{\frac{3}{4}}$$
 ($a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + 5x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}} - 3y^{\frac{4}{4}}$ ($a^{\frac{3}{4}} + 3y^{\frac{3}{4}} + 3y^{\frac{4}{4}} + 3y^{\frac{4}{4}} + 3y^{\frac{4}{4}}$ ($a^{\frac{3}{4}} + 3y^{\frac{4}{4}} + 3y^{\frac$

67.
$$2x^{\frac{3}{5}} - 5x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{3}{5}} - 3y^{\frac{3}{5}} \stackrel{?}{(4)} 2x^{\frac{3}{5}} + 5x^{\frac{1}{5}}y$$
68. $a^{\frac{5}{2}} + a^2b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}} + ab + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{5}}$ (\$\frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\text{ with } | \frac{1}{2} \displays | \frac{1}{2} \din \frac{1

68.
$$a^{\frac{3}{2}} + a^{2}b^{3} + a^{2}b^{4} + ab^{4}a^{4}b^{4}$$
 69. $x^{\frac{3}{2}} - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y - y^{\frac{3}{2}}$ **(38.** $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ **31.** 1

69.
$$a^{2}-xy^{2}+x^{2}y-y$$
 र $a^{2}-b^{2}$ कोता। $a^{3}+a^{2}b^{2}+a^{4}b+b^{3}$ कि $a^{4}-b^{2}$ कोता।

70.
$$a^{\frac{7}{4}} + a^{\frac{7}{4}}b^{2} + a^{\frac{7}{4}}b + b^{2}$$
 (4 $a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7}{4}} + a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7}{4}} + a^{\frac{7}{4}}b^{\frac{7$

71.
$$x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}z^{\frac{3}{2}} = z^{\frac{3}{2}}$$
72. $a^{2\hat{n}} - a^{n}x^{n} + x^{2n}$ $(4 a^{n} + x^{n})$ $(4 a^{n} + x^{n})$

72.
$$a^{2n} - a^n x^n + x^{2n}$$
 ($a^n + x^n$) $a^{-3} + a^{-2}b + 4a^{-1}b^2 - b^3$ ($a^{-2} - 2a^{-1}b + b^2$) $a^{-3} - a^{-2}b + 4a^{-1}b^2 - b^3$ ($a^{-2} - 2a^{-1}b + b^2$) $a^{-3} - a^{-2}b + 4a^{-1}b^2 - b^3$

74.
$$x^{-3} + 3x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 2y^3$$
 (or $x^{-3} - 3x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 2y^3$ (a) a)

75.
$$2a^{-5} + 3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}} - 5b^{-3}$$
 কে $2a^{-5} + 3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}} + 5b^{-3}$ ছারা।.

'সহগ বিচ্ছিন্নকরণ' প্রণালী অনুসারে গুণফল নির্ণয় কর:

76.
$$2x^2 + 3x + 9$$
 এরং $3x + 5$ এর। 77. $x^2 - 2x - 15$ এবং $2x - 3$ এর।

78.
$$3x^3 + 5x + 6$$
 এবং $x^2 + 3x + 2$ এর।

79.
$$x^3 + px + r$$
 এবং $px + q$ এর।

80.
$$\frac{1}{3}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + 5$$
 and $\frac{3}{2}x^2 + x + 2$ and

দশ্ম অথ্যায়

জটিল ভাগহার

(Harder Division)

- 82. তৃতীয় অধ্যায়ে বর্ণিত ভাগের সাধারণ নিয়মগুলি নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায়:
 - (i) $a+b=a \times^{\bullet} \frac{1}{b}$;
 - (ii) $a \div b \div c = a \div bc$;
 - (iii) $a \div b \times c = a \times c + b$;
 - এবং (iv) $^{\bullet}$ m ও n উভয়ই অথও ধনরাশি এবং m>n হইলে, $a^m+a^n=a^{m-n}$.

শেষোক্ত নিয়মকে ভাগের সূচক নিয়ম (Index Rule) বলে।

50 হইতে 52 সংখ্যক নিয়মাবলীতে, একপদ বা বহুপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগু করিবার প্রণালী, এবং তৎসম্পর্কিত চিহ্নসম্বনীয় নিয়মের নিষয় বর্ণিত হইয়াছে। বর্ত্তমানে বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশি, দ্বারা ভাগ করার প্রণালী ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

83. বছ্লপদ রাশিকে বছ্পদ রাশি দারা ভাগঃ

প্রথমে একটি দৃষ্টান্ত ধরা যাউক। যথা,

CHIEF,
$$(2a^2 + 3ab + 4b^2)(a + 3b) = 2a^2(a + 3b) + 3ab(a + 3b) + 4b^2(a + 3b)$$

= $2a^3 + 9a^2b + 13ab^2 + 12b^3$.

অতএব, $(2a^3 + 9a^2b + 13ab^2 + 12b^3) + (a+3b) = 2a^2 + 3ab + 4b^2$.

এক্ষণে, ভাজ্য ও ভাজক দেওয়া থাকিলে ভাগফল কি প্রকারে নির্ণয় করা যায়, তাহা আলোচনা করা যাউক। উপরোক্ত দৃষ্টান্ত হইতে দেখা যাইতেছে যে,

- (i) ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই, উহাদের অন্তর্গত একটি সাধারণ অক্ষর a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে লিখিত হইয়াছে।
 - (ii) ভাগফলের প্রথম পদ, যথা, $2a^2 = 2a^3 \div a$, ' অর্থাৎ, = (ভাজ্যের প্রথম পদ) \div (ভাজকের প্রথম পদ)।
- (iii) ভাজ্য হইতে $2a^2(a+3b)$ বাদ দিলে $3a^2b+13ab^2+12b^3$ অবশিষ্ট থাকে, এবং ভাগফলের দ্বিতীয় পদ, যথা, $3ab=3a^2b+a$, অর্থাৎ, = (উক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ) =
- (iv) শেষোল্লিখিত অবশিষ্ট হইতে 3ab(a+3b) বাদ দিলে $4ab^2+12b^3$ অবশিষ্ট থাকে, এবং ভাগফলের তৃতীয পদ, যথা, $4b^2=4ab^2+a$, অর্থাৎ, =(এই শেষোক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ) + (ভাজকের প্রথম পদ)।
- m (v) উল্লিখিত শেষোক্ত অবশিষ্ট হইতে $4b^2(a+3b)$ বাদ দিলে, কিছুই অবশিষ্ট থাকে না ; স্থতরাং ভাগ করা সম্পূর্ণ হইল ।

উপরোক্ত প্রক্রিয়া-প্রণালী নিম্নলিখিতরূপে দেখান যাইতে পারে:

$$a+3b)2a^{3}+9a^{2}b+13ab^{2}+12b^{3}(2a^{2}+3ab+4b^{2})2a^{3}+6a^{2}b - 1\overline{3}a\overline{b^{2}}+1\overline{2}b^{3}$$

$$3a^{2}b+1\overline{3}a\overline{b^{2}}+1\overline{2}b^{3}$$

$$4ab^{2}+12b^{3}$$

স্থতরাং, ভাগের নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া যায়:

ভাজ্য ও ভাজক উভয়কেই উহাদের অন্তর্গত কোন সাপারণ (common) অক্ষরের অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া পাটীগণিতের পদ্ধতি অনুযায়ী এক পংক্তিতে স্থাপন কর।

ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দারা ভাগ করিয়া লব্ধ ফলকে ভাগফলের প্রথম পদরূপে লিখ। ভাগফলের এই প্রথম পদ দারা ভাজককে গুণ করিয়া ভাজা হইতে বিয়োগ কর এবং বিয়োগফলকে পূর্ব্বনির্দিষ্ট সাধারণ অক্ষরটির (common letter এর) অধ্যক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাও।

এথন, উপবিশক্তি বিয়োগফলকে 'একটি নৃতন ভাজ্য মনে কর এবং পূর্ব নিয়মান্ত্বায়ী ইহার প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দারা ভাগ করিয়া লব্ধ ফলকে ভাগফলুের দ্বিতীয় পদ্ধাপে লিথ। ভাগফলের দ্বিতীয় পদ দারা ভাজককে পুনরায় গুণ করিয়া উল্লিখিত নৃতন ভাজ্য হইতে বিয়োগ কর। এই বিয়োগফলকেও নৃতন ভাজ্যরূপে গশ্য করিয়া উহার উপর পূর্ব্বোক্ত প্রক্রিয়া প্রয়োগ কর, এবং কোন অবশিষ্ট না থাকা পর্যান্ত এইরূপে প্রক্রিয়া করিয়া যাও।

টীকা। ইহা স্থম্পষ্ট য়ে, উপরোক্ত নিয়মান্থসারে ভাগফল ঠিকরপেই পাওয়া যায়। কারণ, যে সকল বিভিন্ন রাশিকে ভাজ্য হইতে পর পর বিয়োগ করা হয়, উহারা ভাগফলের এক একটি পদ এবং সম্পূর্ণ ভাজকের গুণফল হওয়ায়, উহাদ্ধে সমষ্টি, সম্পূর্ণ ভাগফল এবং সম্পূর্ণ ভাজকের গুণফলের, সমান; আবার, এই সমষ্টি ভাজ্যেরও সমান হওয়ায়, স্পষ্টতঃই প্রদত্ত•ভাজ্যটি, ভাগফল ও ভাজকের গুণফলের সমান হইবে; এবং ইহাই হওয়া উচিত।

উদা. 1. $x^4 - 4x^2 + 12x - 9$ কে $x^2 - 2x + 3$ দ্বারা ভাগ কর। • এন্থনে, ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই x এর শক্তির অধঃক্রম অন্থসারে সাজান আছে; স্থতরাং, প্রথমেই নিম্লিখিতরূপে ভাগের ক্রিয়া আর্মন্ত করিতে পারা যায়।

$$x^{2}-2x+3 x^{4} - 4x^{2}+12x-9 (x^{2}+2x-3) x^{4}-2x^{3}+3x^{2}$$

$$2x^{3}-7x^{2}+12x-9$$

$$2x^{3}-4x^{2}+6x$$

$$-3x^{2}+6x-9$$

$$-3x^{2}+6x-9$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $=x^2+2x-3$.

টীকা। ভাজ্যে x^3 -যুক্ত পদটি না থাকায় উহার স্থান শৃষ্ম রাখ্বিয়া, উহার পরবর্ত্তী x^2 -যুক্ত পদটিকে, প্রথম পদ x^4 হইতে কিছুদ্রে. লিথা হইয়াছে। এইপ্রকার করা অত্যীবশুকীয় না হইলেও, সদৃশপদগুলি যাহাতে একটির নীচে একটি বসে সেইরূপ করার জন্ম, উহার প্রতি লক্ষ্য রাখা দরকার। দৃষ্টাস্তম্বরূপ, উপরোক্ত উদাহরণে ভাজ্যের বিতীয় পদ $4x^2$ কে যদি x^4 -এর পরেই লিথা হইত, তাহা হইলে $-2x^3$, ' $-4x^2$ ' এর নীচে, এবং $3x^2$, '12x' এর নীচে বসিত এবং ইহা দ্বারা প্রথম শিক্ষার্থীদের পক্ষে, হয় বিয়োগ করার অন্ত্রবিধা হইত, না হয় প্রক্রিয়ার সরলতা ক্ষুগ্র হইত।

উদা. 2.
$$16x^4 + 36x^2 + 81$$
 কে $4x^2 + 6x + 9$ হারা ভাগ কর।
$$4\dot{x}^2 + 6x + 9 \begin{vmatrix} 16x^4 & +36x^2 & +81 \\ 16x^4 + 24x^3 & +36x^2 & +81 \end{vmatrix} = \frac{4x^2 - 6x + 9}{16x^4 + 24x^3} = \frac{4x^2 - 6x + 9}{16x^4 + 24x^3 - 36x^2} = \frac{36x^2 - 54x}{36x^2 + 54x + 81}$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $=4x_{\rm s}^2-6x+9$.

উদা. 3. $x^6 - 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 8x - 12$ কে $x^2 - 4$ দারা ভাগ কর।

[জ্ঞেষ্টব্য। ভাজ্য এবং ভাজককে, উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষরের অধ্যক্রমিক শক্তি অন্ত্যারে না সাজাইয়া, উর্দ্ধক্রমিক শক্তি অন্ত্যারে সাজাইলেও ভাগের ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়। কেবলমাত্র লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, উভয়কেই একইভাবে (হয় উর্দ্ধক্রমিক, না হয় অধ্যক্রমিক শক্তি অন্ত্যারে) সাজাইতে হইবে। দৃষ্টাস্তম্বরূপ, এই উনাহরণে, ভাজ্য এবং ভাজক উভয়কেই উর্দ্ধক্রমিক শক্তি অন্ত্যারে সাজাইয়া ভাগ করা যাইতেছে।

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল = $3 - 2x + x^4$.

উদা. 4. $a^2b^2+2abc^2-a^2c^2-b^2c^2$ কে ab+ac-bc দারা ভাগ কর। ভাজ্যকে a এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসাবে সাজাইলে $(b^2-c^2)a^2+2bc^2a-b^2c^2$ এই ত্রিপদরাশিটি, এবং ভাজকক্ষেও ত্রন্ধিপে সাজাইলে (b+c)a-bc এই দ্বিপদরাশিটি, পাওয়া যায়।

$$(b+c)a-bc)(b^2-c^2)a^2+2bc^2.a-b^2c^2\\(b^2-c^2)a^2-(b^2c-bc^2)a'\\(b^2c+bc^2)a-b^2c^2\\(b^2c+bc^2)a-b^2c^2$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল = ab - ac + bc.

উদা. 5. $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$ কে a + b - c দারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজককে a এর অধ্যক্রমিক শক্তি অন্নসারে সাজাইলে, ভাজ্য ও ভাজক যথাক্রমে,

 $a^3+3bc.a+(b^3-c^3)$ এবং a+(b-c) হয়। অতএব, ভাজ্য একটি ত্রিপদ-রাশি এবং ভাজক একটি দ্বিপদ্রাশি

$$(a+(b-c))a^{3} + 3bc.a + (b^{3}-c^{3})(a^{2}-(b-c)a+(b^{2}+bc+c^{2}))$$

$$-(b-c)a^{2} + 3bc.a + (b^{3}-c^{3})$$

$$-(b-c)a^{2}-(b-c)^{2}.a$$

$$(b^{2}+bc+c^{2})a+(b^{3}-c^{3})$$

$$(b^{2}+bc+c^{2})a+(b^{3}-c^{3})$$

অতঁএব, নির্দেয় ভাগফল = $a^2 + b^2 + c^2 - ab + ac + bc$.

উদা. 6.
$$(b-c)a^3+(c-a)b^3+(a-b)c^3$$
 কে

$$a^2 - ab - ac + bc$$
 দারা ভাগ কর।

ভাজ্য এবং ভাজককে a এর অধ্যক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে.

ভাজ্য =
$$(b-c)a^3-b^3a+c^3a+b^3c-bc^3$$

= $(b-c)a^3$ $\mathbf{\tau}$ $(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)$, অতএব একটি ত্রিপদরাশি।

এবং ভাজক = $a^2 - (b+c)a + bc$, অতএব একটি ত্রিপদরাশি।

$$a^{2} - (b+c)a + bc)(b-c)a^{3} - (b^{3} - c^{3})a + bc(b^{2} - c^{2})((b-c)a + (b^{2} - c^{2}))((b-c)a^{3} - (b^{2} - c^{2})a^{2} + bc(b-c)a)((b-c)a + (b^{2} - c^{2})a^{2} - (b^{3} + b^{2}c - bc^{2} - c^{3})a + bc(b^{2} - c^{2})((b^{2} - c^{2})a^{2} - (b^{3} + b^{2}c - bc^{2} - c^{3})a + bc(b^{2} - c^{2})$$

অতএব, নির্ণের ভাগফল = $ab - ac + b^2 - c^2$.

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, যে সকল রাশি a এর বিভিন্ন শক্তির সহগরূপে বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে, তাহাদিগকেও b এব অধ্যক্রমিক শক্তি অন্মসারে সাজান হইযাছে। এইরূপ করিলে, প্রক্রিয়া সরল হয় এবং ভুল হওয়ার সম্ভাবনাও কম থাকে।

প্রশ্নালা 39

ভাগ কর:

1.
$$x^2 - 9x + 14$$
 (* $x - 7$ चोता। 2. $3x^2 - 17x + 10$ (क $3x - 2$ चोता।

3.
$$12x^2 - 8x - 32$$
 কে $4x - 8$ দারা।

4.
$$55x^2 - 67x - 14$$
 কে $11x + 2$ হাপা।

.5.
$$2a^2 - 7ab + 6b^2$$
 কে $a - 2b$ বারা।

6.
$$x^4 + x^2y^2 + y^4$$
 ($x^2 + xy + y^2$ 3)3)

7.
$$4x^{29} - 9a^2$$
 কে $2x + 3a$ হারা। $8x^3 + a^3$ কে $x + a$ হারা। $9x^3 - a^2b - 7ab^2 + 3b^3$ কে $a - 3b$ হারা।

.9.
$$a^3 - a^2b - 7ab^2 + 3b^3$$
 কে $a - 3b$ দাবা

10.
$$\frac{1}{2}x^3 + \frac{23}{10}x^2 + \frac{42}{5}x + 18$$
 কে $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{5}x + 6$ হারা।

11.
$$\frac{3}{2}x^3 - \frac{15}{8}x^2 + \frac{67}{48}x^2 - \frac{6}{12}$$
 কে $\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{5}{12}$ होती।

12.
$$\frac{1}{5}a^3y^3 - \frac{5}{24}a^2y^2b + \frac{67}{432}ayb^2 - \frac{1}{15}\frac{5}{9}b^3$$
 কে $\frac{a^2}{10}y^2 - \frac{ab}{16}y + \frac{5}{168}b_0^2$ ছারা।

14.
$$\frac{4}{9}x^4 - x^2y^2 + \frac{9}{8}xy^3 - \frac{16}{9}y^4$$
 ($\frac{2}{9}x^2 - \frac{xy}{3} + \frac{4}{9}y^2$ Fig 1

15.
$$\frac{1}{7}y^5 - \frac{3}{7}xy^4 + \frac{2}{21}x^2y^3 + \frac{5}{21}x^3y^2 - \frac{1}{3}x^4y + \frac{2}{21}x^5$$
 কে $\frac{1}{21}y^2 - \frac{1}{7}xy + \frac{1}{21}x^2$ ছারা।

. 16.
$$\frac{13}{13}mn^3 + \frac{1}{6}m^2n^2 + \frac{m^4}{2} - \frac{1}{12}m^3n + \frac{1}{3}n^4$$
 কে $\frac{1}{6}mn + \frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{24}n^2$ হারা।

17.
$$\frac{2}{3}a^2y^3 + \frac{1}{4}y^5 + \frac{a^5}{12} - \frac{3}{4}a^3y^2 - \frac{1}{6}ay^4 - \frac{1}{12}a^4y$$
 কে $-\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{12}a^2$ থারা।

18.
$$x+y+z=-\mathfrak{L}a$$
 হইলে, $(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$ কে $a^2+a(x+y)+xy$ দারা তাগ করিয়া তাগফল নির্ণয় কর।

ভাগ কর:

19.
$$\frac{1}{3}[(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3]$$
 কে $(x-y)(y-z)$ হারা।

$$\mathbf{720.}^{J} x^{6} - 2a^{3}x^{3} + a^{6}$$
 কে $x^{2} - 2ax + a^{2}$ হারা।

$$21.$$
 $2x^3y^3+y^6+x^6$ কে $2xy+x^2+y^2$ হারা।

$$x^{2}$$
22. $x^{3} + (a+b+c)x^{2} + (ab+ac+bc)x + abc$ ($x^{2} + c$)

23.
$$x^3 + (b-c-a)x^2 + (ca-ab-bc)x + abc$$
 $(x^2 + (b-a)x - ab$ and $(x^3 + (b-c)x + abc)$

24.
$$a^3 + a^2b + a^2c - abc - b^2c - bc^2$$
 ($a^2 - bc$ atal)

25.
$$a^2(b+c) - b^2(c+a) + c^2(a+b) + abc$$
 $c = a-b+c$ $c = a + b + c$

27.
$$x^3 - 2ax^2 + (a^2 - ab - b^2)x + a^2b + ab^2$$
 ($x - a - b$) $x - a - b$

28.
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$
 কে $a + b + c$ ছারা।

$$x^3 + y^3 - 1 + 3xy$$
 ($x + y - 1$) श्री ।

30.
$$x^3 - 8y^3 - 27z^3 - 18xyz$$
 ($\Phi x - 2y - 3z$ $\exists 1311$

31.
$$x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$$
 ($x - y + z$ $x = 1$)

32.
$$8x^3 - 27y^3 - z^3 - 18xyz$$
 ($\Phi 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$

33.
$$\sqrt{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$
 কে $a-b$ হারা।

34.
$$(x^2-bx+cx)a-bc(x+a)+(x-b+c)x^2$$
 ($(x+a)(x-b)$) (31)

35.
$$\int c(ab-x^2) + (a-b)(x-c)x + x(x^2-ab)$$
 ($(x-b)(x-c)$) $(x-b)(x-c)$

36.
$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
 ($ab+bc-ac-b^2$) ($ab+bc-ac-b^2$) ($ab+bc-ac-b^2$)

$$a^{37}$$
, $a^{3}(b^{2}-c^{2})+b^{3}(c^{2}-a^{2})+c^{3}(a^{2}-b^{2})$

$$a^2b - bc^2 - ac^2 + a^2c$$
 stal 1

38.
$$xy^3 + 2y^3z - xy^2z + xyz^2 - x^3y - 2yz^3 + c^3z - xz^3$$

39.
$$b(x^3+b^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)$$
 ($(a+b)(x+a)$) ($(a+b)(x+a)$)

40.
$$(a-b)^2c^2 + (a-b)c^3 - (c^2-a^2)b^2 + (c-a)b^3$$
 ($(a-b)c^2 - (c-a)b^2$) $(a-b)c^3$

প্রিদত্ত রাশিমালাকে c এর অধ্যক্রমিক শক্তি অমুসারে মাজাও।]

41.
$$(ax+by)^3+(ax-by)^3$$
 ্ $(ay-bx)^3+(ay+bx)^3$ কে $(a+b)^2x^2-3ab(x^2-y^2)$ দ্বারা। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

[ভাজ্য এবং ভাজককে সরল করিয়া, উভয়কেই $oldsymbol{x}$ এর অধঃক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাও।]

42.
$$x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz$$
 কে $1+xy+yz+zx$ ছারা। • [কলিঃ প্রবেশিকা, 1878.]

প্রিদত্ত রাশিমালাকে x এর অধ্যক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাও।]

43.
$$(4x^3-3a^2x)^2+(4y^3-3a^2y)^2-a^6$$
 কে $x^2+y^2-a^2$ দ্বারা।
্বোদ্বাই প্রবেশিকা, 1884,

m এবং n এর সকল প্রকার মানের জন্মই $a^m + a^n = a^{m-n}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

44.
$$a^0 = 1$$
. $[a^0 = a^{m-m} = a^m \div a^m = 1.]$

45.
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
. $[a^{-n} = a^{0-n} = d^0 + a^n = 1 \div a^n]$

46.
$$x^{\frac{5}{2}} \div x^{\frac{3}{2}} = x$$
. **47.** $x^{-\frac{3}{4}} \div x^{-\frac{7}{4}} = x$.

ভাগ কর:

• 48.
$$a^2b^{\frac{2}{3}}$$
 কে $a^{-1}b^{-\frac{1}{3}}$ দারা। 49. $a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{5}{3}}$ কে $a^{-3}b^{\frac{3}{2}}c^2$ দারা।

$$ullet$$
 .50. $15xyz$ কে $-5x^{rac{3}{3}}y^{rac{3}{5}}z^{rac{4}{5}}$ হারা। $ullet$ $ullet$ $5x^{rac{4}{5}}-16y^{rac{3}{5}}$ কে $3x^{rac{2}{5}}+4y^{rac{1}{5}}$ হারা।

$$a+b$$
 কে $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ দারা।

$$a^3 + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}} + b^3$$
 কে $a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{2}}$ দারা।

54.
$$4x^{\frac{5}{3}} - 37x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 9y^{\frac{5}{3}}$$
 কে $2x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 3y^{\frac{1}{3}}$ ছারা।

55. $a - b^2$ কে $a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{2}}$ ছারা।

55.
$$a-b^2$$
 কে $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}$ ছারা।

56.
$$4a^{-10} + 12a^{-\frac{15}{2}}b^{-\frac{3}{2}} + 9a^{-5}b^{-3} - 25b^{-6}$$
 (Φ

$$2a^{-5} + 3a^{-\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}} - 5b^{-3}$$
 দারা।

57:
$$9x^{-\frac{5}{2}} - 25x^{\frac{4}{2}}y^{-\frac{3}{4}} + 70x^{-\frac{5}{8}}y^{-\frac{9}{8}} - 49y^{-\frac{3}{2}}$$
 কে

$$3x^{-\frac{5}{4}} + 5x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{3}{8}} - 7y^{-\frac{3}{4}}$$
 and 1

58.
$$a^3-b^2$$
 কে $a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}$ হারা।

59. $x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$ কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ হারা।

84. তাসম্পূর্ণ তাপ (Inexact, Division) র কথন কথন ভাজাটিকে ভাজক দ্বারা সম্পূর্ণরূপে ভাগ করা যায় না। দৃষ্টান্তম্বরূপ, ৪3 নিয়মের দ্বিতীয় উদাহরণের ভাজাটি যদি $16x^4 + 36x^2 + 6x + 86$ হইত, তাহা হইলে দ্বিতীয় অবশিষ্টটি (অর্থাৎ বিয়োগফূলটি) $36x^2 + 60x + 86$, এবং সর্কশেষ অবশিষ্টটি 6x + 5 হইত। এখন, যেহেতু 6x + 5 কে $4x^2 + 6x + 9$ দ্বারা ভাগ করা যায় না, এম্বলে ভাগের ক্রিয়া অসম্পূর্ণই রহিয়া যাইত, এবং প্রাটীগণিতের স্থায় ভাগফলটিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে হইত। যথা,

$$\frac{16x^4 + 36x^2 + 6x + 86}{4x^2 + 6x + 9} = 4x^2 - 6x + 9 + \frac{6x + 5}{4x^2 + 6x + 9}.$$

উপরিলিখিত অভেদটির ডা'নদিকের অংশটিকে পূর্ব ভাগফল (complete quotient) বলে। ভাজ্যের যে সর্ব্বশেষ অংশটিকে ভাজক দ্বারা আর ভাগ দেওয়া যায় না, তাহাকে ভাগকোষ (remainder) বলে। অতএব, যদি D, d, Q এবং R যথাক্রমে ভাজ্য, ভাজক, ভাগফল এবং ভাগশেষ বুঝায়, তবে স্পষ্টতঃই

$$D = d \times Q + R.$$

85. 'সহগ বিচ্ছিল্লকর্ল' প্রক্রিলা (Method of detached co-efficients) ই যদি ভাজা ও ভাজক উভয়ই কোন একটি নির্দ্ধি অক্ষরবিশিষ্ট রাশি, অথবা উভয়ই একই অক্ষরসমূহের সমমাত্র রাশি হয়, তাহা হইলে উহাদের অন্তর্গত পদসমূহের সহগগুলিকে, অক্ষরসমূহ ইইতে বিচ্ছিন্ন করিয়া এবং যথাস্থানে স্থাপন করিয়াই ভাগের ক্রিয়া সম্পন্ন করা যায় এবং এতদ্বারা 'দীর্ঘ ভাগ' সম্পন্নকরণ-জনিত কষ্টের লাঘব করা যায়।

নিম্নলিথিত উদাহরণগুলি দারা প্রক্রিয়া-প্রণালী স্পষ্টক্রপে বুঝিতে পারা যাইবে।

উদা. 1.
$$6x^4+13x^3+39x^2+37x+45$$
 কে $3x^2+2x+9$ দারা ভাগ কর।

$$3+2+9 + 4+18 +$$

্ত্যত্এব, নির্ণেয় ভাগফল = $2x^2 + 3x + 5$.

সাধারণ নিয়মানুসারেঃ

$$3x^{2} + 2x + 9 \underbrace{)6x^{4} + 13x^{3} + 39x^{2} + 37x + 45}_{6x^{4} + 4x^{3} + 18x^{2}} \underbrace{)2x^{2} + 3x^{2} + 5}_{9x^{3} + 21x^{2} + 37x} \underbrace{)9x^{3} + 21x^{2} + 37x}_{15x^{2} + 10x + 45} \underbrace{)15x^{2} + 10x + 45}_{15x^{2} + 10x + 45}$$

অতএব, নির্ণেয় মান = $2x^2 + 3x + 5$.

উদা. 2. $x^3 - 27$ কে $x^2 + 3x + 9$ ছারা ভাগ কর।

ি**দ্রেপ্টব্য।** যদি ভাজ্য কিংবা ভাজকে, x এর কোন এক শক্তিবিশিষ্ট পদ বর্ত্তমান না থাকে, তবে উক্ত পদটির সহগ 'শূন্ম' (zero) ধরিয়া উহাকে যথাস্থানে লিখিয়া লইতে হয়।

$$\begin{array}{r}
 1 + 3 + 9 \\
 1 + 3 + 9 \\
 \hline
 -3 - 9 - 27 \\
 -3 - 9 - 27
 \end{array}$$

ি নির্ণেয় ভার্গফল = x-3

প্রগ্রমালা 40

ু 'সহগ বিচ্ছিন্নকরণ' প্রণালী অমুসারে ভাগফল নির্ণয় কর:

• 1.
$$2m^3 - 9m^2n + 13mn^2 - 6n^3$$
 ($\frac{1}{2}m - 3n \cdot \frac{1}{2}$)

'2.
$$a^4 - 3a^3b + 3ab^3 - b^4$$
 (Φ $a^2 - b^2$ Φ

3.
$$2x^4 - 3x^3y - 3xy^3 - 2y^4$$
 ($x^2 + y^2$)

4.
$$2a^4 - 36a^2x^2 - 16ax^3$$
 (9 $2a^2 + 8ax$ 91311

5.
$$3+2x+4x^2+5x^3-4x^4+2x^5$$
 কে $1+2x^2$ হারা।

6.
$$x^4 - 4x^2 + 12x - 9$$
 ($x^2 + 2x - 3$)

7.
$$4a^4 - 9a^2b^2 + 24ab^3 - 16b^4$$
 ($\Phi 2a^2 - 3ab + 4b^2$)

8.
$$a^4 + 4a^2x^2 + 16x^4$$
 কে $a^2 + 2ax + 4x^2$ হারা।

9.
$$a^4 + 4b^4$$
 or $a^2 + 2ab + 2b^2$. $a = 1$

10.
$$2x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 18x^2 - 3x - 8$$
 ($x^3 - 2x^2 + 1$)

10.
$$2x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 18x^2 - 3x - 8$$
 (주 $x^3 - 2x^2$ 두 1 되지!
11. $x^4 - 81$ (주 $x - 3$ 되지!
12. $a^5 - 32$ (주 $a - 2$ 되지!

13.
$$3-9x+2x^2+5x^3-7x^4+2x^5$$
 (* $1-3x+x^2$) श्री श

14.
$$82x^2 + 40 - 45x^3 + 18x^4 - 67x$$
 ($6x^2 + 8 - 7x$)

15.
$$64-x^6$$
 কে $2-x$ হারা। 16. $1+x^6-2x^3$ কে x^2+1-2x হারা।

17.
$$13ab^3 + 2a^2b^2 + 6a^4 - a^3b + 4b^4$$
 কে $4ab + b^2 + 3a^2$ ছারা।

18.
$$a^3b - 15b^4 - 8a^2b^2 + a^4 + 19ab^3$$
 কে $a^2 + 3b^2 - 2ab$ ছারা।

20.
$$8a^2b^3 + 3b^5 + a^5 - 9a^3b^2 - 2ab^4 - a^4b$$
 ($4ab - 3b^2 + a^2$) $4ab - 3b^2 + a^2$

21.
$$y^6 + x^6 - 2x_0^3 y^3$$
 কে $x^2 + y^2 - 2xy$ হারা।

পূর্ণ ভাগফল নির্ণয় কর:

22.
$$\frac{x^2+11x+35}{x+5}$$
. **23.** $\frac{x^3+\frac{1}{27}y^3}{x-\frac{1}{3}y}$.

- $24.\quad x^3+px^2+qx+r$ কে x^2+px+q দারা ভাগ করা হইলে, ভাগশেষ কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।
- 25. ভাগফলে চারিটি পদ পর্য্যন্ত রাখিয়া, $1+2x+4x^2$ কৈ 3-x দারা ভাগ কর।

86. কভিশয় আবশ্যকীয় ফল (A few important results):

শিক্ষার্থিগণের অবশ্রই জানা আছে যে,
$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

এবং $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2)$.

অতথ্য,
$$x^4 - a^4$$
 [কাহা $= x^3(x-a) + a(x^3 - a^3)$]
$$= (x-a)\{x^3 + a(x^2 + xa + a^2)\}$$

$$= (x-a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3).$$

তজ্প,
$$x^5 - a^5$$
 [বাহা = $x^4(x - a) + a(x^4 - a^4)$]
= $(x - a)\{x^4 + a(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)\}$
= $(x - a)(x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4)$.

এই প্রকারে দেখান যাইতে পারে যে, x^8-a^6 , x^7-a^7 , x^8-a^8 প্রভৃতি রাশিসমূহের প্রত্যেকটিরই একটি উৎপাদক (factor) x-a; অত্এব, সাধারণভাবে বলা যায় যে, n একটি ধনাত্মক, অথও সংখ্যা (positive integer) হইলে, x^n-a^n এর একটি উৎপাদক x-a হইবে।

অতএব, সিদ্ধান্ত করা যায় যে, n একটি ধনাত্মক অথও সংখ্যা হইলে, x^n-a^n , x-a দারা সম্পূর্ণক্ষপে বিভাজ্য (exactly divisible).

আবার, যেহেতু $x^n+a^n=(x^n-a^n)+2a^n$, এবং x^n-a^n , x-a ছার! বিভাজ্য, কিন্তু $2a^n$ কে x-a ছারা ভাগ করা যায় না ; অতএব, দেখা যায় যে, x^n+a^n কে x-a ছারা ভাগ করা যায় না ।

স্থাতরাং,
$$n$$
 একটি অথণ্ড ধনসংখ্যা হইলে, x^n-a^n সকল ক্ষেত্ৰেই $x-a$ শ্বারা বিভাজ্য ; x^n+a^n কোন ক্ষেত্ৰেই $x-a$ শ্বারা বিভাজ্য নহে।

অনুসি. 1. n কেবলমাত্র অথও যুগ্ম ধনসংখ্যা (even integer) হইলে, x^n-a^n , x+a দারা বিভাজ্য।

কারণ, n অথগু যুগা ধনসংখ্যা হইলে, $(-a)^n=a^n$; + স্থতরাং, $x^n-a^n=x^n-(-a)^n$;) n অথগু অযুগা ধনসংখ্যা হইলে, $(-a)^n=-a^n$; + স্থতরাং $x^n-a^n=x^n+(-a)^n$;) অধিকন্ত, x+a=x-(-a).

এখন, (ক) হইতে দেখা যায় যে, x-(-a) দারা $x^n-(-a)^n$ বিভাজ্য, কিন্তু $x^n+(-a)^n$ বিভাজ্য নয়। স্থতরাং, n অথগু যুগা ধনসংখ্যা হইলেই x^n-a^n কে x+aদারা ভাগ করা যায়, কিন্তু n অযুগা হইলে, ঐরূপ ভাগ করা যায় না।

অনুসি. 2. n একটি অথও অযুগ্ম ধনসংখ্যা হইলে, x+a দারা x^n+a^n কে সম্পূর্ণরূপে ভাগ করা যায়।

কারণ,
$$n$$
 অধ্যা হইলে, $(-a)^n=-a^n$; স্কতরাং, $x^n+a^n=x^n$ ন (-a) n ; স্করাং, $x^n+a^n=x^n+(-a)^n$; স্করাং, $x^n+a^n=x^n+(-a)^n$; স্কিন্ত, $x+a=x-(-a)$.

- এথন, (ক্ৰ) হুইতে দেখা যায় যে, x-(-a) দারা $x^n-(-a)^n$ বিভাজ্য, কিন্তু $x^n+(-a)^n$ বিভাজ্য নয়।
- . অতএব, n অযুগা হইলেই x^n+a^n , x+a দারা বিভাজা, কিন্ত n যুগা হইলে, x^n+a^n কে x+a দারা ভাগ করা শায় না ।
- ় ' গুণনের চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়মের বার বার প্রয়োগ দ্বারা এইরূপ ফল পাওয়া যায়; ' যথা, $(-a)^2=a^2$; স্থতরাং, $(-a)^8=(-a)\times(-a)^2=(-a)\times a^2=-a^3$; $(-a)^4=(-a)\times(-a)^2=(-a)\times($

অতএব, নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় :*

x-a দারা x^n-a^n সকল ক্ষেত্রেই বিভাজ্য ; কিন্তু, x^n+a^n কোন ক্ষেত্রেই বিভাজ্য নয়।

x+a দারা x^n-a^n বিভাজ্য, যথন n একটি অথও যুগ্ম ধনসংখ্যা এবং x^n+a^n বিভাজ্য, যথন n একটি অথও অযুগ্ম ধনসংখ্যা।

প্রথমালা 41

প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখাও যে, নিম্নলিখিত রাশিসমূহ x+a , দারা বিভাজ্য :

1.
$$x^3 + a^3$$
.

2.
$$x^4 - a^4$$
.

3.
$$x^5 + a^5$$
.

4.
$$x^6 - a^6$$
.

5.
$$x^7 + a^7$$
.

6.
$$x^8 - a^8$$
.

প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখাও যে, নিম্নলিখিত রাশিসমূহ x+a দারা বিভাজ্য নহে:

7.
$$x^3 - a^3$$
.

8.
$$x^4 + a^4$$
.

9.
$$x^5 - a^5$$
.

10.
$$x^6 + a^6$$
.

11.
$$x^7 - a^7$$
.

12.
$$x^8 + a^8$$
.

ভাগফল লিখ ঃ

14.
$$x^4 - y^4$$
 কে $x + y$ হারা।

14.
$$x^2 - y^2$$
 ্থে $x + y$ থারা।
16. $x^5 + y^5$ কে $x + y$ হারা।

18.
$$x^6 - y^6$$
 কে $x + y$ দারা।

20.
$$x^7 + y^7$$
 কে $x + y$ ছারা।

একাদশ অথ্যায়

সূত্রাবলী ও উহাদের জ্যামিতিক সমাধান

(Formulæ and their geometrical representation)

87. ছাত্রগণের স্থবিধার জন্ম, চতুর্থ অধ্যায়ে বর্ণিত স্থ্রোবলী নিয়ে পুনরায় সিমিবিশিত হইল। বীজগণিতের অনেক প্রক্রিয়াই সরল ও নিপুণভাবে সম্পন্ন করিতে হইলে, এই স্ত্রসমূদের সম্যক্ ধারণা থাকা একান্ত আবশ্রক। অতএব, বার বার দেখিয়া লইয়া উহাদের প্রয়োয় করা অপেক্ষা, উহাদ্বিগকে মুখস্থ করিয়া রাথাই কর্ত্তব্য।

ক্রিনিংশব্দধায়ে এইগুলি যথায়থভাবে প্রমাণিত হইবে।

স্ত্রাবলী ও উহাদেব জ্যামিতিক সমাধান

(1)
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(11) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(111) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
(112) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
(113) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
(114) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
(115) $(a+b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
(116) $(a+b)^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
(117) $(a+a)(a+b) = a^2 + (a+b)(a+ab) + ab$
(118) $(a+a)(a+b) = a^2 + (a+b)(a+ab)$
(119) $(a+a)(a+b) = a^2 + (a+b)(a+ab)$
(110) $(a+a)(a+b) = a^2 + (a+b)(a+ab)$
(111) $(a+a)(a+b) = a^2 + (a+b)(a+ab)$

88. সূত্রাবলীর প্রয়োগঃ

উদা. 1. 999 × 999 এবং 9988 × 10012 এব গুণফল নির্ণয় কব। এখন, 999 × 999 = 999²

=
$$(1000-1)^2$$

= $1000^2 - 2 \times 1000 \times 1 + 1^2$ [$\Re (11)$]
= $1000000 - 2000 + 1$

=1000000 - 2000 + 1

=998001

আবাব, 9988 × 10012 = 10012 × 9988 = (10000 + 12)(10000 - 12) = 10000² - 12² = 100000000 - 144 = 99999856.

উদা. 2. •2931³ + 1069³ + 12000 × 2931 × 1069 এব মান নির্ণয় কব।

a কে 2931 এবং b কে 1069 ধবিষা, প্রদন্ত বাশিমালা = $a^3 + b^3 + 12000ab$ • = $a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

[থেছেডু, a+b=2931+1069=4000.]

[হ্ব (1v)]

 $=(a+b)^3$

 $=(4000)^3$

 $=4000 \times 4000 \times 4000$

= 64000000000.

টীকা। অধিকন্তু, চতুর্থ অধ্যায়েব উদাহ্যুণগুলি দেখ।

89. কোন একটি রাশিকে চুইটি বর্গের অন্তর্জশে প্রকাশ করা (to express an algebraic quantity as the difference of two squares) : '

বেহেতু,
$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
এবং $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$,
স্থানাং, (প্রথম অভেদ হইতে দ্বিতীয়টিকে বিয়োগ করিয়া)
$$4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2;$$
অথবা, $ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$
অভএব, তুইটি রাশির গুণফল = (রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্দ্ধ) 2

$$- (রাশিদ্বয়ের অন্তরফলের অর্দ্ধ)^2$$

উদা. 1. (x+y+2z)(x+y) কে ছুইটি বর্গের অন্তরন্ধণে প্রকাশ কর। $(x+y+2z)(x+y) = \left\{\frac{(x+y+2z)+(x+y)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(x+y+2z)-(x+y)}{2}\right\}^2$ $= \left[\frac{2x+2y+2z}{2}\right]^2 - \left[\frac{x+y+2z-x-y}{2}\right]^2$ $= (x+y+z)^2 - z^2.$

উদা. 2. (x+1)(2x+3)(x+5) কে ছুইটি বর্গের অন্তরন্ধপে প্রকাশ কর। প্রদন্ত রাশিমালা = $\{(x+1)(2x+3)\}(x+5) = (2x^2+5x+3)(x+5)$ = $\{\frac{(2x^2+5x+3)+(x+5)}{2}\}^2 - \{\frac{(2x^2+5x+3)-(x+5)}{2}\}^2$ = $(x^2+3x+4)^2-(x^2+2x-1)^2$.

উদা. 3. (x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) কে তুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

প্ৰদত্ত বাশিষালা =
$$\{(x+a)(x+4a)\}\{(x+2a)(x+3a)\}$$

= $(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)$
= $\left\{\frac{(x^2+5ax+4a^2)+(x^2+5ax+6a^2)}{2}\right\}^2$
- $\left\{\frac{(x^2+5ax+6a^2)-(x^2+5ax+4a^2)}{2}\right\}^2$
= $(x^2+5ax+5a^2)^2-(a^2)^2$.

উদা. 4. $(x+2a)(x+4a)(x+6a)(x+8a)+7a^4$ কে হুইটি বর্গের অন্তরন্ধপে প্রকাশ কর।

প্রাণিমালা =
$$\{(x+2a)(x+8a)\}\{(x+4a)(x+6a)\}+7a^4$$

$$= (x^2+10ax+16a^2)(x^2+10ax+24a^2)+7a^4$$

$$= \left\{\frac{(x^2+10ax+16a^2)+(x^2+10ax+24a^2)}{2}\right\}^2$$

$$-\left\{\frac{(x^2+10ax+24a^2)-(x^2+10ax+16a^2)}{2}\right\}+7a^4$$

$$= (x^2+10ax+20a^2)^2-(4a^2)^2+7a^4$$

$$= (x^2+10ax+20a^2)^2-16a^4+7a^4$$

$$= (x^2+10ax+20a^2)^2-(3a^2)^2.$$

প্রথমালা 42

[৪7 নিয়মের সূত্রাবলীর সাহায্যে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির সমাধান করিতে হইবে।]

নিম্নলিখিত রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর:

1. 5x + 9y. 16a - 13b. 3. x + 100. 4. y + 500. 5. a + 999. 8. y + 10001. 7. 988. 8. 1012.

10. 100.5. 10. 99.6.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির খন নির্ণয় কর:

11. 2x + 5. 12. 105.

13. 99⁵. **14.**

800'6.

15. (74) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$.

ইহা ইইতে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় কর, যথন,

(i) a = 5004, b = 4996; (ii) a = 1012, b = 988.

16. (a+b) a+b a+b

ইহা হইতে নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে তুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর:

(i)
$$4(x+2y)(2x+y)$$
; (ii) $(6x+10y)(4x+6y)$; (iii) $(x+98)(x+102)$; (iv) 505×495 ; (v) $(2x+100^{\circ}4)(2x+99^{\circ}6)$.

নিয়লিখিত বাশিগুলির গুণফল নির্ণয় কর

নিম্বিথিত রাশিগুলির গুণফল নির্ণয় কর

17.
$$(a+x)(a-x)(a^2+x^2)$$
.

18. $(2a+3)(2a-3)(4a^2+9)$.

19. $(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

50.

20.
$$98 \times 102 \times 10004$$
. 21. $96 \times 104 \times 10016$. 22. $(2a+r)(4a^2+4ax+x^2)$. 23. $(a-2)(a+2)(a^2+4a+4)(a^2-4a+4)$. 24. $(x+4)(x^2-4x+16)$. 25. $(2y-3)(4y^2+6y+9)$. 26. $(x+2)(x^2+2x+4)(x-2)(x^2-2x+4)$. 27. $(2x+105)(2x+15)$. 28. $(6x-25)(6x+43)$. 29. $(6x-25)(6x-43)$. 31. $(2a+x+y)^2+2(2a+x+y)(8a-x-y)+(8a-x-y)^2$. $(17a+20x+19y)^2-2(19x+18y+17a)(20x+19y+17a)+(19x+18y+17a)^2$. 32. $(16a+x+y)^3+(4a-x-y)^3+3(16a+x+y)^2(4a-x-y)+3(16a+x+y)^2(4a-x-y)^2$. 33. $(121a+x+y)^3-(116a+x+y)^3-15a(121a+x+y)(116a+x+y)$. 34. $(5a-8x)^3+(6a+8x)^3+33a(5a-8x)(6a+8x)$. 27. $(2x+3y-16z)^3+3(3x-3y+16z)^2(2x+3y-16z)+(3x-3y+16z)^3+3(3x-3y+16z)^2(2x+3y-16z)+(3x-3y+16z)^3+3(3x-3y+16z)^2(2x+3y-16z)+(3x-3y+16z)^3+3(3x-3y+16z)^2(2x+3y-16z)+(3x-3y+16z)^2-120x^3$. 39. $(x+y)^2+15(x+y)+36$. 41. $8x^3+125y^3$. 42. $(8a+13x)^3-64$. 41. $8x^3+125y^3$. 42. $(8a+13x)^3-64$. 41. $8x^3+125y^3$. 41. $8x^3+125y^3$. 42. $(8a+2b)^2-2(13a+2b)(16a+2b)+(13a+2b)^2$, $18a+2b^2$

 $-3 \times 49856 \times 49855 - 49855 \times 49855 \times 49855$.

- 51. $(x+2)(2x+1)(5x+2) 3x^4$ কে তৃইটি বর্গের অন্তরক্সপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
- 52. দেখাও যে, $(ax+b)(bx+a)\{abx^2-(a^2+b^2)x+ab\}$ কে ছইটি বর্গের অন্তর্মণে প্রকাশ করা যায়।
 - 53. (5x+1)(2x+5)(3x+5)(4x+3) কে হুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।
- 54. $(7x+3a)(7x+5a)(7x+9a)(7x+11a)+61a^4$ কে তুইটি বর্গের সমষ্টি-রূপে প্রকাশ কর।
- 90. বীজগণিতীয় সূত্রাবলীর জ্যাত্রিতিক সমাধান ঃ একণে, বর্গান্ধিত কাগজের (squared paper এর) উপর অন্ধিত জ্যামিতিক চিত্র সাহায্যে কতকগুলি হত্ত্ব প্রতিপন্ন করা যাইতেছে।

(1) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ ক্রিতে হইবে যে, (a+b+c+d+e)k=ak+bk+ck+dk+ek.

ধর, বর্গান্ধিত কাগজের উপর O বিন্দুটিকে মূলবিন্দু (origin), এবং OX, OY ব্রখাদ্যকে অক্ষরেখা (axes) লওয়া হইল।

	11	1	2	1	1.0	1					Ľ			I						7.	ħ
	Γ.	1	ď	1				Π		2		1			100	1		تي	1/2	37	
		3		1	1									L_{i}		1			-	1	13
_											Γ		4	Г	L		P		Г		Г
	P	1			Q				1,044	S		1	T					U	:		Г
.,:	3.44		9		1	4						1			-Ac	7					
	,									90	- 6					250					r.
	k	1	a	14	b	k	1	C	R		d	Ř	_	1	e	k	, -				
			-						2				4								Г
				*				4	-			Į,		•		. 1					
I	O		8		A		Ġ.	C		1			D		e			The second			1
7			14			1.4					æ										

এখন মনে কর যে, OX অক্ষরেখাটির উপর A, B, C, D, E বিন্দুগুলি এরূপে লওয়া হইল যে, OA = a, AB = b, BC = c, CD = d এবং DE = e; আবার OY অক্ষরেখাটির উপর P বিন্দুটিকে এরূপে লওয়া হইল যে, OP = k. OPUE আয়তক্ষেত্রটি (rectangle) সম্পূর্ণ কর। A, B, C, D, E বিন্দুগুলি দিয়া OP এর সমান্তরাল করিয়া AQ, BR, CS, DT, EU রেখাগুলি টান এবং মনে কর উহারা PU রেখাটির সহিত বথাক্রমে Q, R, S, T, U বিন্দুগুলিতে মিলিত ইইয়াছে। তাহা হইলে অবশ্রুই, OPQA, AQRB, BRSC, CSTD, DTUE ক্ষেত্রগুলির প্রত্যেকেই এক একটি আয়ত।

এখন, আয়ত PE = আয়ত PA + আয়ত QB + আয়ত RC' + আয়ত SD + আয়ত TE.....(1)

কন্ত, আয়ত
$$PE = OE.OP = (OA + AB + BC + CD + DE).OP$$
 $: = (a + b + c + d + e).k$;

এবং আয়ত $PA = OA.OP = ak$;

আয়ত $QB = AB.AQ = AB.OP = bk$;

আয়ত $RC = BC.BR = BC.OP = ck$;

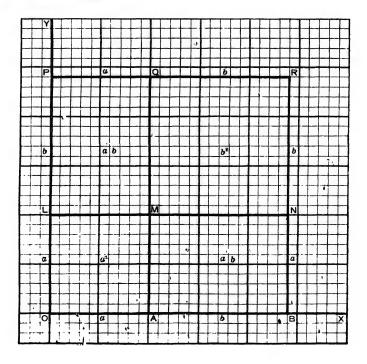
আয়ত $SD = CD.CS = CD.OP = dk$;

আয়ত $TE = DE.DT = DE.OP = ek$.

অতএব, (1) হইতে, (a+b+c+d+e)k = ak+bk+ck+dk+ek.

(2) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

বর্গান্ধিত কাগজের উপর O কে মূলবিন্দু এবং OX, OY এই পরস্পর-লম্ব রেথান্ব্যকে অক্ষরেখা (axes) লও।



ধর, OX রেখার উপর A ও B তুইটি বিন্দুকে এরপে লওয়া হইল যে, OA = a এবং AB = b; আবার মনে কর, OY রেখার উপর L ও P তুইটি বিন্দুকে এরপে লওয়া হইল যে, OL = a এবং LP = b; তাহা হইলে, $OB = OP = a^{\bullet} + b$; OPRB বর্গক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ কর; এখন, A বিন্দু দিয়া OY এর সমান্তরাল করিয়া AQ রেখা, এবং L বিন্দু দিয়া OX এর সমান্তরাল করিয়া LMN রেখা অঙ্কিত কর। ধর, AQ, PR রেখার সহিত Q বিন্দুতে, এবং LMN রেখা, AQ ও BR রেখান্বয়ের সহিত যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে মিলিত হইল।

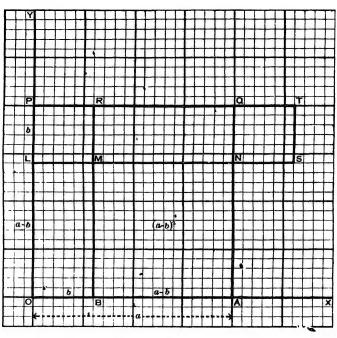
তাহা হইলে স্পষ্টই,

কেব
$$OR =$$
 কেব $OM +$ কেব $AN +$ কেব $LQ +$ কেব $MR...(1)$ এখন, কেব $OR = OB.OP = OB.OB = OB^2 = (a+b)^2$; এবং কেব $OM = OA.OL = OA.OA$ $= a^2$; কেব $AN = AM.AB = OL.AB$ $= ab$; কেব $LQ = LM.LP = PQ.LP$ $= ab$; কেব $MR = MN.MQ = QR.LP$ $= b.b = b^2$.

(3)' জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

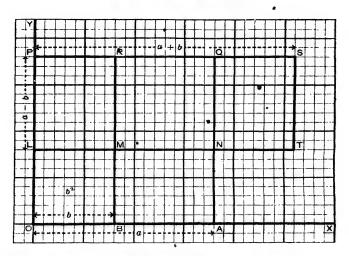
মনে কর, O কে মূলবিন্দু, এবং OX, OY এই পরম্পর-লম্ব রেখা তুইটিকে অক্ষরেখা লওয়া হইল। OX এর উপর $\bullet A$ ও B বিন্দু তুইটিকে এরূপে লও যে, OA = a এবং OB = b; OA এর উপর OPQA বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন কর। $B \cdot$ বিন্দু দিয়া OY এর সমাস্তর করিয়া BR রেখাটি টান, এবং মনে কর, উহা PQ কে R বিন্দুতে ছেদ জ্বরিল; PO হইতে b এর সমান্দ করিয়া PL অংশটি কাট; L বিন্দু দিয়া OX এর সমান্তরাল LMN রেখা অঙ্কিত কর এবং ধর, উহা BR^{\bullet} এবং AQ কে যথাক্রমে M এবং N বিন্দুতে কাটিয়াছে। PQ এর বর্দ্ধিতাংশের উপর \bullet এরূপে T বিন্দুটি লও যে, QT = PR(=b). QT এর উপর QJSN বর্গক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ কর ।

যেহেতু, OA=a, এবং OB=b ; অতএব, BA=a-b. আবার, যেহেতু OP=OA=a, এবং PL=b ; অতএব, OL=a-b. স্থতরাং, AB=OL.



এখন, ক্ষেত্র
$$BN$$
 = ক্ষেত্র OQ + ক্ষেত্র NT - ক্ষেত্র OR - ক্ষেত্র RS(1) ক্ষেত্র BN = BA . BM = BA . OL = BA . BA = BA^2 = $(a-b)^2$; ক্ষেত্র OQ = OA . OP = OA . OA = OA^2 = a^2 ; ক্ষেত্র NT = QT এব উপর বর্গক্ষেত্র = b^2 ; ক্ষেত্র OR = OP . OB = OA . OB = ab ; ক্ষেত্র OR = OP . OB = OA . OB = ab ; ক্ষেত্র OR = OP . OR = OR =

(4) জ্যামিভির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.



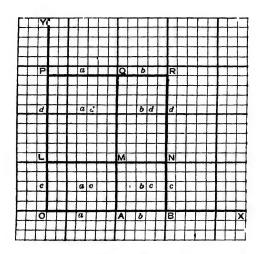
বর্গান্ধিত কাগজে, OX অক্ষটির উপর তুইটি বিন্দু A ও B এরূপে লও যে, OA=a এবং OB=b; আবার, OY অক্ষটির উপর তুইটি বিন্দু P এবং L এরূপে লও যে, OP=a এবং OL=b. OPQA এবং OLMB বর্গন্দেত তুইটি সম্পূর্ণ কর। BM কে বর্দ্ধিত করিয়া PQ এর সহিত R বিন্দুতে, এবং LM কে বর্দ্ধিত করিয়া AQ এর সহিত R বিন্দুতে, মিলিত কর; আবার, MN কে T বিন্দু পর্য্যস্ত এরূপে বর্দ্ধিত কর, যেন $NT \doteq NA$ (=0); NTSQ আয়তটি সম্পূর্ণ কর।

ম্পাইই, আয়ন্ত
$$BN=$$
 আয়ন্ত QT ; আরও, $PL=OP-OL=a-b$, এবং $AB=OA-OB=a-b$; অতএব, $PL=AB$. এখন, ক্ষেত্র $PA-$ ক্ষেত্র $BL=$ ক্ষেত্র $PN+$ ক্ষেত্র BN $=$ ক্ষেত্র $PN+$ ক্ষেত্র PT \dots (1) কিন্তু, ক্ষেত্র $PA=OA$ এর উপর বর্গ $=a^2$; ক্ষেত্র $BL=OB$ এর উপর বর্গ $=b^2$; এবং ক্ষেত্র $PT=PS.PL=(PQ+QS).PL$ $=(PQ+NT).PL=(a+b)(a-b).$

মতরাং, (1) হইতে, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

(5) জ্যামিতির সাহায্যে প্রমাণ করিতে ছইবে যে, (a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.

বর্গান্ধিত কাগজে, OX অক্ষটির উপর ত্ইটি বিন্দু A ও B এরূপে লও যে, OA=a এবং AB=b; আবার, OY অক্ষটির উপর ত্ইটি বিন্দু P ও L এরূপে লও যে, OL=c এবং LP=d.

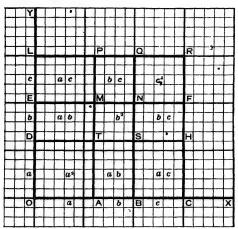


OPRB এবং OLNB আয়তক্ষেত্র ডুইটি সম্পূর্ণ কর। A বিন্দু দিয়া OY এর সমাস্তর করিয়া AMQ রেখাটি টান এবং মনে কর, উহা LN কে M বিন্দুতে এবং PR কে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ক্ষেত্র
$$OR =$$
 ক্ষেত্র $OM +$ ক্ষেত্র $AN +$ ক্ষেত্র $LQ +$ ক্ষেত্র $MR...(1)$ কিন্তু, ক্ষেত্র $OR = OB.OP = (OA + AB)(OL + LP) = (a + b)(c + d)$; ক্ষেত্র $OM = OA.OL = ac$; ক্ষেত্র $AN = AB.AM = AB.OL = bc$; ক্ষেত্র $LQ = PQ.PL = OA.PL = ad$; ক্ষেত্র $MR = QR.QM = AB.PL = bd$.

(6) জ্যামিভির সাহায্যে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$:

বর্গান্ধিত কাগজে, OX অক্ষরেখাটির উপর তিনটি বিন্দু A,B ও C এরূপে লও Cব, OA=a, AB=b এবং BC=c.



OC এর উপর OCRL বর্গক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ কর ; তাহা হইলে, অবশুই $OL=OC=OA+AB+BC=a+b+^{o}C$.

OL এর উপর হুইটি বিন্দু D ও E এরপে লও যে, OD=a, এবং DE=b ; স্কুতরাং, EL=c.

A ও B নিয়া OY এর সমান্তর করিয়া AP ও BQ রেখা ছুইটি আঁক, এবং মনেকর, উহারা $\dot{L}R$ কে যুথাক্রমে P ও Q তে ছেদ করিল; আবার, D ও E দিয়া OX এর সমান্তর করিয়া DTSH ও EMNF রেখা ছুইটি আঁকি, এবং ধর, উহারা AP, BQ, CR রেখাত্রুকে যুথাক্রমে T, S, H এবং M, N, F বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ক্ষেত্র
$$OR=$$
্কেত্র $OT+$ ্কেত্র $TN+$ ্কেত্র $NR+$ ্কেত্র DM +্কেত্র $AS+$ কেত্র $PN+$ কেত্র $NH+$ কেত্র EP +কেত্র BH . \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots

কিন্ত, ক্ষেত্র
$$DM = DT.DE = OA.AB = ab$$
; ক্ষেত্র $AS = AT.AB = OD.AB = ab$; তজ্প, ক্ষেত্র $NP =$ ক্ষেত্র $NH = bc$; ক্ষেত্র $EP =$ ক্ষেত্র $BH = ac$.

আবার, ক্ষেত্র
$$OR = OC$$
 এর উপর বর্গ $= OC^2 = (OA + AB + BC)^2$ $= (a+b+c)^2$; ক্ষেত্র $OT = OA.OD = OA.OA = OA^2 = a^2$; ক্ষেত্র $TN = TM.TS = AB.DE = AB^2 = b^2$; ক্ষেত্র $NR = NQ.NF = EL.BC = BC^2 = c^2$; স্থতরাং, (1) হইতে, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ab + bc + bc + ac + ac$

প্রশালা 43

 $=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

জ্যামিতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

- **1.** (i) $(5+6) \times 11$; (ii) 7^2 ; (iii) $(\frac{5}{2} \frac{1}{2})^2$.
- 2. জ্যামিতির সাহায্যে দেখাও যে,
 - (i) $9^2 7^2 = 32$: (ii) $(7+3)^2 = 100$:
 - (iii) $(3+5) \times 2 = 3 \times 2 + 5 \times 2$;
 - (iv) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$;
 - (v) $(x-a)(x-b) = x^2 (a+b)x + ab$;
 - (vi) $(x-a)(x+b) = x^2 ax + bx ab$.
- 3. জ্যামিতির সাহায্যে, বার ফুট দীর্ঘ একটি সরলরেথার উ্পর অস্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- 4. 5 ফুট লম্বা এবং 3 ফুট চওড়া একথানি ঘরের ক্ষেত্রফল জ্ঞামিতির সাহায্যে নির্ণয় কর।
- 5. 9 গজ লম্বা এবং 3 গজ চওড়া এক বাগানের চারিধারে এক গজ প্রাণন্ত একটি রাস্তা আছে। জ্যামিতির সাহায্যে, বাগান ও রাস্তার মোট ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- 6. 10 গজ দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একখানি বর্গক্ষেত্রাকৃতি জমির মধ্যে 4 গজ দীর্ঘ বাহু-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রাকৃতি পুকুর খনন করা হইল; জ্যামিতির সাহায্যে বাকী জমির পরিমাণ নির্ণয় কর।
- 7. জ্যামিতির সাহায্যে, এরপ একথানি আয়তক্ষেত্রাক্তর্ত জমির পরিমাণ নির্ণয় কর, যাহার দৈয়ি 50 গজ এবং প্রস্থ দৈর্ঘ্যের এক-পঞ্চমাংশ। ১

- 8. 10 গজ লম্বা ও 5 গজ চওড়া একথানি আয়তক্ষেত্রাক্বতি উঠান বর্গক্ষেত্রাক্বতি পাথর দারা বাঁধাইতে হইবে; একথানা পাথরের বাহুর দৈর্ঘ্য এক 'গজ হইলে মোট কতথানা পাথর লাগিবে, জ্যামিতির সাহায্যে তাহা নির্ণয় কর।
- 9. 20 গজ দীর্ঘ বাছবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রাক্বতি একটি বাগানের ভিতরে এক গজ প্রশস্ত একটি পথ, বাগানের চারিধ্যরে বরাবর চলিয়া গিয়াছে। জ্যামিতির সাহায্যে পথের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
- 10. 20 গজ দীর্ঘ ও 10 গজ প্রশন্ত একটি আয়তক্ষেত্রাকৃতি বাগানের ভিতর এক গজ প্রশন্ত হুইটি সোজা রাস্তা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। রাস্তা তুইটি যদি আয়তের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাদ্বয়ের উভয় পার্শ্বে সমভাবে অবস্থিত হয়, তাহা হইলে, জ্যামিতির সাহায্যে, রাস্তা বাদে বাগানের বাকী জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

হ্বাদ্দশ ভাপ্সায় সহজ উৎপাদক-বিশ্লেষণ (Simple Factorisation)

- 91. সংভ্রোঃ কোন এক রাশি, তুই বা তদধিক রাশির গুণফল হইলে, শেষোক্ত রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে পূর্ব্বোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক (factor) বলে।
- ° কোন রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা (to resolve an expression into factors)' এর অর্থ 'যে যে রাশির পরস্পর গুণন দ্বারা উপরোক্ত রাশিটি উৎপন্ন হইয়াছে, স্নেই রাশিসঁমূহ নির্ণয় করা'।

্ডিৎপাদক-বিল্লেষণের কতিপয় সহজ প্রণালী প্রসঙ্গক্রমে চতুর্থ অধ্যায়ে বাঁশ্ত হইরাছে। এস্থলে, সেইগুলি একেবারে উপেক্ষিত হইবে না, কারণ, এই অধ্যায়ে উৎপাদক-বিল্লেষণের নির্মাবলীই অধিকৃতর শ্রালার সহিত আলোচিত হইবে।]

টীকা। এই অধ্যারে, 'বীজগণিতীয় দাশিমালা (algebraical expression)' অর্থে 'মূলদ (rational) এবং পূর্ব বা অথও (integral) বীজগণিতীয় রাশিমালা' ব্যাইবে; অর্থাৎ যে রাশিমালার কোন পদে মূলনির্গয়হচক মূল-চিহ্ন (radical sign)

বা যাহার কোন পদের হরে (denominator এ) কোন অক্ষর (letter) বর্ত্তমান নাই, সেইরূপ রাশিমাকা বুঝাইবে; আবার, রাশিমালার 'উৎপাদক' অর্থেও 'মূলদ ও পূর্ণ উৎপাদক'ই স্থচিত হইবে।

92. সম্ভক্ত বিশ্লেষ্ড : যে রাশিমালার প্রত্যেক পদে কোন একটি উৎপাদক সাধারণ (common) থাকে, তাহাকে পর্য্যবেদ্দণ দারাই, একটি সরল (simple) ও একটি মিশ্র (compound), এইরূপ তুইটি উৎপাদকে অবিলম্বে বিশ্লেষণ করা যায়।

(1)
$$a^2x + ax^2 = ax \cdot a + ax \cdot x = ax(a + x)$$
;

তজ্বপ, (2) $2a^3b^2 - 3a^5b^3 = a^2b^2(2a - 3b)$;

প্রশালা 44

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

 \mathbf{Y} . ab + ac.

1.ab + ac.2. $a^2b^3 + a^3b^2.$ 3. $x^3y^4 - 2x^4y^3.$ 4. $2x^2yz + 4xy^2z - 6xyz^2.$ 5. $4a^5b - 6a^4b^2 - 8a^3b^3.$ 6. $ax^2y - 5a^2x^3y^2 + 3ax^3.$

7. $3x^4y^3z^2 - 12x^2y^4z^3 + 21x^3y^2z^4$. 8. $28a^8b^5 - 42a^5b^8$.

9. $72x^{10}y^8 + 108x^8y^{10}$. **10.** $39a^5b^7c^7 - 65b^5c^7a^7 - 91c^5a^7b^7$.

93. a^2-b^2 এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালা: a^2-b^2 এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার প্রণালী 56 নিয়মের টীকায় বর্ণিত হইয়াছে। শিক্ষার্থীদের অভ্যাসার্থ আড়ে কতিপয় প্রশ্ন নিমে সংযোজিত হইল।

প্রথমালা 45

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর

1. $9a^2 - 16b^2$.

1. $4a^3 - 25ax^2$.

1. $16x^4 - 1$.

1. $16x^5 - 9x$.

1. $16x^5 - 81x$.

1. $1 - 16a^4$.

1. $16a^4 - 49x^6$.

1. $121 - m^6$.

1. 121

18.
$$98a^3x^5 - 128ax$$
. **19.** $324x^{17}a^9 - 484x^5\dot{a}^3$. **20.** $245m^{23}n^{13} - 605m^{15}n^7$. **21.** $(a+3b)^2 - 25c^2$.

24.
$$(a+3b)^2-25c_0^2$$

22.
$$a^2 - (3b - 5c)^2$$
. 23. $(x+y)^2 - (x'-y)^2$.

22.
$$a^2 - (3b - 5c)^2$$
. 23. $(x + y)^2 - (x^2 - y)^3$. 24. $(3a + 2x)^2 - (2a + x)^2$. 25. $4(a - b)^2 - 9(c - d)^2$.

26.
$$49x^2 - (5y - 3z)^2$$
. **27.** $(8x + 5)^2 - (2x - 7)^2$.

28.
$$(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$$
.

29.
$$(2a-3b+4c)^2-(a+4b-5c)^2$$
.

30.
$$64(a+3x-4y)^2-9(2a-x+3y)^2$$
.

$$(4x^2 - 5a^2)^2 - (5x^2 - 4a^2)^2.$$

32.
$$(5a^2-3a+7)^2-(5a^2-3a-7)^2$$
.

igg/94. পর্য্যবেক্ষণ দারাই a^2-b^2 এর আকারে প্রকাশ করা যায় এই প্রকার রাশিমালা: দুষ্টাম্বরূপ নিমে কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ
$$a^4 + a^2b^2 + b^4$$
.
$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$$

$$= \{(a^2 + b^2) + ab\}\{(a^2 + b^2) - ab\}$$
• $= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: x^4+4 .

$$x^{4} + 4 = (x^{4} + 4x^{2} + 4) - 4x^{2} = (x^{2} + 2)^{2} - (2x)^{2} - (2$$

উদ্য. 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4 - 6x^2 + 1$. $x^4 - 6x^2 + 1 = (x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 = (x^2 - 1)^2 - (2x)^2$ $= \{(x^2 - 1) + 2x\}\{(x^2 - 1) - 2x\}$ • = $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$.

উদ্ধা. 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
$$a^2 + b^2 + 2bc - c^2$$
.
$$a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)$$

$$= a^2 - (b - c)^2$$

$$= \{a + (b - c)\}\{a - (b - c)\}$$

$$= (a + b - c)(a - b + c).$$

উন্ধা: 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
$$2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$$
.

প্রাম্থি =
$$(c^2 + 2cd + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$$

= $(c + d)^2 - (a - b)^2$
= $\{(c + d) + (a - b)\}\{(c + d) - (a - b)\}$
= $(c + d + a - b)(c + d - a + b)$.

প্রশ্নমালা 46

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

1.
$$x^4 + x^2 + 1$$
. 2. $x^8 + x^4 + 1$. 3. $a^4 + a^2x^2 + x^4$. 4. $a^8 + a^4x^4 + x^8$. [Fig. 2]CF[Fig.], 1887.] 5. $x^4 + 64$.
6. $4x^4 + 81$. 7. $9x^4 + 36$. 8. $a^4 + 2a^2 + 9$.
9. $x^4 - 7x^2 + 9$. 10. $4x^4 + 8x^2 + 9$. 11. $4x^4 - 16x^2 + 9$.
12. $4x^4 + 3x^2 + 9$. 13. $4a^4 - 37a^2 + 9$. 14. $4a^4 + 625$.
15. $9x^4 + 23x^2 + 16$. 18. $9a^4 - 25a^2 + 16$.
19. $16x^4 + 4x^2a^2 + 25a^4$ 20. $9a^4 - 19a^2x^2 + 25x^4$.
21. $x^4 + 8x^2 + 144$. 22. $a^4 - 35a^2b^2 + 25b^4$.
23. $36a^4 - 16a^2b^2 + b^4$. 24. $49m^4 + 16n^4 - 60m^2n^2$.
25. $64a^4 + 81x^4$. 26. $4x^4 + (7a)^4$.
27. $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$ 28. $4a^2 - b^2 - 9c^2 + 6bc$.
29. $9x^2 - 4y^2 + 12yz - 9z^2$. 30. $a^2 - 4b^2 - 25c^2 + 20bc$.
31. $30xz + 16y^2 - 9x^2 - 25z^2$.
32. $a^2 + 4b^2 - 9c^2 - 4d^2 - 4ab + 12cd$.
33. $(x^2 - 2xy) - (z^2 - 2yz)$.
34. $(x^2 - 2xy) - (z^2 - 2yz)$.
35. $16a^2 - 16c^2 - 9b^2 - 24a + 24bc + 9$.
37. $y^2y^2 + 20z + x^2 - 14xy^2 - 25z^2 - 4$.
38. $16x^2 + 42by - 9y^2 + 40xa - 49b^2 + 25a^2$.
39. $49x^2 - 1 + 16y^2 - 64z^2 + 16z - 56xy$.
39. $4^2 - 4y^2 - 2c^2 + d^2 - 2(ad^2 - bc)$.

95. a^3+b^3 বা a^3-b^3 এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালা: এই প্রকার রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার প্রণালী 59 এবং 60
নিয়মে বর্ণিত হইয়াছে। বর্ত্তমানে, এই আকারের অপেক্ষাকৃত; একটু জটিল রাশি
সম্বন্ধে আলোচনা করা ধাইতেছে।

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $a^9 + x^9$.

বৈতি কু
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
পত্রব, $a^9 + x^9 = (a^3)^3 + (x^3)^3$

$$= (a^3 + x^3)\{(a^3)^2 - (a^3)(x^3) + (x^3)^2\}$$

$$= (a^3 + x^3)(a^6 + a^3x^3 + x^6)$$

$$= (a+x)(a^2 - ax + x^2)(a^6 - a^3x^3 + x^6).$$

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: a^9-x^9 .

বৈছেছু
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
,

অতথ্য, $a^9 - x^9 = (a^3)^3 - (x^3)^3$

$$= (a^3 - x^3)\{(a^3)^2 + (a^3)(x^3) + (x^3)^2\}$$

$$= (a^3 - x^3)(a^6 + a^3x^3 + x^6)$$

$$= (a - x)(a^2 + ax + x^2)(a^6 + a^3x^3 + x^6)$$

উদা. 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $64x^7-xa^6$ ্র

$$64x^{7} - xa^{6} = x(64x^{6} - a^{6})$$

$$= x\{(8x^{3})^{2} - (a^{3})^{2}\}$$

$$= x(8x^{3} + a^{3})(8x^{3} - a^{3})$$

$$= x\{(2x)^{3} + a^{3}\}\{(2x)^{3} - a^{3}\}$$

$$= x\{(2x + a)(4x^{2} - 2xa + a^{2})\}\{(2x - a)(4x^{2} + 2xa + a^{2})\}$$

$$= x(2x + a)(2x - a)(4x^{2} - 2xa + a^{2})(4x^{2} + 2xa + a^{2}).$$

অথবা,

$$64x^{7} - xa^{6} = x(64x^{6} - a^{6})$$

$$= x\{(4x^{2})^{3} - (a^{2})^{3}\}$$

$$= x(4x^{2} - a^{2})(16x^{4} + 4x^{2}a^{2} + a^{4})$$

$$= x(2x + a)(2x - a)\{(16x^{4} + 8x^{2}a^{2} + a^{4}) - 4x^{2}a^{2}\}$$

$$= x(2x + a)(2x - a)\{(4x^{2} + a^{2})^{2} - (2xa)^{2}\}$$

$$= x(2x + a)(2x - a)(4x^{2} + a^{2} + 2xa)(4x^{2} + a^{2} - 2xa)$$

$$= x(2x + a)(2x - a)(4x^{2} + 2xa + a^{2})(4x^{2} - 2xa + a^{2}).$$

টীকা। উপরে প্রদর্শিত নিয়ম তুইটির যে কোনটির সাহায্যেই বিশ্লেষণ-ক্রিয়া সম্পন্ন করা ঘাইলেও, প্রথমোক্ত নিয়মটি প্রয়োগ করাই স্থবিধান্তনক।

প্রশালা 47

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর

1.
$$a^3 - 8b^3$$
.
2. $a^4 - 27ax^3$.
3. $512x^9 + 1$.
4. $a^9 - 512b^9$.
5. $27a^6 + 125x^6$.
6. $m^6 - n^6$.
7. $\sqrt{343x^3 + 512y^3}$.
6. $\sqrt{11}$.
8. $64x^{12} - 1$.
9. $\sqrt{a^6 - 64x^{12}}$.
10. $125x^9 - 216a^9$.
11. $64a^{13}b + 343ab^{13}$.
12. $729x^2 \circ y^2 - 64x^2y^2 \circ$

96. x^2+px+q এর আকারে প্রকাশিত রাশিমালাকে পর্য্যবেক্ষণ দারা উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ এই অভেদটি (identity) হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, x^2+px+q এর আকারে প্রকাশিত যে কোন রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে, তুইটি রাশি, $a \otimes b$, এরূপে নির্ণয় করিতে হয় যে, a+b=p এবং ab=q. $a \otimes b$ মূল্দ (rational) এবং অথগু বা পূর্ণ (integral) হইলে, উহাদিগকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই নির্ণয় করা যাইতে পারে। এই বিষয়্বের আরও পরিষ্ণার ধারণার জন্ম, শুক্ষার্থিগণ 60, নিয়মের পরবর্ত্তী উদাহরণগুলি দেখিয়া লইতে পারে।

\. উদা. 1. $x^2 + 17x + 20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এস্থলে, এরূপ তুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাছে সমষ্টি = 17, এবং শুণফল = 30.

এখন, যে যে সংখ্যাদ্যের গুণফল 30, তাহারা যথাক্রমে (i) $1 \otimes 30$, (ii) $2 \otimes 15$, (iii) $3 \otimes 10$, (iv) $5 \otimes 6$. ইহাদের মধ্যে পুনরায় যে যে সংখ্যা তুইটির যোগফল 17, সেই সংখ্যাদ্যকে মির্ণয় করিতে হইবে। স্পষ্টতঃ, $2 \otimes 15$ সংখ্যা তুইটিই নির্ণেয় সংখ্যা ; কারণ, 2+15=17 এবং $2\times15=30$.

অতএব,
$$x^2 + 17x + 30 = (x+2)(x+15)$$
.

উদা. 2. $x^2 - 11x + 24$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এন্থলে, যে সংখ্যা মুইটির গুণফল – +24 এবং সমষ্টি – -11, তাহাদিগকে নির্ণয় করিতে হইবে ্ অতএব, ইহা স্কম্পষ্ট যে, সংখ্যাদ্বয়ের প্রত্যেকটিই ঋণাত্মক (কারণ,

উভয়ই ধনাত্মক হইলে, সমষ্টি ঋণাত্মক হইতে পারে না ; আবার, একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হইলেও, গুণফল ধনাত্মক হইতে পারে না)।

এখন, যে যে ঋণাত্মক সংখ্যাদ্বরের গুণফল = +24, তাহারা যথাক্রমে (i) -1 ও -24, (ii) -2 ও -12, (iii) -3 ও -8, (iv) -4 ও -6. ইহাদের মধ্যে আবার সেই তুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি = -11. অতএব, -3 ও -8 ই নির্ণেয় সংখ্যা হইবে।

স্থতাবাং, $x^2 - 11x + 24 = (x - 3)(x - 8)$.

উদা. 3. $x^2 + 6x - 40$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর,।

এস্থলে, যে সংখ্যা তুইটির গুণফল =-40 এবং সমষ্টি =+6, তাহাদিগকে নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন যে যে সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল =-40, তাহারা যথাক্রমেঃ (i) 1 ও -40, (ii) -1 ও 40, (iii) 2 ও -20, (iv) -2 ও 20, (v) 4 ও -10, (vi) -4 ও 10, (vii) 5 ও -8, (viii) -5 ও 8. ইহাদের মধ্যে, যে সংখ্যা তুইটির সমষ্টি +6, তাহারা স্পষ্ঠতঃ -4 ও +10. স্থৃতরাং, -4 ও +10 ই নির্দেয় সংখ্যা। স্থৃতএব, $x^2+6x-40=(x-4)(x+10)$.

টীকা। পরিন্ধাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক সংখ্যার যোগফল ধনাত্মক হইতে হইলে, উহাদের মধ্যে যেটির পরমমান (absolute value) বেশী, সেইটিই ধনাত্মক হইবে। এইটুকু মনে রাখিলে, প্রথমেই (i), (iii), (v) ও (vii) এ উল্লিখিত সংখ্যাদ্বয়কে বাদ দেওয়া যাইত।

• উদা. 4. $x^2 - 5x - 36$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এন্থলে, প্রর্নাপ তুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি = -5 এবং
, গুণফল = -36,, স্পষ্টতঃই, এইরূপ সংখ্যাদ্বয়ের একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক
হইবে, এবং ঋণাত্মক সংখ্যাটি ধনাত্মকটি হইতে বড় হইবে। এখন, যে যে সংখ্যাদ্বরের
গুণফল = -36, এবং ঋণাত্মক সংখ্যাটির পরমমান বেশী, তাহারা যথাক্রমে, (i) 1 ও
— 36, (ii) 2 ও -18, (iii) 3 ও -12, (iv) 4 ও -9; ইহাদের মধ্যে আবার
যে সংখ্যাদ্বরের সমষ্টি -5, সেই সংখ্যাদ্বর স্পষ্টতঃই +4 ও -9 হইবৈ।

• অতএব, $x^2 - 5x - 36 = (x^2 + 4)(x - 9)$.

উদা. 5. $a^2 + 7ab + 12b^2$ কে উৎপাদকে 'বিশ্লেষণ কর।

তুইটি সংখ্যা p ও q যদি এরপে নির্ণয় করা যায় যে, p+q=7 এবং pq=12, তাহা হইলে, নির্ণেয় উৎপাদক তুইটি স্পষ্টতঃ a+pb এবং a+qb হইবে। \downarrow ,

वी-->>

পূর্ববাহ্মরূপ যুক্তি অনুসারে সহজেই বুঝা যায় যে, 3 এবং 4 ই নির্নেয় সংখ্যাদ্বয় হইবে; কারণ, 3+4=7 এবং $3\times 4=12$.

অতএব, $a^2 + 7ab + 12b^2 = (a+3b)(a+4b)$.

উদা. 6. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $m^2 - 12mn + 20n^2$.

এস্থলে, এরূপ তুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি = -12 এবং গুণফল = +20. পূর্ব্বাত্মরূপ যুক্তি দারা বুঝা যায় যে, -10 ও -2 ই নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় হইবে।

অতএব, $m^2 - 12mn + 20n^2 = (m - 10n)(m - 2n)$.

উদা. 7. $a^4 - a^2 - 12$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

 a^2 এর পরিবর্ত্তে x ধরিলে, প্রদত্ত রাশি $= x^2 - x - 12$; এবং পূর্বব্রেদশিত নিয়মাম্মসারে, $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$.

জাতএব, $a^4 - a^2 - 12 = (a^2 - 4)(a^2 + 3)$; ... (1) জাবার, $a^2 - 4 = a^2 - 2^2 = (a + 2)(a - 2)$.

স্থাত্রাং, (1) হইতে, $a^4 - a^2 - 12 = (a + 2)(a - 2)(a^2 + 3)$.

উদা. 8. $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x)-18$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। x^2+2x এর পরিবর্ত্তে a ধরিলে, প্রদত্ত রাশি $=a^2-3a-18$, অতএব, =(a-6)(a+3).

মুতরাং, প্রাদত্ত রাশি = $\{(x^2 + 2x) - 6\}\{(x^2 + 2x) + 3\}$ = $(x^2 + 2x - 6)(x^2 + 2x + 3)$.

· · উদা. 9. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

 $(5a+b)^2 + (5a+b)(a+2b) - 20(a+2b)^2$.

5a+b এর পরিবর্ত্তে x এবং a+2b এর পরিবর্ত্তে y ধরিলে, প্রদত্ত রাশি $x^2+xy-20y^2$ তে পরিবত হয় ; এবং স্পষ্টই, $x^2+xy-20y^2=(z+5y)(x-4y)$.

অতএব, প্ৰাদত্ত রাশি = $\{(5a+b)+5(a+2b)\}\{(5a+b)-4(a+2b)\}$ = (10a+11b)(a-7b).

উদা. 10., $8x^2 + 2x - 3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম পদ্ধতি ঃ x^2 এর সহগ দারা, রাশিমালার ধ্রুবক (constant term)টিকে x আর্থাৎ যে পদিটিতে x, বা x এর কোন শক্তি নাই, সেইটিকে x গুণ কর।

এক্ষেত্রে, গুণফল = $3 \times (-3) = -24$.

এখন, এরপ তুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের গুণফল = -24° এবং সমষ্টি = +2, (অর্থাৎ x এর্থ্বী মহুর্গ)। স্পষ্টই, নির্ণেয় সংখ্যা তুইটি 6 ও -4 হুইবে।

অতএব, প্রদত্ত রাশি =
$$8x^2 + 6x - 4x - 3 = 2x(4x + 3) - (4x + 3)$$

= $(4x + 3)(2x - 1)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি:

প্রাণ
$$=8x^2+2x-3=\frac{1}{8}(8\times 8x^2+2\times 8x-3\times 8)$$

$$=\frac{1}{8}(a^2+2a-24)\;;\;\;[8x\;\text{এর পরিবর্তন a লিখিয়া]}$$
মপ্টেডঃ, $a^2+2a-24=(a+6)(a-4).$
মতএব, প্রাণ $=\frac{1}{8}(a+6)(a-4)=\frac{1}{8}(8x+6)(8x-4)$.
$$=\frac{1}{8}\{2(4x+3)\}\{4(2x-1)\}=(4x+3)(2x-1).$$

উলা. 11. $12x^2 + 7x - 10$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রথম পদ্ধতি ঃ x^2 এর সহগ দারা রাশিমালার ধ্রুবক-(constant term)টিকে (অর্থাৎ x-বর্জ্জিত পদটিকে) গুণ করিয়া, লব্ধ গুণফলকৈ এরূপ ছুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সনষ্টি =x এর সহগ হইবে।

এক্ষেত্রে, গুণফল = $12 \times (-10) = -120$; এবং পরীক্ষা করিয়া দেখা যায় যে, যে ত্ইটি সংখ্যার গুণফল = -120 এবং বীজগণিতীয় সমষ্টি = x এর সহগ, অর্থাৎ +7, তাহারা +15 এবং -8 হইবে।

অতএব, প্রান্থ নাশি =
$$12x^2 + 15x - 8x - 10 = 3x(4x + 5) - 2(4x + 5)$$

= $(4x + 5)(3x - 2)$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি:

প্রদত্ত রাশি =
$$\frac{1}{12}(12 \times 12x^2 + 7 \times 12x - 10 \times 12)$$

$$= \frac{1}{12}(a^2 + 7a - 120) ; \qquad [12x \text{ এর পরিবর্তন্ত } a লিখিয়া]$$
স্পষ্টিই, $a^2 + 7a - 120 = (a + 15)(a - 8)$.

অতএব, প্রাণি = $\frac{1}{12}(12x+15)(12x-8)=\frac{1}{12}\{3(4x+5)\}\{4(3x-2)\}$ = (4x+5)(3x-2),

উদা. 12. $13x^2 - 20ax + 7a^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

্ৰপ্ৰথম পদ্ধতিঃ ৱাশিৰ্মালার x-বৰ্জ্জিত পদটিকে x^2 এর সহগ দ্বারা গুণ কর। একৈত্রে, গুণফল = $13 \times 7a^2 = 91a^2$; এখন $91a^3$ কে এরপ তুইটি উৎপাদকে বিশ্বেষণ কর; যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি = x এর সহগ, অর্থাৎ -20a হইবে।

স্পষ্টিই দেখা যায় যে, নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয় –
$$7a$$
 এবং $-13a$ হইবে। অতএব, প্রদত্ত রাশি = $13x^2-13ax-7ax+7a^2$ = $13x(x-a)-7a(x-a)=(x-a)(13x-7b)$.

বিভীয় পদ্ধতি:

প্রাণি =
$$13x^2 - 20ax + 7a^2$$

$$= \frac{1}{18}(13 \times 13x^2 - 20a \times 13x + 13 \times 7a^2)$$

$$= \frac{1}{18}(y^2 - 20ay + 91a^2) \qquad [13x \, এর পরিবর্জে y লিখিয়া]$$

$$= \frac{1}{18}(y^2 - 13ay - 7ay + 91a^2)$$

$$= \frac{1}{18}\{y(y - 13a) - 7a(y - 13a)\}$$

$$= \frac{1}{18}(y - 13a)(y - 7a) ;$$

$$\therefore$$
 প্রাণি = $\frac{1}{18}(13x - 13a)(13x - 7a) = \frac{1}{18} \times 13(x - a)(13x - 7a)$

$$= (x - a)(13x - 7a).$$

প্রথমালা 48

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর 1. $x^2 + 3x + 2$. $x^2 + 5x + 6$. 3. a^2+4a+3 . 6. $x^2 - 7x + 12$. $x^2 + 7x + 10$. $4. \quad x^2 - 5x + 4.$ $x^2 + 8x + 15$. 9. $x^2 - 13x + 36$. 8. $x^2 - 2x - 15$. 10. $x^2 - 5x - 36$ 12. $x^2 - 22x + 40$. 11. $x^2 - 14x + 24$. 13. $x^2 + 7x - 30$. 15. $x^2 + 16x - 36$. 14. $x^2 + 2x - 48$. 17. $x^2 + 11x - 42$. 18. $x^2 + 14x - 72$. 16. $x^2 + 9x - 36$. 21. $x^2 - 29x - 96$. 20. $x^2 - 11x - 80$. 19. $x^2 - 3x - 40$. 23. $x^2 - x - 42$. **22.** $x^2 - 10x - 56$. 24. $x^2 - x - 72$. $x^2 + 22x + 120$: 26. $x^2 + 16x - 80$. 27. $x^2 - 21x - 72$. 30. $x^2 + 23x - 78$. **29.** $x^2 - 20x + 96$. 28. $x^2 + 5x - 84$. 32, $x^2 - 25x + 84$. 33. $x_1^2 - 26x + 88$. 31. $x^2 - 6x - 72$. 35. $x^2 - 2x - 80$. 36. $x^2 + 8x - 84$. 34. $x^2 + 7x - 120$. 39. $a^2 + 17a - 60$. 38. $m^2 - 9m - 90$. 37. $a^2 - a - 56$. **40.** $a^2 - 15a + 54$. **41.** $p^2 - 22p - 48$. **42.** $m^2 + m - 72$. **44.** $a^2 - 29a + 120$. 45. $x^2 + 7x - 78$. 43. $m^2 + 27m - 90$. 48. $x^2 + 12x - 64$. **47.** $a^2 - 19a + 60$. **46.** $a^2 - 49a - 102$. 54. $x^2 - xy - 42y^2$. **30.** $/x^2 + 8x - 105$. **49.** $a^2 - 26a - 120$. 53. $\sqrt{m^2 + mn - 30n^2}$. $a^2 + ab - 12b^2$ **52.** $a^2 - 12ab + 32b^2$. 57. $x^2 + 3xy - 40y^2$ **55.** $a^2 - 2ab - 15b^2$. \ **56.** $x^2 - 7xy - 8y^2$. **58.** $p^2 - 14pq + 48q^2$. **59.** $p^2 + 2pq - 80q^2$. **60:** $x^2 + 20xy - 96y^2$

61.
$$a^4 + 4a^2 - 5$$
. 62. $x^4 + 2x^2 - 15$. 63. $x^4 + 3x^2 - 28$. 64. $x^6 + 2x^3 - 3$. 65. $a^6 - 10a^3 + 16$. 66. $x^6 + 26x^3 - 27$. 67. $a^6 + 7a^3 - 8$. 68. $x^8 - 20x^4 + 64$. 69. $a^8 - 11a^4 - 80$. 70. $x^{12} - 7x^6 - 8$. 71. $(a^2 + 2a)^2 - (a^2 + 2a) - 2$. 72. $(x^2 + 3x)^2 + 3(x^2 + 3x) + 2$. 73. $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$. 74. $(a^2 - 3a)^2 - 3(a^2 - 3a) - 4$. 75. $(x^2 - 4x)^2 - 4(x^2 - 4x) - 5$. 76. $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$. 77. $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24$. 78. $(a^2 + 7a)^2 - 8(a^2 + 7a) - 180$. 79. $(a^2 + 6a)^2 - 32(a^2 + 6a) - 320$. 80. $(x^2 - 8x)^2 - 29(x^2 - 8x) + 180$. 79. $(a^2 + 6a)^2 - 32(a^2 + 6a) - 320$. 81. $2x^2 + x - 15$. 82. $6a^2 - a - 15$. 83. $8m^2 - 6m - 9$. 84. $6x^2 + 7xy - 24y^2$. 85. $10a^2 - 41ab + 21b^2$. 86. $12m^2 - mn - 20n^2$. 87. $12x^2 + 28xy - 5y^2$. 88. $20a^2 + ab - 30b^2$. 89. $18x^2 - 51xy + 35y^2$. 90. $12x^2 + 23xy - 24y^2$.

79. x^2+px+q এর আকারে প্রকাশ করা যায়, এই প্রকার রাশিসমূহকে দুইটি বর্গের অন্তর্করেশ প্রকাশ করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষ্ণ করা যায়:

কয়েকটি উদাহরণ দ্বারা উক্ত প্রণালী উত্তমরূপে বুঝান যাইবে।

উদা. 1.
$$x^2-7x+12$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। $x^2-7x+12=x^2-7x+(\frac{7}{2})^2-(\frac{7}{2})^2+12$ $[(\frac{7}{2})^2$ কে বোগ এবং বিয়োগ করিয়া} $=\{x^2-7x+(\frac{7}{2})^2\}-(\frac{49}{4}-12)=(x^2-\frac{7}{2})^2-\frac{1}{4}=(x-\frac{7}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$ $=\frac{5}{2}(x-\frac{7}{2})+\frac{1}{2}\}\{(x-\frac{7}{2})-\frac{1}{2}\}=(x-3)(x-4).$

, টীকা। $\sqrt{2}$ হা অবশ্যই লক্ষ্য করিতে হইবে যে, একটি পূর্ণ বর্গ পাইবার জন্ম, আমরা x^2-7x এর সহিত 7 এর অর্দ্ধেকের বর্গ (অর্থাৎ, x এর সহগের অর্দ্ধেকের বর্গ) যোগ করিয়াছি। সাধারণতঃ, x^2+2ax (অথবা x^2-2ax) এর সহিত a^2 যোগ করিলে, এতন্ত্রন্ধ রাশিমালা (অর্থাৎ যোগফলটি) একটি পূর্ণ বর্গ হইবে। $^\circ$

উপা. 2.
$$x^2 + 2xy - 8y^2 - 4z^2 + 12yz$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। প্রাদেও রাশিমালা = $(x^2 + 2xy + y^2) - (9y^2 + 4z^2 - 12yz)$ = $(x + y)^2 - (3y - 2z)^2$ = $\{(x + y) + (3y - 2z)\}\{(x + y) - (3y - 2z)\}$ = $(x + 4y - 2z)(x - 2y + 2z)$.

উপা. 3.
$$3x^2 + 11x - 4$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
$$3x^2 + 11x - 4 = 3(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{4}{8}) = 3\{x^2 + \frac{1}{3}x + (\frac{1}{8})^2 - (\frac{1}{8})^2 - \frac{4}{8}\}$$
$$= 3\{(x + \frac{1}{6})^2 - (\frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{4}{3})\} = 3\{(x + \frac{1}{6})^2 - \frac{169}{36}\}$$
$$= 3\{(x + \frac{1}{6}) + \frac{1}{6}\frac{3}{8}\}\{(x + \frac{1}{6}) - \frac{1}{6}\frac{3}{8}\}, \quad [\ \ \, \frac{1}{3}\frac{69}{6} = (\frac{1}{8})^2\}$$
$$= 3(x + 4)(x - \frac{1}{8}) = (x + 4)(3x - 1).$$

উদা. 4.
$$8x^2 - 10x + 3$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। $8x^2 - 10x + 3 = 8\{x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{3}{8}\} = 8\{x^2 - \frac{5}{4}x + (\frac{5}{8})^2 - (\frac{25}{64} - \frac{3}{8})\}$ $= 8\{(x - \frac{5}{8})^2 - \frac{1}{64}\} = 8\{(x - \frac{5}{8}) + \frac{1}{8}\}\{(x - \frac{5}{8}) - \frac{1}{8}\}$ $= 8(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{4}) = \{2(x - \frac{1}{2})\}\{4(x - \frac{3}{4})\}$ $= (2x - \frac{1}{4})(4x - 3)$.

উদা. 5.
$$2a^2 + 5ab - 12b^2$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
$$2a^2 + 5ab - 12b^2 = 2(a^2 + \frac{5}{2}ab - 6b^2)$$
$$= 2\left\{a^2 + \frac{5}{2}ab + \left(\frac{5b}{4}\right)^2 - \left(\frac{25b^2}{16} + 6b^2\right)\right\}$$
$$= 2\left\{(a + \frac{5}{4}b)^2 - \frac{121}{18}b^2\right\}$$
$$= 2\left\{(a + \frac{5}{4}b) + \frac{11}{4}b\right\}\left\{(a + \frac{5}{4}b) - \frac{11}{4}b\right\}$$
$$= 2(a + 4b)(a - \frac{3}{3}b) = (a + 4b)(2a - 3b).$$

ভিগা. 6.
$$ax^2 + (a^2 + 1)x + a$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
$$ax^2 + (a^2 + 1)x + a$$

$$= a\left\{x^2 + \frac{a^2 + 1}{a}.x + 1\right\}$$

$$= a\left\{x^2 + \frac{a^2 + 1}{a}.x + \left(\frac{a^2 + 1}{2a}\right)^2 - \left(\frac{a^4 + 2a^2 + 1}{4a^2} - 1\right)\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{a^2 + 1}{2a}\right)^2 - \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{4a^2}\right\}$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{a^2 + 1}{2a}\right) + \frac{a^2 - 1}{2a}\right\}\left\{\left(x + \frac{a^2 + 1}{2a}\right) - \frac{a^2 - 1}{2a}\right\}$$

$$= a\left(x + a\right)\left(x + \frac{1}{a}\right).$$

$$= (x + a)(ax + 1).$$

3

এইরূপভাবে, প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, $ax^{2}-(a^{2}+1)x+a=(x-a)(ax-1),$ $ax^{2}+(a^{2}-1)x-a=(x+a)(ax-1),$ $ax^{2}-(a^{2}-1)x-a=(x-a)(ax+1).$

টীকা। এই ফলগুলি মনে রাখা অবশুকর্ত্তব্য ; কারণ, ইহাদের সাহায্যে আমরা উপরোক্ত রাশিসমূহের অন্থরূপ আকারের যে কোন রাশিরই উৎপাদক অবিলম্থে লিখিতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, $3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)$,

$$4x^2 - 15x - 4 = (x - 4)(4x + 1),$$

 $5x^2 + 24x - 5 = (x + 5)(5x - 1)$; ইত্যাদি।

উদা. 7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

$$4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2$$
.

 x^2+2x+5 এর পরিবর্ত্তে a এবং x^2+6x এর পরিবর্ত্তে b লিখিয়া, প্রদন্ত রাশিমালা $=4a^2+17ab+4b^2$; এবং ইহা সহজেই দেখান যায় যে,

$$4a^2 + 17ab + 4b^2 = (a + 4b)(4a + b).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা

33. $2a^2 + 7ab - 15b^2$.

$$= \{(x^2 + 2x + 5) + 4(x^2 + 6x)\}\{4(x^2 + 2x + 5) + (x^2 + 6x)\}$$

$$= (5x^2 + 26x + 5)(5x^2 + 14x + 20)$$

$$= (x + 5)(5x + 1)(5x^2 + 14x + 20).$$

34. $6x^2 - 13xy + 6x^2$

প্রথমালা 49

পূর্ব্বোক্ত নিয়মামুসারে, নিম্নলিশিত রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

1.
$$x^2 + 4x + 3$$
. 2. $x^2 + 6x + 5$. 3. $x^2 + 8x + 15$.
4. $x^2 - 10x + 21$. 5. $x^2 - 2x - 48$. 6. $x^2 - 4x - 45$.
7. $x^2 - 12x + 32x$ 8. $x^2 - 6x - 55$. 9. $a^2 + 2ab - c^2 + 2bc$.
10. $x^2 + 2x - y^2 + 2y$. 11. $x^2 + 6x - y^2 + 4y + 5$.
12. $x^2 + 4ab - 5b^2 - c^2 + 6bc$. 13. $x^2 - 6xy + 5y^2 - z^2 + 4yz$.
14. $x^2 - 10xy + 16y^2 - 4z^2 + 12yz$. 15. $a^2 - 12ab - 13b^2 - 9c^2 + 42bc$.
16. $x^2 + 12xy - 9z^2 + 36yz$. 17. $x^2 - 14xy - 15y^2 - 25z^2 + 80yz$.
18. $2x^2 - 5x - 3$. 19: $3x^2 - 5x - 2$. 20. $3x^2 + 14x + 8$.
21. $4x^2 + 7x - 2$. 22. $6x^2 + x - 2$. 23. $6x^2 - 5x - 4$.
24. $6x^2 + 7x - 3$. 25. $8x^2 + 2x - 15$. 26. $4x^2 + 4x - 35$. 27. $6x^2 - x - 12$. 28. $3x^2 - 16x - 12$. 29. $2x^2 - 9x - 35$. 30. $2x^2 + 5x - 42$. 31. $3x^2 + 13x - 30$. 32. $12x^2 + x - 6$.

```
, 35. 6m^2 - 11mn - 10n^2.
                                                 36. 3p^2 + 5pq - 12q^2.
37. 8a^2 - 14ab - 15b^2.
                                               38. 10m^2 + 11mn - 6n^2.
 39. 12x^2 + 13xy - 4y^2.
                                                40. 15a^2 - 11ab - 12b^2.
 41. 2a^2 - 5ab + 2b^2. 42. 3a^2 - 8ab - 3b^2. 43. 3x^2 + 8xy - 3y^2.
 44. 4a^2 + 15a - 4. 45. 4a^2 - 17ab + 4b^2. 46. 5x^2 - 24x - 5.
 47. 6x^2 - 26xy + 5y^2. 48. 6x^2 + 37x + 6. 49. 6a^2 + 35ab - 6b^2.
        6a^2 - 35ab - 6b^2, 51. 7a^2 - 50ab + 7b^2. 52. 7a^2 + 48ab - 7b^2. 7a^2 - 48ab - 7b^2 54. 8x^2 + 63xy - 8y^2. 55. 9x^2 - 82xy + 9y
 50.
 53.
                                                    57.\sqrt{2(a+b)^2+3(a+b)-2}.
       \begin{aligned} &10x^2 + 99xy - 10y^2,\\ &2(x^2 + y^2)^2 - 3xy(x^2 + y^2) - 2x^2y^2. \end{aligned}
 56.
 58.
(59) 2(a^2 + b^2)^2 + 5ab(a^2 + b^2) + 2a^2b^2.

\begin{array}{ll}
\mathbf{760.} & 4(x^2 - 4xy + y^2)^2 + 15xy(x^2 - 4xy + y^2)
\end{array}

                                                       62. 8a^4 - 14a^2b^2 - 9b^4.
61. 2x^4 - 5x^2 - 12.
                                                   64. 8x^6 - 65x^3 + 8.
63. 9a^4 + 2a^2b^2 - 32b^4.
 65. 4a^8 - 17a^4b^4 + 4b^8.
```

ত্ৰধ্যাদশ অথ্যায়

সহজ অভেদাবলী (Easy Identities) '

98. 62 নিয়মে 'আভেদ (identity)' কাহাকে বলে, তাহা ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। বস্তুতঃ, সমতাচিহ্ন দ্বারা সম্বদ্ধ ছইটি রাশির সমতা যদি রাশিদ্বরের অন্তর্গত অক্ষর বা অক্ষরসমূহের যে কোন মানেরই জন্ম রক্ষিত হয়, তবে ঐরপ সমতাকে 'অভেদ' বলে; এবং রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে ঐ অভেদের পার্ম্ম (side) বা প্রক্ষ (member) বলে। যথা,

5x=2x+3x একটি অভেদ; কারণ, 5x এবং 2x+3c এই রাশি ছুইটি, x এর সকল প্রকার মানের জন্মই, প্রস্পের ম্মান। 5x এবং, 2x+3x এই রাশিদ্যকে অভেদটির পার্শ্ব বা পক্ষ বলৈ; 5x কে বাম পক্ষ (left-hand member) এবং 2x+3x কে ডাম্ম পক্ষ (right-hand member) বলা হয়।

তজপ, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ একটি অভেদ; কারণ, a ও b এর সকল প্রকার মানের জন্মই ঐ সমতা বজায় থাকে। বস্তুতঃ, চতুর্থ অ্ধ্যায়ে বর্ণিত সকল স্থা (formula)ই এক একটি অভেদ।

99. অভেদের তুই পার্শ্বস্থিত রাশিদ্বয়ের সমতা প্রতিপন্ন করিতে পারিলেই অভেদটি প্রতিষ্ঠিত (established) হইল, বলা হয়।

অভেদ প্রতিষ্ঠিত করিতে হইলে, উহার পার্শ্বর্য়কে সরল করিয়া প্রমাণ করিতে হয় যে, উহারা পরস্পর সমান। একাদশ অধ্যায়ে বর্ণিত স্থ্যাবলীর সাহায্যে, পক্ষন্বয়ের যে কোনটিকে, সরল-করণ এবং রূপাস্তর-করণ প্রক্রিয়া দারা (by simplification and transformation) অপরটিতে পরিণত করাই উৎস্কৃত্তর পদ্ধতি।

কোন কোন সময়ে, অভেদের পার্শ্বদ্বয়ন্থিত পদসমূহের কতিপয়ের পরিবর্ত্তে একটি অক্ষর লিথিয়া অভেদটিকে প্রয়োজন মত সরল আকারে প্রকাশ করা যায়। আবশ্যক হইলেই, এইরূপভাবে প্রকাশ করা কর্ত্তব্য ।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দারা প্রক্রিয়া-প্রণালী উত্তমরূপে বুঝিতে পারা যাইবে:

উদা. 1. প্রমাণ কর যে,
$$(a+3b)^2+(a-3b)^2=2a^2+18b^2$$
.

বাম পক্ষ = $(a^2+6ab+9b^2)+(a^2-6ab+9b^2)$ [নিয়ম 54 ও 55]

= $2a^2+18b^2$.

$$a^{2} + b^{2} + c^{2} - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(b-c)^{2} + (c-a)^{2} + (a-b)^{2}].$$

$$\exists \exists \exists [2a^{2} + 2b^{2} + 2c^{2} - 2ab - 2bc - 2ca]^{b}$$

$$= \frac{1}{2}[(a^{2} + b^{2}) + (b^{2} + c^{2}) + (c^{2} + a^{2}) - 2ab - 2bc - 2ca]$$

$$\vdots = \frac{1}{2}[(b^{2} - 2bc + c^{2}) + (c^{2} - 2ca + a^{2}) + (a^{2} - 2ab + b^{2})]$$

$$= \frac{1}{2}[(b-c)^{2} + (c-a)^{2} + (a-b)^{2}].$$
[Fight 55]

উলা. 3. প্রমাণ কর যে,

 $(x+5y-3z)^3+(x-5y+3z)^3+6x(x+5y-3z)(x-5y+3z)=8x^3.$

x+5y-3z এর পরিবর্তে, α , এবং x-5y+3z এর পরিবর্তে b ধরিয়া, দেখা যায় যে,

বাম পক্ষ =
$$a^3 + b^3 + 6x.ab$$
 ,
$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
 ,
$$[(মহেতু, a+b=(x+5y-3z)+(x-5y+3z)=2x]$$
 = $(a+b)^3$ [] নিয়ম 57]
$$= (2x)^3 = 8x^3.$$

উ জা. 4. প্রমাণ কর যে,
$$(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)=0$$
.

বাম পক্ষ = $(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)$ [নিয়ম 56]

$$=b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2$$
= 0.

উপা. 5. s=a+b+c ইইলে, প্রমাণ কর যে, $(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1902] as+ba=a(a+b+c)+bc $=a^2+a(b+c)+bc=a^2+ab+ac+bc$ =a(a+b)+c(a+b)=(a+b)(a+c). [নিয়ম 61] . এইরপভাবে, $bs+ca=b(a+b+c)+ca=b^2+b(a+c)+ac$ $=b^2+ab+bc+ac=(b+c)(b+a)$; এবং $cs+ab=c(a+b+c)+ab=c^2+c(a+b)+ab$ $=c^2+ca+cb+ab=(c+a)(c+b)$.

ে বাম পক্ষ =
$$(a+b)(a+c)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)$$

= $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$.

উপা. 6. s = a + b + c ইইলে, প্রমাণ কর বে, $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = s(s - 2a)(s - 2b)(s - 2c)$.

বাম পক্ষ = $(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ $= \{2ab + (a^2 + b^2 - c^2)\}\{2ab - (a^2 + b^2 - c^2)\}$ $= \{(a^2 + 2ab + b^2) - c^2\}\{c^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)\}$ $= \{(a + b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a - b)^2\}$ = (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a - b) = (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b) = (a + b + c)(a + b + c - 2c)(c + a + b - 2b) $\times (b + c + a - 2a)$ = s(s - 2a)(s - 2b)(s - 2a) = s(s - 2a)(s - 2b)(s - 2c).

7.
$$2s = a + b + c$$
 ইইলে, প্রমাণ কর যে, $(s-a)^3 + (s-b)^3 + 3(s-a)(s-b)c = c^3$. এখন, $a = 2s - (a+b) = (s-a) + (s-b)$.

 $= -3ab(a+b) = 3ab\{-(a+b)\} = 3abc.$

টীকা। স্পষ্টতঃ, a+b+c=0 হইলেই, $a^3+b^3+c^3=3abc$ অভেদটি সত্য হয়। এইরূপ, যে সকল অভেদাবলী, তৎসংশ্লিষ্ঠ প্রতীকসমূহের কতকগুলি নির্দিষ্ট মানের জন্মই কেবলমাত্র সত্য, হয়, তাহাদিগকে সাপেক্ষ অভেদাবলী (conditional identities) বলে।

উদা: 11.
$$a+b+c=0$$
 ইইলে, প্রমাণ কর যে, $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$. [এলাহাবাদ, 1923.] যেহেডু, $a+b+c=0$, অতএব পক্ষান্তর করিয়া, $a=-(b+c),\ b=-(c+a),\ c=-(a+b)$; \therefore $a^2+ab+b^2=\{-(b+c)\}^2+\{-(b+c)\}b+b^2,$ [যেহেডু $a=-(b+c)$] $=(b+c)^2-(b+c)b+b^2$ $=b^2+2bc+c^2-b^2-bc+b^2$ $=b^2+bc+c^2$. আবার, $a^2+ab+b^2=a^2+a\{-(c+a)\}+\{-(c+a)\}^2,$ [যেহেডু $b=-(c+a)$] $=a^2-a(c+a)+(c+a)^2$ $=a^2-ca-a^2+c^2+2ca+a^2$ $=c^2+ca+a^2$.

অন্য পদ্ধতিঃ

$$a^2 + ab + b^2 = a(a+b) + b^2 = \{-(b+c)\}(-c) + b^2 = (b+c)c + b^2$$

 $b^2 = bc + c^2 + b^2 = b^2 + bc + c^2$.

জাবার,
$$b^2 + bc + c^2 = b(b+c) + c^2 = \{-(c+a)\}(-d) + c^2$$

= $(c+a)a + c^2 = ca + a^2 + c^2 = c^2 + ca + a^2$.

সাত্রবাব, $a^2 + ab + b^2 = b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2$.

উপা. 12. x=b-c+a, y=c-a+b এবং z=a-b+c হইলো, প্রমাণ . কর যে, (b-a)x+(c-b)y+(a-c)z=0.

(4 श्रा,
$$(b-a)x = (b-a)(b-c+a) = (b-a)\{(b+a)-c\}$$

 $= (b-a)(b+a) - (b-a)c = b^2 - a^2 - bc + ac$; [FIRT 56]
 $(c-b)y = (c-b)(c-a+b) = (c-b)\{(c+b)-a\}$
 $= (c-b)(c+b) - (c-b)a = c^2 - b^2 - ca + ab$;
 $(a-c)z = (a-c)(a-b+c) = (a-c)\{(a+c)-b\}$
 $= (a-c)(a+c) - (a-c)b = a^2 - c^2 - ab + bc$;

ে
$$(b-a)x+(c-b)y+(a-c)z$$
 $=b^2-a^2+c^2-b^2+a^2-c^2-bc+ac-ca+ab-ab+bc=0$.

উপা. 13. $x=b+c$, $y=c+a$ এবং $z=a+b$ ইইলে, প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$.

বাম পক্ষ = $\frac{1}{2}[2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy]$
 $=\frac{1}{2}[(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)]$
 $=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$ [নিয়ম 55]
 $=\frac{1}{2}[\{(b+c)-(c+a)\}^2+\{(c+a)+(a+b)\}^2+\{(a+b)-(b+c)\}^2]$
 $=\frac{1}{2}[(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2]$
 $=\frac{1}{2}[(b^2-2ba+a^2)+(c^2-2cb+b^2)+(a^2-2ac+c^2)]$ [নিয়ম 55]
 $=\frac{1}{2}[(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)]$
 $=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$.

1. 14. $2s=a+b+c$ ইইলে, প্রমাণ কর যে, $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2$. [এলাহাবাদ, 1926.]

বাম পক্ষ = $(s^2-2as+a^2)+(s^2-2bs+b^2)+(s^2-2cs+c^2)+s^2=4s^2-2sx+2s+a^2+b^2+c^2$

প্রথমালা 50

 $=4s^2-4s^2+a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2$

দেখাও যে:

1.
$$(a^2 + ax - x^2)(a^2 - ax + x^2) = a^4 - a^2x^2 + 2ax^3 - x^4$$
.
2. $(a^2 - ax + x^2)(ax - a^2 + x^2) = x^4 - a^2x^2 + 2a^3x - a^4$.
3. $(a + b + c)(a - b - c) + (b + c - a)(a - b + c) = 2b(a - b - c)$.
4. $2(x^3 - x) + 3x(x + 1) = x(x + 1)(2x + 1)$.
5. $x^4 + x + x(x + 1)(2x + 1) - 2x(x + 1) = x^2(x + 1)^2$.
6. $(a^2 + b^2)(a^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.
7. $(a + b)^2 - (c + d)^2 + (a + c)^2 - (b + d)^2 = 2(a + b + c)^4 d)(a - d)$.
8. $(a + b + c - d)(d - a - b + c) = c^2 - (a + b - d)^2$.

9.
$$(b+c)^2-a^2$$
 এবং $a^2-b^2-c^2+2bc$ এর গুণফল $2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$.

10.
$$(a+b+c)^2 - (a+b-c)^2 + (a+c-b)^2 - (b+c-a)^2 = 8ac$$
.

প্রমাণ কর যে:

11.
$$(a^2+b^2+c^2)^2-(b^2+c^2-a^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2$$

$$+(a^2+b^2-c^2)^2=8a^2b^2.$$

12.
$$(b-c+d+a)(d+a-b+c)+(c-d+a+b)(b+c+d-a)$$

= $4(ad+bc)$

13.
$$(b+c+a-d)(b+c-a+d) = 2(ad+bc) - (a^2-b^2-c^2+d^2).$$

14.
$$4(ad+bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$$
,
= $(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)$.

15.
$$(x-y+z)^2 + (y-z+x)^2 + (z-x+y)^2 + 2(x-y+z)(y-z+x) + 2(y-z+x)(z-x+y) + 2(z-x+y)(x-y+z) = (x+y+z)^2$$
.

16.
$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$$

= $(ay - bx)^2 + (cx - az)^2 + (bz - cy)^2$.

17.
$$(a+c)^3 - (b+c)^3 - 3(a+c)(b+c)(a-b) = (a-b)^3$$
.

18.
$$(x-ay+bz)^3+(x+ay-bz)^3+6x(x-ay+bz)(x+ay-bz)=8x^3$$
.

19.
$$4(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + 2(a+b)(b+c) + 2(b+c)(c+a) + 2(c+a)(a+b).$$

20.
$$8(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + (b+2c+a)^3$$

$$+6(a+b)(b+2c+a)(a+b+c).$$

21.
$$27(a+b+c)^3 = (a+3b+2c)^3 + (2a+c)^3$$

$$+9(a+3b+2c)(2a+c)(a+b+c).$$

22.
$$s=a+b+c$$
 ইইলে, দেখাও বে,
$$(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2=3\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}.$$

23.
$$ab + bc + ca = 0$$
 হইলে, প্রমাণ কর মে,

(i)
$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2$$
;

(ii)
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2abc(a+b+c)$$
.

24.
$$2s = x + y + z$$
 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$4y^2z^{2a} - (y^2 + z^2 - x^2)^2 = 16s(s - x)(s - y)(s - z).$$

$$(a+2b+3c)^2 + (a-b-3c)^2 + 2(a+2b+3c)(a-b-3c)$$

= $(3a+y+z)^2 + (a+y+z-b)^2 - 2(3a+y+z)(a+y+z-b)$.

27. (দেখাও বে,
$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$
.

28. প্ৰমাণ কর যে,
$$(x-y)^2 - (y-z)(z-x)$$

$$= (y-z)^2 - (z-x)(x-y^2)$$

$$= (z-x)^2 - (x-y)(y-z) \bullet$$

$$= -\{(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y)\}.$$

29. প্রমাণ কর যে,
$$(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 = 2(b-c)(c-a)$$
, $(b-c)^2 - (c-a)^2 - (a-b)^2 = 2(c-a)(a-b)$, $(c-a)^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 = 2(a-b)(b-c)$.

30. প্রমাণ কর যে,
$$(a-b)^2 + (a-b)(b-c) + (b-c)^2$$

= $(b-c)^2 + (b-c)(c-a) + (c-a)^2$
= $(c-a)^2 + (c-a)(a-b) + (a-b)^2$.

বিবিধ প্রশ্নমালা

1. নিয়লিখিত রাশিমালাকে (i) y এর অধ্যক্রমিক শক্তি অমুসারে, (ii) z এক্ উৰ্দ্ধক্ৰয়িক শক্তি অনুসারে, সাজাওঃ

$$x^3z + xy_{-2}^3 - x^3y - xy^2z - xz^3 + xyz^2 - 2yz^3 - 2y^3z$$
.

2.
$$x = -\frac{1}{2}$$
 এবং $y = 2$ হইলে,

$$\frac{4y}{5}(y-x)-35\left[\frac{3x-4y}{5}-\frac{1}{10}\left\{3x-\frac{5}{7}\left(7x-4y\right)\right\}\right]$$
 এর মান নির্ণয় কর।

3.
$$x - \frac{1}{x} = p$$
 হইলে, দেখাও যে, $x^3 - \frac{1}{x^3} = p^3 + 3p$.

 $m{\hat{A}}$. x^5-y^5 কে x-y দারা ভাগ করিলে,ভাগফল কত হয়, লিথ।

. 5.
$$(a+b+c)^2-(a-b+c)^2+(a+b-c)^2-(b+c-a)^2$$
 কে সরল কর এবং $a=b=c=-4$ হইলে, ইহার মান নির্ণয় কর।

6. $x^2-(x-y+z)(x+y-z)$, $y^2-(y-x+z)(y+y-z)$ এবং $z^2-(z-x+y)(z+x-y)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

7. (a-b+c+d)(a+b+c-d) কে A^2-B^2 এর আকারে পরিবর্ত্তন কর।

8. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

II

- 1. এরূপ একটি রাশি নির্ণয় কর, যাহা $ax^3+bx^2y+3cxy^2+dy^3$ হইতে যত বড়, $2ax^3+\frac{1}{4}(3a-b)x^2y+\frac{3}{4}(3a-c)xy^2+5dy^3$ এর চতুপুর্ণ হইতে তত ছোট।
 - 2. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের সমষ্টিকে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

 $(b-1)m^4 + am^3 + (c-b)m^2 - bm - 2$, $am^3 - (c-a)m^2 + (a+b)m + 1$ এবং $(a-b+1)m^4 - (2a-b)m^3 + (a+b)m^2 - (a-2b)m + 1$.

- $oldsymbol{y}_{3.} \quad x^{rac{2}{3}} + 2x^{rac{1}{2}} + 3x^{rac{1}{3}} + 2x^{rac{1}{6}} + 1$ কে $x^{rac{1}{3}} 2x^{rac{1}{6}} + 1$ দারা গুণ কর।
 - 4. প্রমাণ কর বে, $\{(ac+bd)x+(ad-bc)y\}^2+\{(ac+bd)y-(ad-bc)x\}^2$ = $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(x^2+y^2)$.
- 5. x-a, x-b ও x-c এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। ইহা হইতে দেখাও $_{1}$ যে, $(x-3)^{3}=x^{3}-9x^{2}+27x-27.$
 - ${f 6}, \quad x^5 px^4 + qx^3 qx^2 + px 1$ কে x 1 দারা ভাগ কর।
- 7. $a^6+a^5b-a^3b^3+ab^5+b^6$ ও a^2-ab+b^2 এর গুণফলকে $a^4-a^2b^2+b^4$ দারা ভাগ করিয়া ভাগফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, ইহা $(a^2+b^2)^2$ হইতে a^2b^2 পরিমিত ছোট।
- ৪ উত্পাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i)
$$ab - ac - b^2 + bc$$
; (ii) $b^2 - 12ac - 4a^2 - 9c$

 $(\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a})x^3+(\sqrt{bc}-\sqrt{ca}+\sqrt{ab})x^2+(\sqrt{abc}-2m+n)x+3u,$ $(\sqrt{c}-\sqrt{a}+\sqrt{b})x^3+(\sqrt{ca}-\sqrt{ab}+\sqrt{bc})x^2+(\sqrt{abc}-2n+m)x+2(v-u)$ এবং $(p-2\sqrt{b})x^3+(q-2\sqrt{bc})x^2+(m+n+r-2\sqrt{abc})x+(s-u-2v)$ এর যোগফল নির্ণয় কর।

- 2. $a(a^2+b^2)$ হইতে $3a^3-5a^2b+2b^3$, $8a^2b-3b^3+2ab^2$, $5ab^2-4a^3-3a^2b$ এবং $2a^3-6ab^2+4b^3$ এব সমষ্টি বিয়োগ কর।
 - 3. (a+b=8) এবং ab=5 হইলে, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর।
- 4. b = -69, c = 8 ইইলে, $49c^2 + 9(a + b)^2 42(a + b)c$ এর মান

- 5. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ কে y^2-xz-z^2+xy ছারা ভাগ
- 6. $4a-3+16a^2+64a^3$ কে $(A-B)+(A^2-B^2)^4+(A^3-B^3)$ এর আকারে পরিবর্ত্তিত করিয়া উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
 - 7. (74) $(1+x+x^2)^2-(1-x+x^2)^2=4x(1+x^2)$.
- 8. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n}{2} s$ হৈছে, দেখাও যে, $(s a_1)^2 + (s a_2)^2 + (s a_3)^2 + \cdots + (s a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2$.

IV

- 1. p=-m এবং q=l ধরিয়া লইয়া, $(l^2r-3lmn+2m^3)p^3+3(lmr+m^2n-2ln^2)p^2q+3(2m^2r-lnr-mn^2)pq^2+(3mnr-lr^2-2n^3)q^3$ েক সরল কর।
- 2. $\frac{1}{3}a^3x^4 + 5\cdot 7a^2bx^3 3\cdot 257ab^2x^2 + \frac{5}{3}b^3x + 9$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল, $4\cdot 7a^2bx^3 007ab^2x^2 + 2\frac{3}{3}b^3x 5\frac{2}{3}a^3x^4 + 6$, $5\frac{1}{3}b^3x 3\frac{1}{3}a^2bx^3 + a^3x^4 05ab^2x^2 + 11$ এবং $2a^3x^4 1\frac{2}{3}a^2bx^3 6\cdot 2ab^2x^2 10\frac{1}{3}b^3x 20$ এর সমষ্টির সমান হইবে ?
- 3. $a^{\frac{5}{2}} 2a^2b^{\frac{1}{3}} + 4a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{2}{3}} 8ab + 16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}} 32b^{\frac{5}{3}}$ কে $a^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{3}}$ দারা খণ কর।
 - 4. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে a এর অধ্যক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাও:
 - (i) $a^3 + b^3 + c^3 3abc$; (ii) $a^2(b-c) + b^2(c-q) + c^2(a-b)$; (iii) $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$.
- •5. x+a, x+b এবং x+c এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর। ইহার সাহায্যে (x-7)(x+b)(x-12) তে x^2 এবং x এর সহগ তুইটি নির্ণয় কর।
 - **৪.** প্রমাণ কর যে, (ab+cd+ac+bd)(ab+cd-ac-bd)

$$=a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2.$$

- 7. a=q+r+s, b=r+s-p এবং c=p+q+r হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc=r^2$.
- 8. $a^3 + 8b^3 + 27c^3$ —18abc কে $a^2 + 4b^2 + 9c^2 6bc 3ca 2ab$ দারা ভূগিগ কর।
 - 1. a = 46, এবং b = -37 হইলে, $49a^2 + 126ab + 81b^2$ এই মান নির্ণয়

- 2. এমন একটি বাশিমালা নির্ণয় কর, যাহা $bx^4y dx^2y^3 fy^5$ হইতে যত ছোট, ax^5 $-fcx^3y^2 + exy^4$ হইতে ঠিক তত বড়।
 - 3. $\sqrt{2s} = a + b + c$ হইলে, দেখাও যে,

$$(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
.

- **4.** সরল কর : $(5a-7c)^3+(8c-3a)^3+3(2a+c)(5a-7c)(8c-3a)$.
- 5. $(2x^3-x^2+3x-4)(2x^3+x^2+3x+4)+(2x^3+x^2-3x+4)$ × $(2x^3+x^2+3x-4)$ কে হস্ত আকারে প্রকাশ কর।
- **6.** GRATE CR, $\frac{|x^8+x^4+1|}{x+\sqrt{x+1}} = (x-\sqrt{x+1})(x^2-x+1)(x^4-x^2+1).$
- 7. a-b কে $a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}$ দারা ভাগ কর।
- 8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
 - (i) $6a^4x^2 + a^3x 6a^3x^3 a^2x^2$; (ii) $xy(1+z^2) + z(x^2+y^2)$.

VI

- 1. 8765943 × 8765943 8765938 × 8765938 এর মান নির্ণয় কর।
- ${f 2}.$ a=29, এবং b=-23 হইলে, $27a^3+108a^2b+144ab^2+64b^3$ এর মান নির্ণয় কর।
- 3. $a^3+b^3+c^3-3abc$ কে a+b+c দারা ভাগ কর ; এবং ইহার সাহায্যে দেখাও বে, $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$.
- **4.** $(ax+b)^2+(cx+d)^2+(bx-a)^2+(dx-c)^2$ কে $a^2+b^2+c^2+d^2$ দীরা ভাগ করিলে, ভাগফল কত হইবে ?
- 5. (x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+34 কে তুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর; ইহার সাহায্যে দেখাও যে, উহা সর্কাদাই একটি ধনরাশি, এবং $x^2-7x+9=0$ হইলে, ইহার মান 25 হইবে।
 - 6. $(a^2-b^2-c^2+d^2)^2-4(ad-bc)^2$ কে চারিটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
 - 7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করঃ (i) $a^2-2ab+b^2+2a-2b$; (ii) $6a^2-ab-b^2+6a-3b$; (iii) $15x^2-4xy-4y^2+10x+4y$.
 - 8. $(2x-y)^2a^4-(x+y)^2a^2x^2+2(x+y)ax^4-x^6$ কে $(2x-y)a^2-(x+y)ax+x^3$ দাবা ভাগ কর
- VII1. x+y+z=8 এবং $x^2+y^2+z^2=50$ হইলে, xy+yz+zx এর মান

- 2. প্ৰাণ কর যে, $(2a-3b)^2 + (3b-5c)^2 + (5c-2a)^2$ = 2(2a-3b)(2a-5c) + 2(3b-5c)(3b-2a) + 2(5c-2a)(5c-3b).
- 3. $x+y+z-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ এবং $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}}$ এর গুণফল .নির্ণয় কর।
- 4. $a^2(x^2-a^2)-ab(x+a)^2+b(x^3+a^3)$ কে $a^2(x-a)+bx(x-2a)$ দ্বাং! ভাগ কর।
 - 5. দেখাও বে, $(16x^5 20x^3 + 5x)^2 + (1 x^2)\{16(1 x^2)^2 20(1 x^2) + 5\}^2 = 1.$
- •6. x+y+z, x-y+z, x+y-z• এবং z-x+y এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।
 - 7. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করঃ (i) $6x^2 + x 15$; (ii) $35(x-y)^2 41(x-y) + 12$; (iii) $11x^2 54xy^2 + 63y^4$.
- 8. x+y+z=0 ইইলে, দেখাও বে, (x+y)(y+z)(z+x)=-xyz এবং $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

VIII

- ়ে 1. গুণফলে x^2 -বিশিষ্ট পদটি পর্যান্ত রাখিয়া, $1+ax+rac{a(a-1)}{2}x^2$ এবং $1+bx+rac{b(b-1)}{2}x^2$ এব গুণফল লিখ।
- 2. x+y+z=15 এবং xy+yz+zx=85 হইলে, $x^2+y^2+z^2$ এর মান নির্ণয় কর।
 - 3. $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$ ইইলে, দেখাও বাঁ, (ad bc)(ad + bc) = (a c)(a + c).
 - 4. $(ax + by)^3 + (ax by)^3 + (bx ay)^3 + (bx + ay)^3$ কে $(a + b)^2x^2$ $3ab(x^2 y^2)$ ছার ভাগ কর।
 - $x + \frac{1}{x} = a$ 'হইলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এবং $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর।
 - ' 6. bx = ay হইলে, প্রফাণ কর যে, $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ax + by)^2$. [বোষাই প্রবেশিকা, 1910.]
 - 7. ($(x^2+y^2)(x^2+z^2) + 2x(x^2+yz)(y+z) + 4x^2yz = (x^2+xy+xz+yz)^2.$
 - 8. উৎপাদ্ধকে বিজ্ঞাষণ করঃ $x^4 11x^2y^2 + y^4$. ্বিষাই প্রার্থিকা, 1897.]

IX

1.
$$a^2 + ax + x^2$$
 (Φ $a^2 - ax + x^2$) হারা গুণ কর।

2. (দেখাও যে,
$$(a^2+2ab+b^2-c^2)(a^2-2ab+b^2+c^2)$$

= $(a^2-b^2)^2+(4ab-c^2)c^2$.

4 3.
$$a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$$
 হইলে, দেখাও যে, $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = 1$.

4.
$$\left(x+\frac{2}{x}\right)^3$$
 এর বিস্তৃতি (expansion) লিথ $[$ অর্থাৎ, $x+\frac{2}{x}$ এর ঘন (cube) নির্ণয় করিয়া যে রাশিমালাটি পাওয়া যায়, সেইটি লিথ $]$ ।

5. দেখাও যে,
$$(a^2 + ab \sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab \sqrt{2} + b^2) = a^4 + b^4$$
.

6.
$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
 কে $ab+bc+ca$ দারা ভাগ কর।

7. (FINE CT)
$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$$

= $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

8.
$$(7+x)(8-x) - \frac{7x}{3} = 17x + 1 - x^2$$
 সমীকরণটি সমাধান কর।

† 1.
$$x + \frac{1}{x} = 2(a+m)$$
, $x - \frac{1}{x} = 2b$, $y + \frac{1}{y} = 2(c+n)$ এবং $y - \frac{1}{y} = 2d$ হইলে, $xy + \frac{1}{xy}$ এর মান নির্ণয় কর।

े 4. अतल कत:
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^4$$
.

3. GATS CI,
$$(1+a)^2(1+c^2)-(1+c)^2(1+a^2)=2(a-c)(1-ac)$$
.

$$^{''}$$
4. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,

$$(b^2-c^2)(b+c-2a)^2+(c^2-a^2)(c+a-2b)^2+(a^2-b^2)(a+b-2c)^2=0.$$

5.
$$a+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$$
 ($a+b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{4}}$ and ($a+b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}$ and ($a+b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{4}}$

6.
$$15x^2 - 41x + 14$$
 কে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

7.
$$\frac{x-1}{4} - \frac{2(x+1)}{9} + \frac{5(x-5)}{12} - 4 = \frac{x+1}{18}$$
, এই সমীকরণটি হইতে x এর মান নির্ণয় কর।

8. A এবং B উভয়েরই আয় সমান। A, তাহার আত্মের এক-পঞ্চমাংশ সঞ্চয় করিল; কিন্তু, B, বৎসরে A হইতে £80 অধিক ব্যয় করিয়া, চারি, বৎসর পরে £220 ঋণগ্রন্থ হইল। তাহাদের প্রত্যেকের আয় দত ?

চতুৰ্দ্দশ অধ্যায়

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)

(Highest Common Factor) [উৎপাদক সাহায্যে (by factorisation)]

100. সংজ্ঞাঃ ছই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশি, অপর কোন বীজগণিতীয় রাশি দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, শেষোক্ত রাশিটিকে পূর্ব্বোক্ত রাশিল্পয়ের, বা রাশিসমূহের, সাধারণ গুণনীয়ক বা উৎপাদক (common factor) বলে।

জ্ঞ হৈব্য। এস্থলে, 'রাশি' অর্থে অবশ্য মূলদ (rational) এবং অখণ্ড বা পূর্ব (integral) রাশিই স্থাচিত হইতেছে [নিয়ম 91 এর টীকা দেখী।

যে গুণনীয়ককে (অর্থাৎ উৎপাদককে) আর কোনরূপ গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, তাহাকে মৌলিক গুণনীয়ক (elementary factor) বলে।

তুই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশির ভিতর যতগুলি মৌলিক গুণনীয়ক (elementary factor) সাধারণ (common) থাকে, তৎসমূদ্রের গুণফলকে পূর্ব্বোক্ত রাশিদ্রের বা রাশিসমূহের **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** (Highest Common Factor) বলে, অর্থাৎ তুই বা তদধিক রাশির অন্তর্গত বৃহত্তম-সংখ্যক সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কের গুণফলকেই ঐ রাশিদ্রের, বা রাশিসমূহের, গরিষ্ঠ সাধারণ গুণক্ষীয়ক, বা সংক্ষেপে, গ. সা. গু. বলে। যথা, •

ে বৈহেতু, $6a^{g}b(x^{2}-1)=2\times 3\times a\times a\times b\times (x+1)\times (x-1),$ এবং $15ab^{2}(x^{2}-3x+2)=3\times 5\times a\times b\times b\times (x-1)\times (x-2),$

অতএব, 3, a, b এবং x-1 ই প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের ভিতর সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক।

' স্থতরাং, প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের **গ. সা. গু.** = 3ab(x-1).

- টীকা 1. প্রদত্ত রাশি তুইটির ভিতর নিম্নলিখিত গুণনীয়কগুলিও সাধারণ; বৃণা, 3a, b(x-1), ab, 3(x-1), 3ab ইত্যাদি। কিন্তু, ইহাদের কোনটিই শুহত্তম-সংখ্যক মৌলিক গুণনীয়ক দ্বারা উৎপন্ন নহে।
- টীকা 2. শপ্তই বুঝা যায় যে, আলোচ্য রণশিসমূহের ভিতর কোন অঙ্ক (numerical quantity) সাধারণ গুণনীয়কর্মপে বর্তমান না থাকিলে, উইাদের গ. সা. গু.

এর মান (degree), অন্তান্ত যে কোন সাধারণ গুণনীয়কের মান হইতে বড় হইবে। অতএব, যে রাশিসমূহের ভিতর কোন অঙ্ক সাধারণ গুণনীয়করূপে বর্ত্তমান নাই, তাহাদের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ককে, ঐ রাশিদ্বয়ের 'সর্ব্বোচ্চমানবিশিষ্ঠ ভাজক-রাশি (divisor of the highest degree)' রূপে বর্ণনা করা যায়।

- টীকা 3. কোন এক রাশি B অপর এক রাশি A দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, A ই স্পষ্টতঃ A এবং B এই রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. হইবে।
- ি টীকা 4. কোন র্রাশি H অন্ত কতিপয় রাশি A,B,C এর গ. সা. গু. হইলে, $\frac{A}{H}$, $\frac{B}{H}$, $\frac{C}{H}$ প্রভৃতি রাশিসমূহের (,অর্থাৎ, A, B, C প্রভৃতিকে H দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলসমূহের) কোন গুণনীয়ক, সাধারণ (common) থাকিতে পারে না।
- টীকা 5. তুই বা তদধিক রাশির প্রত্যেকটিতে, কোন মৌলিক গুণনীয়কের যে সর্ব্বোচ্চ শক্তি সকল রাশির ভিতরই সাধারণ, উক্ত গুণনীয়ক সেই (সর্ব্বোচ্চ) শক্তিবিশিষ্ট হইয়া রাশিসমূহের গ. সা. গু. তে গুণনীয়কর্মপে বর্ত্তমান থাকিবে।
- টীকা 6. $A=p\times q$ এবং $B=p^{'}\times q^{'}$ হইলে, এবং q ও $q^{'}$ এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক না থাকিলে, A ও B এর গ. সা. গু., এবং p ও $p^{'}$ এর গ. সা. গু., উভয়ই এক হইবে।
- **ীকা ৪.** m, A এর কোন গুণনীয়ক না হইলে, A ও B এর গ. সা. গু. এবং A ও mB এর গ. সা. গু., উভয়ই এক হইবে।
- 101. সব্রল ব্রাশিসমূহের পা. সা. শু. নির্পিয়ঃ সরল রাশিসমূহকে সহজেই মৌলিক গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়; কাজেই, উহাদের গা. সা. গু. নির্ণায় করা অত্যন্ত সহজ।
 - উদা. 1. $a^2b^4c^5$, $a^4b^3c^7$ এবং $a^3b^5c^4$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।
- এন্থলে, a, b, c ই রাশি তিনটির সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক ; এবং a, b, c এর যে যে উচ্চতম শক্তি রাশিত্রয়ের ভিতর সাধারণ, তাহারা যথাক্রমে a^2 , b^3 এবং c^4 .
 - ., স্থতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. = $a^2b^3c^4$.

উদা. 2. $24ab^2x^3y^4$, $36a^2x^4z^5$ এবং $240b^3x^6y^2z$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এখন,
$$24ab^2x^3y^4 = 3 \times 2^3 \times ab^2x^3y^4$$
; $36a^2x^4z^5 = \Omega^2 \times 3^2 \times a^2x^4z^5$; $240b^3x^6y^2z = 3 \times 5 \times 2^4 \times b^3x^6y^2z$.

ম্পষ্টতঃ, ইহাদের ভিতর 3, 2 এবং x, এই মৌলিক গুণনীয়ক তিনটিই সাধারণ : এবং এই মৌলিক গুণনীয়কগুলির যে যে উচ্চতম শক্তি সকণ রাশির ভিতরই সাধারণ. তাহারা যথাক্রমে $3, 2^2$ এবং x^3 .

মুত্রাং, নির্ণেয় গ্. সা. গু. = $3 \times 2^2 \times x^3 = 12x^3$

টীকা। রাশিসমূহের প্রত্যেকটিকে, তদন্তর্গত বিভিন্ন মৌলিক গুণনীয়কের শক্তির গুণফলরূপে প্রকাশ করার পর, যদি প্রথম রাশির সৈই সকল মৌলিক গুণনীয়ক লিখিত হয় যাহা অন্তান্ত রাশিতে বর্ত্তমান আছে, তাহা হইলেই, রাশিসমূহের সমুদ্র সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক পাওয়া যায়। যথা, উপরোক্ত উদাহরণে প্রথম রাশির মৌলিক গুণনীয়ক 3, 2, a, b, x এবং y এর মধ্যে 3, 2, এবং x অন্স রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটিতেই বৰ্ত্তমান আছে।

প্রথমালা 51

গ. সা. গু. নির্ণয় কর : •

1. a^2b^3 এবং a^3b^2 .

2. $12a^3b$ এবং $20a^2c^3$.

 $\mathbf{3.}^{1}9xy^{2}z^{3}$ and $24x^{3}y^{4}$. 4. $20a^{3}x^{4}y^{5}$ and $75a^{2}y^{3}$.

18m²n' • এবং 45m⁵n³. 6. 16a³x⁴y, 40a²y³x এবং 28x³a.

 $^{\text{L}}_{7}$, $^{\text{L}}_{24m^2np^5}$, $60mn^2p$ are $84m^3p^2$.

 $36a^2b^2c^4x^5$, $54a^5c^2x^4$ are $90a^4b^3c^5$.

10 $72a^3b^4c^5$. $96b^3c^4d^5$ এবং $120c^3d^4a^5$.

11. $48a^5x^4y^3z^2$, $60x^5y^4z^3b^2$, $72y^5z^4b^3a^2$ and $84z^5b^4a^3x^2$.

12. $75m^4n^3p^5q^6$, $90m^3n^5p^6q^4$, $105m^6n^4p^3q^5$ and $135m^5n^6p^4q^3$.

13. $54a^2b^5c^3d^4$, $72a^5b^2c^4d^3$, $108a^3b^4c^5d^2$ are $126a^4b^3c^2d^5$.

14. $18a^3x^4y^5$, $42a^4y^3z^4$, $60x_1^3y^4z^5$ and $78a^2x^4z^3$.

15. $32a^{2b}b^3x^4y^5z^6$, $40a^3x^5y^4z^8$, $56b^3x^2y^7z^4$, $72x^3a^5y^2z^3$

এবং $\sqrt{96}b^4a^8x^3y^3$.

- 102. যে সকল ব্রাশিকে সহজে প্রণীয়কে বিশ্লেষ্ঠ করা যায়, তাহাদের প. সা. প্র. নির্ণয় প্র্বিনিয়মে প্রদর্শিত প্রক্রিয়া-পদ্ধতি এই সকল ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।
 - খ. 1. $a^3b^2 + 2a^2b^3$ এবং $a^5b 4a^3b^3$ এর গ. সা. শু. নির্ণয় কর। $a^3b^2 + 2a^2b^3 = a^2b^2(a+2b);$ এবং $a^5b 4a^3b^3 = a^3b(a^2 4b^2) = a^3b(a+2b)(a-2b).$

অবং $a^2q - 4a^2b^2 = a^2b(a^2 - 4b^2) = a^2b(a + 2b)(a - 2b)$ অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. = $a^2b(a + 2b)$.

উদা. 2. $x^4y^2 + xy^5$ এবং $x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। $x^4y^2 + xy^5 = xy^2(x^3 + y^3) = xy^2(x+y)(x^2 - xy + y^2);$ এবং $x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3 = x^2y(x^2 + 2xy + y^2) = x^2y(x+y)^2.$ অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. = xy(x+y).

উদা. 3. $24(x^4-2ax^3-8a^2x^2)$ এবং $54(x^5-ax^4-6a^2x^3)$ এর গ. সা. শু, নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি = $3 \times 8 \times x^2(x^2 - 2ax - 8a^2) = 3 \times 2^3 \times x^2(x + 2a)(x - 4a)$. দ্বিতীয় রাশি = $6 \times 9 \times x^3(x^2 - ax - 6a^2) = 2 \times 3^3 \times x^3(x + 2a)(x - 3a)$. অতএব, নির্ণেয় গ. সা. শু. = $3 \times 2 \times x^2(x + 2a) = 6x^2(x + 2a)$.

উদা. 4. a^4-16x^4 এবং $\cdot a^3+a^2x-10ax^2+8x^3$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি = $(a^2 + 4x^2)(a^2 - 4x^2) = (a^2 + 4x^2)(a + 2x)(a - 2x)$. দ্বিতীয় রাশি = $(a - 2x)(a^2 + 3ax - 4x^2) = (a - 2x)(a - x)(a + 4x)$. সতএব, নির্ণেয় গ. সা. শু. = a - 2x.

টীকা। এই উদাহরণটি হইতে দেখা যায় যে, যদিও প্রথম রাশির স্থায় দিতীয় রাশিটিকে তত সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, তথাপি উহার গুণনীয়ক সম্বদ্ধে ধারণা করা কষ্টকর নহে; কারণ, ধরিয়া লইতে পারা যায় যে, প্রথম ও দিতীয় রাশির মধ্যে অন্ততঃ একটি গুণনীয়ক সাধারণ থাকিবে। অতএব, প্রথম রাশিকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করার পর, একটু পরীক্ষা করিয়া দেখিলেই বুঝা যায় যে, দিওীয় রাশির একটি গুণনীয়ক ব – প্রফ হুইবে। কাজেই, উক্ত বিশ্লেষণ-প্রক্রিয়া সহজসাধ্য।

প্রশ্নমালা 52

```
নিম্লিখিত রাশিগুলির গ্. সা. গু. নির্ণয় কর:
  1. a^3 - ab^2 and a^4 + 2a^3b + a^2b^2.
 2. \int_{x^5}^{x^5} y^3 - x^3 y^5 QR: x^5 y^4 + x^4 y^5.
     6(x^2-9) এবং 15(x^3+27).
 12(a^6-a^2b^2c^2) এবং 20(a^4b^2c^2+a^2b^3c^3).
 5.5m^6n^3-2m^5n^4+m^4n^5 QR(m^2n-mn^2)^3.
 6. 4a^4x - 9a^2x^3 and 4a^2x^2 + 6ax^3.
18a4b3-32a2b5 এবং 18a4b2+24a3b3.
 10% 48x^2a^2(x+a)^2(x^2a^2-xa^3) এবং 64(x^5a^2-x^2a^5)(x^3a+x^2a^2).
11. 24(x^3-a^3) এবং 40(x^4+x^2a^2+a^4).
    56(x^6a^2-x^2a^6)  (43° 72(x^5a^3+3a^5x^3+2a^7x)).
    30(a^2 + 4ab + 3b^2) and 42(a^2 + ab - 6b^2).
     28(x^3 - 3x^2 - 10x) এবং 52(x^4 - 8x^3 + 15x^2).
15.4
     x^4y + 3x^3y^2 - 18x^2y^3 এবং x^3y^2 + 10x^2y^3 + 24xy^4.
    a^4x^3 - 4a^3x^4 - 12a^2x^5 এবং a^5x^2 + 8a^4x^3 + 12a^3x^4.
     4x^3 + 12x^2 + 9x এবং 4x^2 - 9x - 19.
    a^2 - ab - 2b^2 এবং a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3.
   x^2 + 3x - 10 (43° x^3 - x^2 - 14x + 24.
19.
21. (a^3 - b^3)(b + b)^2, a^4 - b^4 and 3a^4 + 2a^3b - 5a^2b^2.
22. (2x-3)^2(x^2+x-2), 4x^2-x-18 and 2x^2-23x-54.
23. \cdot 8(27a^5b + a^2b^4), 12(6a^4b^2 - 7a^3b^3 - 3a^2b^4) age
                                      40(3a^3b^2+13a^2b^3+4ab^4).
24. x^4 - 13x^2 + 36, 3x^3 + 13x^2 + 8x - 12 and 4x^3 + 17x^2 + 9x - 18.
```

শঞ্চদশ অথ্যায়

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

(Lowest Common Multiple)

[উৎপাদক সাহায্যে (by factorisation)]

103. সংজ্ঞাঃ কোন এক রাশি, অপর এক রাশি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, প্রথমোক্ত রাশিকে শেযোক্ত রাশির **গুণিতক** (multiple) বলে।

যদি কোন রাশি, ছই বা তদধিক রাশির প্রত্যেকটি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রাশিকে শেযোক্ত রাশিদ্বযের, বা রাশিসমূহের, **সাধারণ** শু**ণিতক** (common multiple) বলে।

তুই বা তদধিক রাশির বিভিন্ন সাধারণ গুণিতকসমূহের মধ্যে যেটিতে সর্ব্বাপেক্ষা ন্যুনসংখ্যক মৌলিক উৎপাদক (elementary factors) বর্ত্তনান, সেইটিকে, রাশি তুইটির, বা রাশিসমূহের, লিঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (Lowest Common Multiple) বলে। অর্থাৎ, তুই বা তদধিক রাশির সেই সাধারণ গুণিতকটিকেই 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' বলে, যেটি, ঐ রাশিসমূহের গুণিতক হইতে হইলে ন্যুনপক্ষে যতগুলি মৌলিক 'উৎপাদকবিশিষ্ট হওয়া উচিত, ঠিক ততগুলি মৌলিক উৎপাদকেরই গুণফল। যথা,

ab, 2ab, a^2b , ab^2 , $a^2b^2\cdots\cdots$ ইত্যাদির প্রত্যেকটিই a এবং b এর দাধারণ গুণিতক; কিন্তু, ইহাদের মধ্যে abই সর্ব্বাপেক্ষা ন্যুনসংখ্যক মোলিক উৎপাদকবিশিষ্ট বিলিয়া, ইহাকেই a ও b এর 'লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' বলে।

অনুসি.। ছই বা তদধিক রাশির যে কোন সাধারণ গুণিতকই, উহাদের ় 'ল্মিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

টীকা। 'ল্থিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক' এর পরিবর্ত্তে সাধারণতঃ **'ল. সা. গু.'** লিখিত হইয়া থাকে।

104. সরলরাশ্যসমূহের, বা সহজে মৌলিক উৎশাদেকে বিক্লেমণাযোগ্য মেশ্ররাশ্যসমূহের, ল. সা. গু.
নির্পন্ন ঃ এছলে, পর্যাবেক্ষণ দারাই রাশিদয়, বা রাশিসমূহের, ল. সা. গু. নির্ণীত হইতে
পারে। নির্মণিথিত উদাহরণগুলিদারা প্রক্রিয়া-প্রণালী পরিক্ষার্ক্সপে ব্ঝান যাইতেছে।

উদা. 1. $4a^2bc$ এবং $6ab^2d$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর। প্রথম রাশি = $2^2 \times a^2 \times b \times c$.

দিতীয় রাশি = $2 \times 3 \times a \times b^2 \times d$.

অতএব, $2^2 imes 3 imes a^2 imes b^2 imes c imes ar{a}$ অবশ্যই রাশিদ্বযের প্রত্যেক সাধারণ শুণতিকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. শু. $=2^2 \times 3 \times a^2 \times b^2 \times c \times d$ $=12a^2b^2cd$.

উদ্ধা. 2. $24x^2yz$, $18xy^3z^2$ এবং $27x^4y^2z^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর। প্রথম রাশি = $2^3\times 3\times x^2\times y\times z$. দ্বিতীয় রাশি = $2\times 3^2\times x\times y^3\times z^2$. ততীয় রাশি = $3^3\times x^4\times y^2\times z^2$.

অতএব, $2^3 \times 3^3 \times x^4 \times y^3 \times z^2$ অবশ্যুই রাশিত্রনের প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. শু. = $2^3 \times 3^3 \times x^4 \times y^3 \times z^2$ = $216x^4y^3z^2$.

উদা. 3. $4x^2(x+a)^2$, $6a^2x(x^2-a^2)$ এবং $9x^3(x^3-a^3)$ এর ল. সা. গু. ,নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি = $2^2 \times x^2 \times (x+a)^2$.

ি ছিতীয় রাশি = $2 \times 3 \times a^2 \times x \times (x+a)(x-a)$. ূত্তীয় –্রাশি = $3^2 \times x^3 \times (x-a)(x^2+ax+a^2)$.

অতএব, $2 + 3^2 \times u^2 \times x^3 \times (x+a)^2 (x-a)(x^2+ax+a^2)$ অবশুই রাশি-এঁয়ের প্রত্যেক সাধারণ গুঁণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু.

$$= 2^{2} \times 3^{2} \times a^{2} \times x^{3} \times (x+a)^{2} (x-a)(x^{2}+ax+a^{2})$$
$$= 36a^{2}x^{3}(x+a)^{2}(x^{3}-a^{3}).$$

উদো. 4. $x^2 - 3x + 2$, $x^3 + 2x^2 - 3x$ এবং $x^4 + x^3 - 6x^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণিয় কর।

প্রথম রাশি =
$$(x-1)(x-2)$$
 ছিতীয় রাশি = $x(x^2+2x-3)$ = $x(x-1)(x+3)$. তৃতীয় রাশি = $x^2(x^2+x-6)$ = $x^2(x-2)(x+3)$.

অতএব, $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$ নিশ্চয়ই রাশি তিনটির প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু. = $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$.

উদা. 5. x^3-3x^2+3x-1 , x^3-x^2-x+1 , x^4-2x^3+2x-1 এবং $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$x^{3} - 3x^{2} + 3x - 1 = (x - 1)^{3}.$$

$$x^{3} - x^{2} - x + 1 = x^{2}(x - 1) - (x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^{2} - 1) = (x - 1)^{2}(x + 1).$$

$$x^{4} - 2x^{3} + 2x - 1 = (x^{4} - 1) - 2x(x^{2} - 1)$$

$$= (x^{2} - 1)(x^{2} + 1) - 2x\}$$

$$= (x^{2} - 1)(x - 1)^{2} = (x - 1)^{3}(x + 1).$$

$$x^{4} - 2x^{3} + 2x^{2} - 2x + 1 = x^{2}(x^{2} - 2x + 1) + (x^{2} - 2x + 1)$$

$$= (x^{2} - 2x + 1)(x^{2} + 1) = (x - 1)^{2}(x^{2} + 1).$$

অতএব, $(x-1)^3(x+1)(x^2+1)$ অবশ্যই রাশিগুলির প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই উৎপাদক হইবে।

অতএব, নির্পেয় ল. সা. গু. $=(x-1)^3(x+1)(x^2+1)$.

প্রশ্নালা 53

```
न. मा. छ. निर्मय कर :

1. a^2b এবং ab^2.

2. a^3b^2 এবং a^2bc.

3. 6x^2y^4 এবং 10xy^2.

4. 4m^2n^3 এবং 14m^4n^2p.

5. 8x^2y^3z এবং 12x^3y^2z^2.

6. 4a^2bc, 10ab^2c এবং 14a^2bc, 10ab^2c এবং 14a^2bc, 10ab^2c এবং 14a^2bc, 10ab^2c এবং 14a^2bc, 14a^2b^2b, 14
```

- 16. $(x^2+2x-15, x^2+9x+20)$ and $(x^2+4x-21)$.
- *17. $\sqrt{12a^4 27a^2b^2}$, $2a^2 + ab 3b^2$ and $2a^2 ab 3b^2$.
 - 18. $\sqrt{8a^3 + 27b^3}$, $8a^3 27b^3$ এবং $16a^4 + 36a^2b^2 + 81b^4$.
- * 19. $\frac{1}{2}8x^4 50x^2y^2$, $12x^3 + 24x^2y 15xy^2$ and $16x^2 48xy + 20y^2$.
- $20.114x^2 12ax + 9a^2$, $6x^2 7ax 3a^2$ and $6x^2 11ax + 3a^2$.
- **21.** $2x^2 + 6x + 9$, $4x^3 12x^2 + 18x$ and $4x^4 + 81$.
- **22.** $9a^2 6ax + x^2$, $6a^2 + 10ax 4x^2$ $9a^2 21ax + 6x^2$.
 - **23.** $8x^3 12x^2 + 6x 1$, $8x^3 4x^2 2x + 1$ $9x^2 + 5x 3$.
 - 24. $x^2 6xy + 8y^2$, $x^2 7xy + 12y^2$, $x^2 + 2xy 15y^2$ এবং $x^2 + xy 20y^2$.
 - 25. $6x^2 x 1$, $3x^2 + 7x + 2$ এবং $2x^2 + 3x 2$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1869.]

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1871.]

27. $9x^4 - 28x^2 + 3$, $27x^4 - 12x^2 + 1$, $27x^4 + 6x^2 - 1$ এবং $x^4 - 6x^2 + 9$. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

[সর্বশেষ রাশিটির উৎপাদকসমূহ হইতেই প্রথম রাশিটির একটি উৎপাদক সম্বন্ধে ধার্ণা করা যায়।]

শেড়শ অপ্রায় সৈহজ ভগ্নাংশ (Easy Fraction)

105. সংজ্ঞা a এবং b এর যে কোন মানই হউক না কেন, $\frac{a}{b}$ 'কে একটি বীজগণিতীয়ু জ্ঞাংশ বলে ; এবং ইহাকে এরপ একটি রাশি বলিয়া গণ্য করা হয়, যাহাকে b দারা গুণ করিলে, গুণফল a এর সমান হয়। অর্থাৎ, $\frac{a}{b}$ কে 'a+b' এর সমতুল্য বলিয়া ধরা হ্লুয়। $\frac{a}{b}$ ভ্ঞাংশটিতে, a কে লব (numerator) ধ্বং b কে হর (denominator) বলা হইয়া থাকে ।

- । কোন রাশিকে অন্ত কোন রাশি দারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফলকে, উপরে ভাজ্য ও নীচে ভাজক এবং উভয়ের মধ্যে একটি অনুভূমিক রেথা (horizontal line) টানিয়া, প্রকাশ করা ভিন্ন বীজগণিতীয় ভশ্বাংশ আর কিছুই নহে। এইরূপে লিখিত ভাজ্য ও ভাজককে যথাক্রমে ভশ্বাংশের 'লব' ও 'হর' বলা হয়।
- 106. কোন ভগ্নাংশের 'লব' ও 'হর'কে যে কোন একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন প্রিবর্তন হয় না।

 $a,\,b$ এবং m যে কোন তিনটি রাশি হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$$

ধর, $x=rac{a}{b}$, তাহা হইলে, $x imes b=rac{a}{b} imes b=a$. [সংজ্ঞানুসারে]

 $\therefore x = am \div bm$; অর্গৎ, $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$.

বিপরীতক্রমে, $\frac{am}{bm}$ $\frac{a}{b}$ $\frac{am \div m}{bm \div m}$.

অনুসি.। $\frac{a}{b} = \frac{a \times (-1)}{b \times (-1)} = \frac{-a}{-b}$. অতএব, লব ও হর, এই উভয়েরই চিচ্ন পরিবর্ত্তন করিলে, ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

107. ভগ্নাংশকে লৈঘিন্ত আকারে' পরিবর্তন (Reduction of a fraction to its lowest terms):

সাংজ্ঞাঃ কোন ভগ্নাংশের লব ও হরের ভিতর কোন গুণনীয়ক সাধারণ (common) না থাকিলে, ভগ্নাংশটিকে 'লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ' বর্লা হয়।

অতএব, কোন ভগ্নাংশকে লখিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন করিতে হইলে (অথবা, প সংক্ষেপে বলিতে গেলে, 'সরল করিতে হইলে') এরপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণর করিতে হয়, যাহা প্রদত্ত ভগ্নাংশটির সমান এবং যাহার লব ও হরের ভিতর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই; কাজেই, প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লব ও হরের গ. সা. গু. দ্বারা উভ্যাদে ভাগ করিলেই 'বিন্ধেয় লিখিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশটি পাওয়া যায়।

টীকা। যে সকল ক্ষেত্রে লব ও হরকে পর্য্যবেক্ষণ দারাই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, সেই/সকল ক্ষেত্রে লব ও হর হইতে ঐ সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারণ কব্রিলেই অবিলয়ে লখিষ্ঠ আকার পাওয়া যায়।

উদা. 1.
$$\frac{4a^2b^3c^2}{10ab^4c^2}$$
 কে লখিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর।

$$\frac{4a^{2}b^{3}c^{2}}{10ab^{4}c^{2}} = \frac{2 \times 2 \times a^{2} \times b^{3} \times c^{2}}{2 \times 5 \times a \times b^{1} \times c^{2}} = \frac{2a^{3}}{5b}$$

উদা. 2. স্বল কর:
$$a^2b^3(a^2-b^2)$$
 $5ab^4(a^3+b^3)$

$$\frac{a^2b^3(a^2-b^2)}{3ab^4(a^3+b^3)} = \frac{a^2b^3(a+b)(a-b)}{3ab^4(a+b)(a^2-ab+b^3)} = \frac{a(a-b)}{3b(a^2-ab+b^2)}$$

উদ্ধা. 3.
$$\frac{x^2+3x-40}{x^2+4x-32}$$
 কে লখিষ্ঠ আকারে, পরিবর্ত্তন কর।

লব =
$$(x+8)(x-5)$$
.
হর = $(x+8)(x-4)$.

মতএব, প্রদত্ত ভগ্নাংশ =
$$\frac{(x+8)(x-5)}{(x+8)(x-4)} = \frac{x-5}{x-4}$$

উদা. 4. স্বল কর:
$$\frac{2a^2 + 3ax - 2ab - 3bx}{3a^2 - 2ax - 3ab + 2bx}$$

লব =
$$2a(a-b) + 3x(a-b) = (a-b)(2a+3x)$$
.

$$53 = 3a(a-b) - 2x(a-b) = (a-b)(3a-2x).$$

 $31/4 = \frac{(a-b)(2a+3x)}{(a-b)(3a-2x)} = \frac{2a+3x}{3a-2x}.$ অতএব, প্রদত্ত

প্রথমালা 54

প্রিষ্ঠ আকারে পরিবর্তন কর:

1.
$$\frac{2a^2b^3}{4a^2b^4}$$
.

4.
$$\frac{15x^3y^2z^4}{25x^2y^4z^3}$$
.

7.
$$\sqrt{\frac{70a^2b^3c^4d^7}{105c^4d^2a^3b^3}}$$
.

10.
$$\frac{x^2 - 3x}{9x - x^3}$$
.

13.
$$\frac{3ax-12a^2}{x^2-16a^2}$$
.

2.
$$\frac{6x^2y^3}{8xy^4}$$
.

$$8. \quad \frac{39m^2n^5p^3q^6}{65p^2m^3q^4q^5}$$

11.
$$\sqrt{\frac{4x^2-9a^2}{4x^2+6ax}}$$
. 12. $\sqrt{\frac{3a^2-12ab}{48b^2-3a^2}}$.

11.
$$\sqrt{4x^2 + 6ax}$$
12. $\sqrt{\frac{48b^2 - 3a^2}{48b^2 - 3a^2}}$
14. $\sqrt{\frac{2x^4 - 4a^2x^2}{4a^2x^2 + 4a^4}}$.15. $\frac{4x^2 + 8x}{3^2 + 5x + 6}$

3.
$$\frac{4a^2xy^2}{10ax^2y^2}$$
.

$$6. \quad \frac{16x^2a^4y^3z^5}{40a^3z^4x^3y^4}.$$

9.
$$\sqrt{a^2 - a^2}$$

$$\frac{3a^2-12ab}{48b^2-3a^2}$$

$$48h^2 - 3a^2$$

16.
$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 12}$$
. 17. $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 9x + 20}$. $\frac{a^2 - 3ab - 4b^2}{a^2 - 4ab - 5b^2}$.

19. $\frac{4^4 - a^3b + a^2b^2}{a^3 + b^3}$.

20. $\frac{1 - 7x + 12x^2}{1 - 8x + 15x^2}$.

21. $\frac{x^2 - 6xy + 5y^2}{x^2 + 2xy - 35y^2}$.

22. $\frac{1 - 9a^2 + 14a^4}{1 - 4a^2 - 21a^4}$.

23. $\frac{x^4 - 8x^2 - 65}{x^4 + x^2 - 20}$.

24. $\frac{3a^3x + 9a^2x^2 + 27ax^3}{a^3 - 27x^3}$.

25. $\frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 8}$.

26. $\frac{3x^2 - 5ax + 2a^2}{3x^2 + 2ax - 2a^2}$.

27. $\frac{x^2 + 16ax + 5a^2}{3x^2 + 22ax + 7a^2}$.

28. $\frac{6x^2 - 7x - 20}{9x^2 + 6x - 8}$.

29. $\frac{2x^2 + 3ax - 20a^2}{3x^2 + 5ax - 28a^2}$.

30. $\frac{10 - 17ax + 3a^2x^2}{5 - 26ax + 5a^2x^2}$.

31. $\frac{x^2 - (a - b)x - ab}{x^3 + bx^2 + ax + ab}$.

32. $\frac{6ac + 104c + 9ax + 15bx}{6c^2 + 9cx - 2c - 3x}$.

33. $\frac{8bx + 12ab + 6xy + 9ay}{12bx + 8ab + 9xy + 6ay}$.

34. $\frac{2a^2 + ab - b^2}{3 + a^2b - a - b}$.

35. $\frac{a^2 - b^2 - 2bc - c^2}{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}$.

108. নুই বা ভদৰিক ভগ্নাংশকৈ সাধারণ হর-বিশিষ্ট করা (Reduction of two or more fractions to a common denominator):

ধর, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, ইত্যাদি কতকগুলি ভগ্নাংশ নির্দেশ করিতেছে এবং L উহাদের হরসমূহের (অর্থাৎ, b, d, f,..... ইত্যাদির) ল. সা. গু.ঁ। এথন, যেহেতু কোন ভগ্নাংশের লব ও হরকে যে কোন **একই** রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না, অতএব,

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} = \frac{a \times (L+b)}{b \times (L+b)} = \frac{a \times (L+b)}{L}; \\ & \frac{c}{d} = \frac{c \times (L+d)}{d \times (L+d)} = \frac{c \times (L+d)}{L}; \\ & \frac{e}{f} = \frac{e \times (L+f)}{f \times (L+f)} = \frac{e \times (L+f)}{L}; \quad \text{Forms} \end{aligned}$$

কাজেই, তৃতীয় স্তম্ভের (column এর) ভগ্নাংশগুলি যথাক্রমে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির সমান এবং ইহাদের প্রত্যেকের হরই L.

স্থতরাং, কতিপয় ভগ্নাংশকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করার নিম্নলিখিত নিয়**মটি** পাওয়া গেল:

ভগ্নাংশসমূহের হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া, লব্ধ ল. সা. গু. কে এক একটি হর দারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তদ্দারা উক্ত.হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ কর।

উদা. 1. $\frac{x}{a+b}$, $\frac{x^2}{a(a-b)}$ এবং $\frac{x^3}{b(a^2-b^2)}$ কে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তন কর।

প্রদত্ত হরসমূহের ল. সা. গু. $=ab(a^2-b^2)$; এবং ইহাকে ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকের হর দারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি যথাক্রমে ab(a-b), b(a+b) এবং a হইবে।

ষতএব,
$$\frac{x}{a+b} = \frac{x \times ab(a-b)}{(a+b) \times ab(a-b)} = \frac{xab(a-b)}{ab(a^2-b^2)};$$
$$\frac{x^2}{a(a-b)} = \frac{x^2 \times b(a+b)}{a(a-b) \times b(a+b)} = \frac{x^2b(a+b)}{ab(a^2-b^2)};$$
$$\overline{b(a^2-b^2)} = \overline{b(a^2-b^2) \times a} = \frac{x^2a}{ab(a^2-b^2)}.$$

শ. 2. $x^2 = 5x + 6$ ' $x^2 - 4x + 3$ এবং $x^2 - 3x + 2$ কে সাধারণ হর-বিশিষ্ট কর।

হরগুলি যথাক্রমে (x-2)(x-3), (x-1)(x-3) এবং (x-1)(x-2), এবং ইহাদের ল. সা. গু. =(x-1)(x-2)(x-3); এই ল. সা. গু. কে হরসমূহের প্রত্যেকটি রারা ভাগ করিলে, ভাগফলগুলি যথাক্রমে x-1, x-2 এবং x-3 হয়। অতএব,

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x^2-5x+6)(x-1)} = \frac{x^2-2x+1}{x^3-6x^2+11x-6};$$

$$\frac{x-2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-2)(x-2)}{(x^2-4x+3)(x-2)} = \frac{x^2-4x+4}{x^3-6x^2+11x-6};$$

$$\frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{(x-3)(x-3)}{(x^2-3x+2)(x-3)} = \frac{x^2-6x+9}{x^3-6x^2+11x-6};$$

প্রথমালা 55

সাধারণ হর্রবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তন কর:

1.
$$\frac{a}{2\bar{b}}$$
, $\frac{3c}{4d}$, $\frac{e}{f}$.

1.
$$\frac{a}{2b}$$
, $\frac{3c}{4d}$, $\frac{e}{f}$. **2.** $\frac{\sigma^2}{2bc}$, $\frac{y^2}{3ca}$, $\frac{z^2}{4ab}$.

3.
$$\frac{ab}{4xy^2}$$
, $\frac{bc}{6x^2y}$, $\frac{ca}{10x^3}$.

3.
$$\frac{ab}{4xy^2}$$
, $\frac{bc}{6x^2y}$, $\frac{ca}{10x^3}$. **4.** $\frac{a}{a-b}$, $\frac{b}{a+b}$, $\frac{c}{a(a+b)}$.

5.
$$\frac{x^2}{a^2 + 2ab}$$
, $\frac{y^2}{a - 2b}$. 6. $\frac{2a}{a - b}$, $\frac{a - c}{ab - a^2}$.

6.
$$\frac{2a}{a-b}$$
, $\frac{a-c}{ab-a^2}$

7.
$$\frac{2a}{a-b}$$
, $\frac{3b}{b-a}$, $\frac{4c}{a+b}$.

7.
$$\frac{2a}{a-b}$$
, $\frac{3b}{b-a}$, $\frac{4c}{a+b}$. 8. $\frac{2x}{a^2(a+x)}$, $\frac{3y}{b^2(a-x)}$, $c^2(a^2-x^2)$.

9.
$$\frac{a^2}{2xy-3y^2}$$
, $\frac{b^2}{2x^2+3xy}$, $\frac{a^2}{4x^3y-9xy^3}$.

10.
$$\frac{a^2}{x^2+x+1}$$
, $\frac{b^2}{x^2-x+1}$

10.
$$\frac{a^2}{x^2+x+1}$$
, $\frac{b^2}{x^2-x+1}$. **11.** $\frac{3}{x^2-x-2}$, $\frac{3}{x^2+x-6}$.

12.
$$\frac{a-2b}{a(a^2-2ab+4b^2)}$$
, $\frac{bc}{a^3+8b^3}$.

13.
$$\frac{a}{a-3b}$$
, $\frac{b}{a^2+3ab+9b^2}$, $\frac{c}{a^3-27b^3}$.

14.
$$\frac{a}{b(a-b-c)}$$
, $a(a-b+c)$, $a^2+b^2-c^2-2ab$

15.
$$\frac{-c-a}{(a-b)(b-c)}$$
, $\frac{b-a}{(a-c)(b-c)}$, $\frac{b-c}{(c-a)(a-b)}$

109. ভগ্লাংশের মোগঃ 47 নিয়মের তৃতীয় অমুসিদ্ধান্তে দেখা গিয়াছে যে, a, b, c, d, e, যে কোন রাশিই হউক না কেন,

$$a(b+c+d+e) = ab+ac+ad+ae.$$

মতএব, বিপরীতভাবে, $\frac{ab+ac+ad+ae}{a}=b+c+d+e=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}+\frac{ad}{a}+\frac{ae}{a}$

ম্বতরাং, ab, ac, ad, ae এর পরিবর্তে ব্যাক্রমে, p, q, r, s বসাইলে, দেখা যায় যে, $\frac{p+q+r+s}{a}=\frac{p}{a}+\frac{q}{a}+\frac{r}{a}+\frac{s}{a}$, এবং একেতে, $p,\ q,\ r,\ s,\ a$ ৩ যে কোন রাশি।.

কাজেই, কতকগুলি সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের যোগফল এর্ন্নপ একটি ভগ্নাংশ হ**ইবে সাহার ধৃব, প্র**দিত্ত ভগ্নাংশসমূহের লবের সমষ্টির সমান এবং হর, উহাদের সাধারণ হর।

অতএব, ভগ্নাংশসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে উহাদিগকে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া লব্ধ লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে সাধারণ হর দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

উদা. 1.
$$\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$$
 এর মাম নির্ণয় কর।

থেহেডু, $\frac{b}{b-a} = \frac{b \times (-1)}{(b-a) \times (-1)} = \frac{-b}{a-b}$

্মতএব,
$$\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} = \frac{a}{a-b} + \frac{-b}{a-b} = \frac{a+(-b)}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1.$$

উদা. 2.
$$\frac{x}{x+a} + \frac{a}{x-a}$$
 এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু, হরগুলির ল. সা. গু. $= x^2 - a^2$,

স্থতরাং,
$$\frac{x}{x+a} = \frac{x(x-a)}{x^2-a^2}$$
 এবং $\frac{a}{x-a} = \frac{a(x+a)}{x^2-a^2}$.

অতএব, নিৰ্ণেয় মান =
$$\frac{x(x-a)}{x^2-a^2} + \frac{a(x+a)}{x^2-a^2} = \frac{x(x-a)+a(x+a)}{x^2-a^2} = \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$$

উদা. 3.
$$\frac{1}{a+b} + \frac{b}{a^2-b^2} - \frac{a}{a^2+b^2}$$
 এর মান নির্ণয় কর।

• এস্থলে, তিনটি ভগ্নাংশকেই একসঙ্গে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তন করা তত স্থ্রবিধাজনক নহে ্রু কাজেই, নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বিত হইল।

এখন
$$\frac{1}{a+b} + \frac{b}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)+b}{a^2-b^2} = \frac{a}{a^2-b^2}$$

সত্ত্ব, নিৰ্নেয় মান $= \frac{a}{a^2-b^2} - \frac{a}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2)-a(a^2-b^2)}{a^4-b^4} = \frac{2ab^2}{a^4-b^4}$

ভিনা. 4. সরল কর:
$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2+4} + \frac{32}{x^4+16}$$
.

এখন, $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2) - (x+2)}{x^2-4} = \frac{4}{x^2-4}$;
$$\frac{4}{x^2-4} - \frac{4}{x^2+4} = \frac{4(x^2+4) - 4(x^2-4)}{x^4-16} = \frac{32}{x^4-16}$$
.

উপা. 5. সরল কর:
$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+4b}.$$
প্রদত্ত রাশি = $\left\{ \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} \right\} - \left\{ \frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b} \right\}.$

এখন দেখা যায় যে.

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} = \frac{(a+2b) - (a+b)}{(a+b)(a+2b)} = \frac{b}{(a+b)(a+2b)};$$
 and
$$\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b} = \frac{(a+4b) - (a+3b)}{(a+3b)(a+4b)} = \frac{b}{(a+3b)(a+4b)};$$

সর্ববশেষে,

$$\frac{b}{(a+b)(a+2b)} - \frac{b}{(a+3b)(a+4b)} = \frac{b(a+3b)(a+4b) - b(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(a+b)(a+2b)} = b(a^2+7ab+12b^2) - b(a^2+3ab+2b^2)$$

$$= b(4ab+10b^2) = 2b^2(2a+5b).$$

অতএব, নিৰ্দেষ ফল =
$$\frac{2b^2(2a+5b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)^*}$$

প্রেমালা 56

মান নির্ণয় কর :

1.
$$\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b}$$
.
2. $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx}$.
3. $\frac{a}{a-x} + \frac{x}{x-a}$.
4. $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$.
5. $\frac{a^2+b^2}{b^2-b^2} - \frac{a-b}{2(a+b)}$.
6. $\frac{4x^2+9y^2}{4x^2-9y^2} - \frac{2x-3y}{2x+3y}$.
7. $\frac{a}{(a+b)^2} - \frac{b}{a^2-b^2}$.
8. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} + \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.
9. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(a-c)(b-c)}$.

11.
$$\frac{1}{x^2+7x+10} + \frac{1}{x^2+13x+40}$$
. 12. $\frac{1}{2x+3y} - \frac{(2x-3y)^2}{8x^3+27y^3}$.

13.
$$\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{2ab}{b^2-a^2}$$
.

15.
$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} - \frac{2(x^2-y^2)}{x^{2^*}+y^2}$$
.

17.
$$\frac{3x+1}{x-3} - \frac{x-3}{3x+9} - \frac{5x^2+24x}{2x^2-18}$$
. **18.** $\frac{4a-b}{1-4ab} - \frac{4a+b}{1+4ab} - \frac{4b(1-8a^2)}{16a^2b^2-1}$

$$x-3 \quad 3x+9 \quad 2x^2-18$$

19.
$$\frac{x}{x-2a} + \frac{x}{x+2a} + \frac{2x^2}{x^2+4a^2}$$
. 6 20. $\frac{b}{a-b} + \frac{b}{a+b} + \frac{2ab}{a^2+b^2} + \frac{4a^3b}{a^4+b^4}$.

21.
$$\frac{x}{3x-y} + \frac{x}{3x+y} + \frac{6x^2}{9x^2+y^2}$$
. 22. $\frac{1}{x-3a} - \frac{1}{2x+6a} - \frac{x-9a}{2x^2+18a^2}$.

23.
$$\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2}} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} - 2$$

$$ab(a-b)^{2} \quad b \quad a$$
25.
$$\frac{1}{x-a} - \frac{2}{2x+a} + \frac{1}{x+a} - \frac{2}{2x-a}.$$

26.
$$a - x - x + 3a + 3a + x + x - 3a$$
.

27.
$$\frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^2-1}$$
.

28.
$$\frac{a-c}{(a-b)(x-a)} + \frac{b-c}{(b-a)(x-b)}$$
.

28.
$$1x^2 - 3x + 2x + x^2 - 5x + 6 + x^2 - 8x + 15$$

$$30.\sqrt{\frac{1}{x^2+58x+4a^2}+\frac{1}{x^2+11ax+28a^2}+\frac{2}{x^2+20ax+91a^2}}$$

$$f_{31.}$$
 $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}$

$$\frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} \cdot \frac{2x}{1+x^2+x^4}.$$

33.
$$\frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1}{1-x+x^2} + \frac{2x}{1-x^2+x^4}$$

34.
$$\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x^2+2x+4} + \frac{6x}{x^3+8}$$
.

35.
$$16(2x^2 - 6ax + 9a^2) - \frac{11}{32x^2 + 96ax + 144a^2} + \frac{33ax}{4(4x^4 - 81a^4)}$$

12.
$$\frac{1}{2x+3y} - \frac{(2x-3y)^2}{8x^3+27y^3}$$

14.
$$\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a-2b} + \frac{2a}{4b^2-a^2}$$
.

16.
$$\frac{a-2x}{a+2x} - \frac{a+2x}{a-2x} + \frac{8ax}{a^2+4x^2}$$

3.
$$4a-b$$
 $4a+b$ $4b(1-8a^2)$

$$1 - 4ab = 1 + 4ab = 16a^2b^2 - 1$$

$$\frac{1}{x-3a} - \frac{1}{2x+6a} - \frac{x-9a}{2x^2+18a^2}$$

23.
$$\frac{(a^2+b^2)^2}{ab(a-b)^2} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} - 2$$
. 24. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

110. ভ্রাংসের গুণন: $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ যে কোন ছইটি ভগ্নাংশ হইলে, $\frac{a}{b} imes \frac{c}{d}$ এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

ধর,
$$x = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$
.

অথবা, $x \times bd = ac$; $\therefore x = \frac{ac}{bd}$; অর্থাৎ, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

এইরূপ,
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$$
;

এবং $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h} = \frac{ace}{bdf} \times \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}$; ইত্যাদি।

স্থতরাং, কতকগুলি ভগ্নাংশের গুণফলও এরূপ একটি ভগ্নাংশ, যাহার লব, প্রাদত্ত লবগুলির গুণফলের সমান এবং যাহার হর, প্রাদত্ত হরগুলির গুণফলের সমান।

অনুসি.। থেছেতু,
$$c=rac{c}{1}$$
, অতএব, $rac{a}{b} imes c=rac{a}{b} imes rac{c}{1}=rac{ac}{b}$.

া. 1. কর:
$$\frac{x^2}{yz}$$
, $\frac{y^2}{zx}$ এবং $\frac{z^2}{xy}$.

নিৰ্দেষ গুণফল
$$-\frac{x^2 \times y^2 \times z^2}{yz \times zx \times xy} = \frac{x^2 \times y^2 \times z^2}{y^2 \times z^2} \times \frac{z^2}{x^2} = 1$$
.

উদা. 2.
$$\frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}$$
 কে $\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$ দারা গুণ কর।

নির্বেয় গুণফল =
$$\frac{x(a-x) \times a(a+x)}{(a^2 + 2ax + x^2)(a^2 - 2ax + x^2)} = \frac{ax(a-x)(a+x)}{(a+x)^2(a-x)^2}$$

$$\frac{ax}{(a+x)(a-x)} = \frac{ax}{a^2-x^2},$$

উদা: 3. গুণ কর:
$$\frac{1-x^2}{1+y}$$
, $\frac{1-y^2}{x+x^2}$ এবং $1+\frac{x}{1-x}$

$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

নিৰ্ণেয় গুণফল =
$$\frac{(1+x)(1-x)}{1+y} \times \frac{(1+y)(1-y)}{x(1+x)} \times \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{(1+x)(1-x)(1+y)(1-y)}{(1+y)x(1+x)(1-x)} = \frac{1-y}{x}.$$

প্রশালা 57

গুণ কর:

1.
$$\frac{2a^2}{3ab}$$
, $\frac{9b^2}{16ac}$ and $\frac{8c^2}{9bc}$.

3.
$$\frac{x^3}{yz}$$
 $\frac{y^3}{zx}$ eq. $\frac{z^3}{xy}$ 4. $\frac{7a^2b^2c^2}{12xuz}$ eq. $\frac{4x^3y^3z^3}{21a^4b^4c^4}$

5.
$$\frac{12m^2n^3}{7xy^2z}$$
 এবং $\frac{35x^3yz}{96m^3n}$

সরল কর:

6.
$$\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x^2+x-2}{x^2+x}$$
.

8.
$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab} \times \frac{(a+b)^2}{a^2 + ab + b^2}$$

8.
$$\frac{a}{a^2} + \frac{b}{ab} \times \frac{(a+b)^2}{ab+b^2}$$

10.
$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

12.
$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5} \times \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$$
.

12.
$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} \times \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6}$$

14.
$$\frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 5x - 2} \times \frac{3x^2 + x}{4x - 2}$$

10.
$$a + b$$
, $ax + x^2$

18.
$$\left(\frac{4a}{3x} + \frac{3x}{2b}\right) \left(\frac{2b}{3x} + \frac{3x}{4a}\right)$$
.

19.
$$\left(-\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) - \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{d} - \frac{d}{c}\right)$$
.

20.
$$\frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 + 7x - 4} \times \frac{3x^2 + 11x - 4}{3x^2 + 8x - 3} \times \frac{2x^2 + x - 15}{2x^2 - 11x + 15}.$$

$$\sqrt{21}. \quad \frac{b^2 - c^2 - a^2 + 2ac}{c^2 + a^2 - b^2 + 2ac} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 2bc}{a^2 - b^3 + c^2 - 2ac}$$

22.
$$b^{2} - c^{2} - a^{2} - b^{2} + 2ab \times a^{2} - b^{2} + c^{2} - 2ab \times a^{2} + b^{2} - c^{2} - 2ab \times a^{2} + b^{2} - c^{2} - 2ab \times a^{2}$$

 $rac{4a^2b^2}{3c^2}, rac{9c^2}{16d^2}$ এবং $rac{4d^2}{27b^2}$.

4. $\frac{7a^2b^2c^2}{12xyz}$ এবং $\frac{4x^3y^3z^3}{21a^4b^4c^4}$.

7.
$$\frac{a^2-9b^2}{a^2+3ab} \times \frac{3a^2}{a^2-3ab}$$

9.
$$a^{3} + 8x^{3} \times a^{2} - 4ax + 4x^{2}$$
$$a^{3} - 2a^{2}x \times a^{2} - 2ax + 4x^{2}$$

11.
$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-2x-15} \times \frac{x^2-3x-18}{x^2-8x+12}$$

13.
$$a^{\frac{a^4-b^4}{2ab+b^3}} \times \frac{a-b}{a^2+ab}$$
.

15.
$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 4x - 21} \times \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 12x + 32}$$

15.
$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 4x - 21} \times \frac{x^2 - 11x + 28}{x^2 - 12x + 32}$$

16.
$$\frac{a^2 - x^2}{a + b} \times \frac{a^2 - b^2}{ax + x^2} \times \left(a + \frac{ax}{a - x}\right)$$
17. $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + 1\right) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + 1\right)$.

a এবং a যে কোন ছইটি ভগ্নাংশ হইলে, a এবং a এবং a যে কোন ছইটি ভগ্নাংশ হইলে, a a b a এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\therefore \quad x \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \; ; \; \text{seal}, \; x = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \; ; \; \left[\because \quad \frac{c}{d} \times \frac{d}{c} = 1. \right]$$

স্কুতরাং, একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দারা ভাগ করিতে হইলে, প্রথমটিকে শেষোক্তটির অক্যোক্তক (reciprocal) দারা গুণ করিতে হয়।

অনুসি.।
$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \div \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$$

উপা. 1. সরল কর ঃ
$$\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2} + \frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$$
.

নির্বেয় ফল =
$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} \times \frac{a - b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(a^3 + b^3)(a - b)}{(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)}$$
$$= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)}{(a + b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)} = 1.$$

উলা. 2. স্বল কর :
$$\frac{x^2+x-2}{x^2+7x+12} \cdot \frac{x^2-3x-10}{x^2+x-12} \times \frac{x^2-4x-5}{x^2-4x+3}$$

নিবের ফল =
$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 7x + 12} \times \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 3x - 10} \times \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4x + 3}$$
 = $\frac{(x - 1)(x + 2)}{(x + 3)(x + 4)} \times \frac{(x + 4)(x - 3)}{(x - 5)(x + 2)} \times \frac{(x - 5)(x + 1)}{(x - 3)(x - 1)}$ = $\frac{(x - 1)(x + 2)(x + 4)(x - 3)(x - 5)(x + 1)}{(x + 3)(x + 4)(x - 5)(x + 2)(x - 3)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x + 3}$

উদা. 3. সরল কর:
$$\frac{a-b}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a-b}{a+b} + \frac{a-b}{a+b} \times \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

$$\frac{a-b}{a-b} = \frac{a+b}{a+b} + \frac{a-b}{a+b} \times \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

থাখন,
$$\frac{a-b}{a-b} - \frac{a}{a+b} = \frac{a(a+b)-a(a-b)}{b(a+b)-b(a-b)} = \frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{2b^2}{a^2-b^2}$$
$$= \frac{2ab}{a^2-b^2} \times \frac{a^2-b^2}{2b^2} = \frac{a}{b}; \qquad \cdots \qquad (1)$$

$$\frac{a+b+a-b}{a-b-a+b} = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a+b)^2 - (a-b)^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} + \frac{2ab}{a^2-b^2} + \dots$$

$$(2)$$

অতএব, (1) এবং (2) হইতে, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{a}{b}+\frac{a^2+b^2}{2ab}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a}{b}\times\frac{2ab}{a^2+b^2}\times\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{2a^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

প্রশ্নালা 58

সবল কব

1.
$$\frac{4a^{2}bc}{15xy^{2}z} + \frac{8ab^{2}c}{25x^{2}yz}$$
 2. $\frac{a^{2}+ab}{a-b} + \frac{ab}{a^{2}-b^{2}}$ 3. $\frac{x^{2}-49}{x^{2}-25} + \frac{x+7}{x+5}$ 4. $\frac{a^{4}-b^{4}}{a^{2}+2ab} \cdot b^{2} + \frac{a^{2}+b^{2}}{a+b}$ 5. $\frac{m^{2}-9n^{2}}{m^{2}+5mn+6n^{2}} + \frac{m^{2}-2mn-3n^{2}}{m^{2}-n^{2}}$ 6. $\frac{m^{3}}{m} + \frac{n}{n} + \frac{m^{2}+mn+n^{2}}{m^{2}-n^{2}}$ 7. $\frac{(2x+y-1)}{(x+y)} + (1+\frac{y}{x+y})$ 8. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{a}{a-b} + \frac{a}{a+b}$ 9. $\frac{(x+y+x-y)}{(x+y+x+y)} + \frac{(x+y-x-y)}{(x-y-x+y)}$ 10. $\frac{x^{2}-4}{x^{2}+3x-18} + \frac{x^{2}-5x-14}{x^{2}-36}$ 11. $\frac{1-\frac{2pq}{p^{2}+q^{2}}}{(a+b)^{2}-4ab} + \frac{(a-b)^{2}+4ab}{a^{3}-b^{3}-3ab(a-b)}$ 12. $\frac{a^{3}+b^{3}+3ab(a+b)}{(a+b)^{2}-4ab} + \frac{(a-b)^{2}+4ab}{a^{3}-b^{3}-3ab(a-b)}$ 13. $\frac{x^{3}+y^{3}}{(x-y)^{2}+3xy} + \frac{(x+y)^{2}-3xy}{x^{3}-y^{3}} \times \frac{xy}{x^{2}-y^{2}}$

14.
$$\frac{a(a-b)^2 + 4a^2b}{ab+b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ab} \times \frac{b(a+b)^2 - 4ab^2}{a^2 - ab}.$$
15.
$$\frac{x^2 - x - 30}{x^2 - 36} \cdot \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 2x - 8} + \frac{x + 4}{2x^2 + 12x}.$$
16.
$$\frac{x^2 + 3x - 108}{x^2 - 64} \cdot \frac{x^2 + 6x - 72}{x^2 + x - 56} \cdot \frac{x^2 - 16x + 63}{x^2 - 14x + 48}.$$
17.
$$\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) + \left(\frac{x + y}{x - y} - \frac{x - y}{x + y}\right).$$
18.
$$\left\{\frac{a + b}{a - b} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right\} + \left\{\frac{a - b}{a + b} - \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}\right\}. \quad [\Phi \text{ Fi. exclate}], 1868.]$$
19.
$$\frac{a^4 - b^4}{(a + b)^3 - 3ab(a + b)} \cdot \frac{(a + b)^2 - 4ab}{(a + b)^2 - 3ab} \times \frac{a}{(a + b)^2 - 2ab}.$$
20.
$$\frac{a^4 - b^4}{(a - b)^2 + 2ab} + \frac{(a - b)^2 + 3ab}{(a - b)^2 + ab} \times \frac{(a + b)^2 - 2ab}{(a + b)^2 - 3ab}.$$
21.
$$\frac{a^3 - b^3}{b^3 - a^3} \times \frac{1}{b - a}. \left[\Phi \text{ Fi. exclate}], 1874.\right]$$

সপ্তদেশ অধ্যায়

I. সরল সমীকরণ (Simple Equations)

112. সহজ 'সরল সমীকরণ' সমাধান করার প্রণালী পঞ্চন অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। বর্ত্তনানে ঐ সকল বিষয় আরও বিশদভাবে আলোচিত হইবে।

পূর্বেদেখান হইয়াছে যে, সমীকরণ সমাধান করার পদ্ধতি প্রধানতঃ কতকগুলি স্বতঃসিদ্ধের উপর নির্ভর করে। সেইঞ্জলি হইতে স্পষ্টই বুঝা গিয়াছে যে, সমীকরণের কোন পরিবর্ত্তন হয় না.

(i) যদি সমীকরণস্থিত কোন পদকে যথানিয়মে পক্ষাস্ত্র করা, হয়;
এবং (ii) যদি সমীকরণের উভয় পক্ষকেই যে কোন একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ
করা হয়।

কাজেই, 'একটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট' সমীকরণের সমাধান-প্রণালী নিম্নলিধিতরূপে প্রকাশ করা যায়;

- (1) সমীকরণের প্রত্যেক পক্ষকে প্রক্রিয়াচিন্সায়র পৃথক্ভাবে সরল কর:
- (2) অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সকল পদওলিকে সমতাচিল্ডের বামদিকে এবং অস্থাক্ত সকল পদগুলিকে সমতাচিল্ডের ড¹'নদিকে পক্ষান্তর কর।
 - (3) পুনরায় প্রত্যেক পক্ষকে পৃথকভাবে সরল কর।
 - (4) সর্ব্বশেষে, উভয় পক্ষকে অজ্ঞাতরাশির সহগ দ্বার_িভাগ কর। তাহা হইলেই, অজ্ঞাতরাশির নির্ণেয় মান পাওয়া যাইবে।
- টীকা। উপরোক্ত উপায়ে নির্ণীত মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় কি না, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই তাহা পরীক্ষা করিয়া দেখা উচিত।

GeV. 1.
$$(6x+9)^2 + (8x-7)^2 = (10x+3)^2 - 71$$
.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.]

বাম পক্ষ =
$$(36x^2 + 108x + 81) + (64x^2 - 112x + 49)$$

= $100x^2 - 4x + 130$;
এবং ডা'ন পক্ষ = $(100x^2 + 60x + 9) - 71$
= $100x^2 + 60x - 62$.

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিত সমীকরণে পরিণত হইল:

$$100x^2 - 4x + 130 = 100x^2 + 60x - 62$$
.

এখন, উভয় পক্ষ হইতেই $100x^2$ অপসারিত করিয়া,

$$-4x + 130 = 60x - 62$$
.

অতএব,
$$_2$$
পক্ষান্তর করিয়া, $-4x - 60x = -130 - 62$, অথবা, $-64x = -192$;

এখন উভয় পক্ষকৈই - 64 দারা ভাগ করিয়া,

$$x=3$$
.

অতএব, নির্ণেয় মূল = 3.

উদা. 2.
$$\frac{x-6}{8} - \frac{2x-15}{9} + 1 = \frac{x}{15} - \frac{x-12}{6}$$
 হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

এখন, হরগুলির লঃ সা. গু. 8 × 9 × 5 অর্থাৎ 360 দ্বারা উভয় পক্ষকেই গুণ করিয়া,

$$\frac{360(x-6)}{8} - \frac{360(2x-15)}{9} + 360 = \frac{360x}{15} - \frac{360(x-12)}{6},$$

অথবা
$$45(x-6)-40(2x-15)+360=24x-60(x-12)$$
,

অথবা,
$$45x - 270 - 80x + 600 + 360 = 24x - 60x + 720$$
, অথবা, $-35x + 690 = -36x + 720$. অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $-35x + 36x = 720 - 690$, অথবা, $x = 30$.

উপা. 3. সমাধান কর:
$$\frac{1}{3} \{4a(1+x) - \frac{9}{4}(a-x)\} = \frac{1}{4} \{3a(1-x) - \frac{16}{3}(a+x)\}$$
বাস পক্ষ = $\frac{4a}{3}(1+x) - \frac{3}{4}(a-x) = \left(\frac{4a}{3} - \frac{3a}{4}\right) + \left(\frac{4a}{3} + \frac{3}{4}\right)x$

$$= \frac{7a}{12} + \frac{16a + 9}{12}.x;$$

$$3a(x, x) = \frac{4}{3}(x+x) - \left(\frac{3a}{3} - \frac{4a}{3}\right) - \left(\frac{3a}{3} + \frac{4}{3}\right)x$$

এবং ডা'ন পক্ষ =
$$\frac{3a}{4}(1-x)$$
, $-\frac{4}{3}(a+x)$ = $\left(\frac{3a}{4}-\frac{4a}{3}\right)$ - $\left(\frac{3a}{4}+\frac{4}{3}\right)x$ $\frac{7a}{12}$ $\frac{9a+16}{12}$.x.

অতএব, সমীকরণটি এইরূপ দাঁড়াইল ঃ

$$\frac{7a}{12} + \frac{16a + 9}{12} . x = -\frac{7a}{12} - \frac{9a + 16}{12} . x.$$

উভয় পক্ষকেই 12 দারা গুণ করিয়া,

$$7a + (16a + 9)x = -7a - (9a + 16)x.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$\{(16a+9)+(9a+16)\}x = -14a,$$
well,
$$25(a+1)x = -14a;$$

অতএব, এখন উভয় পক্ষকেই 25(a+1) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x = \frac{-14a}{25(a+1)}$$
 ; ইহাই নির্ণেয় বর্গমূল।

উদা. 4.
$$\frac{x}{a+b} + 1 = \frac{x}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$$
 হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

এথন, হরগুলির ল. সা. গু. a^2-b^2 দ্বারা উভয় পক্ষকেই গুণ করিয়া,

$$(a-b)x + (a^2 - b^2) = (a+b)x + (a-b)^2.$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,
$$(a-b)x-(a+b)x=(a-b)^2-(a^2-b^2),$$

অথবা,
$$\{(a-b)-(a+b)\}x = -2ab+2b^2$$
,
অথবা, $-2bx = -2b(a-b)$.

স্থতরাং, উভয় পক্ষকেই -2b দারা ভাগ করিয়া. x=a-b.

প্রথমালা 59

x এর মান নির্ণয কর :

1.
$$3(x-4)^2 + 5(x-3)^2 = (2x-5)(4x-1) + 24$$

2.
$$(12x+9)^2 + (5x+3)^2 = (13x+9)^2 + 33$$

3.
$$5(x+1)^2 + 7(x+3)^2 = 12(x+2)^2$$
.

4.
$$(3x-14)^2 + (4x-19)^2 - (5x-23)^2 = 22$$
.

5.
$$(5x-8)^2 + (12x-7)^2 = (13x-10)^2 + 37$$
.

6.
$$(x-1)^3 + (x+1)^3 = 2x(x^2-1) + 4$$
.

7.
$$(x-2)^3 + 2x^3 + (x+2)^3 = 4x^2(x+2)$$
.

8.
$$(x+2)(x+3)(x+4)+96=x^2(x+9)+5(3x+13)$$
.

9.
$$3(x^2-14)=(x+1)^2+(x-2)^2+(x-5)^2$$
.

10.
$$a(x-a) = b(x-b)$$
. 11. $3(x-a) + 5(2x-3a) = 8a$.

নিম্লিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর:

12.
$$(x+a)(x+b) - (a+b)^2 = (x-a)(x-b)$$
.

13.
$$a^2(x-a) + b^2(x-b) = abx$$
. **14.** $m^2(x-m) + n^2(x+n) + mnx = 0$.

15.
$$b(x-2a) + a(x-2b) = (a - b)^2$$
.

16.
$$a(4x - a) + b(4x - b) - 2ab = 0$$
.

17.
$$x(x-a) + x(x-b) - 2(x-a)(x-b) = 0$$
.

18
$$(x+3a)(x-3b)+3(x-3a)(x+3b)=4(x-3a)(x-3b).$$

19.
$$(2b+2c-x)^2+(2b-2c+x)^2=(2b+2d-x)^2+(2b-2d+x)^2$$

29.
$$(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 = 3(x-a)(x-b)(x-c)$$
.

21.
$$(x+a)^3 + (x+b)^3 + (x+c)^3 = 3(x+a)(x+b)(x+c)$$
.

22.
$$\frac{x}{a} + a = \frac{x}{b} + b$$
. 23. $\frac{a}{bx} - \frac{b}{ax} = a^2 - b^2$.

24.
$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{4}(x+3) = 16.$$

24.
$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{4}(x+3) = 16$$
.
25. $\frac{x-6}{5} + \frac{x-4}{3} = 8 - \frac{x-2}{7}$. $\sqrt{}$ 26. $\frac{x}{10} + \frac{2x-13}{9} = 8 - \frac{4x-35}{15}$.

27.
$$\frac{x+7}{2} + \frac{x+13}{5} + \frac{x+17}{7} = \frac{x+27}{4}$$
.

28. $6\frac{1}{3} - \frac{x-7}{3} = \frac{4x-2}{5}$. [किन्तः क्षर्तिभिको, 1861.]

29. $\frac{x-1}{3} - \frac{x-9}{2} + \frac{3x-2(x-2)}{7} = 4\frac{1}{2}$.

30. $\frac{2x-9}{27} + \frac{x}{18} - \frac{x-3}{4} = 8\frac{1}{3} - x$. 31. $\frac{9x+7}{3} - (x-\frac{x-2}{7}) = 36$.

32. $\frac{7x+9}{4} - (x-\frac{2x-1}{9}) = 7$. 33. $\frac{x+7}{3} - 5\frac{3}{4} = \frac{2x+5}{7} + \frac{10-5x}{8}$.

34. $x - (3x - \frac{2x-5}{10}) = \frac{1}{6}(2x-57) - \frac{5}{3}$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1889.]

35. $\frac{4x-21}{7} + 7\frac{5}{8} + \frac{7x-98}{3} = x+3\frac{3}{4} - \frac{9-7x}{9}$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1866.]

37. $\frac{x-3}{7} - \frac{1}{3}(x-\frac{a}{4}) + \frac{1}{4}(x-\frac{a}{5}) = 0$.

[किन्तः क्षर्तिभको, 1866.]

38. $\frac{1}{8}(x-2) - \frac{1}{9}(x-4) = \frac{1}{12}(2x-3) - 2\frac{3}{4}$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1869.]

39. $\frac{a-x}{3} + \frac{2a-x}{2a} = \frac{3a-x}{3a}$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1870.]

40. $\frac{2x-13}{9} - \frac{x-1}{11} = \frac{x}{8} + \frac{x}{7} - 9$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1877.]

42. $\frac{4x+3}{9} + \frac{13x}{108} = \frac{8x+19}{18}$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1877.]

43. $\frac{4x-21}{9} - \frac{x-3}{108} = \frac{3x+2}{12} - \frac{x-5\frac{1}{2}}{6}$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1883.]

44. $\frac{a-x^2}{2} - \frac{b-x}{2} = \frac{c-x}{b} - \frac{b-x^2}{cx}$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1886.]

45. $\frac{x+2\frac{1}{2}}{15} + \frac{x+3\frac{1}{3}}{25} = \frac{c+4\frac{1}{3}}{5}$. [किन्तः क्षर्तिभको, 1888.]

46. $\frac{11x-13}{25} + \frac{19x+3}{7} - \frac{5x-2\sqrt{5}\frac{1}{3}}{4} = 28\frac{1}{7} - \frac{17x+4}{21}$.

47.
$$\frac{x-1\frac{25}{26}}{2} - \frac{2-6x}{13} = x - \frac{5x-\frac{1}{4}(10-3x)}{39}$$
.

48.
$$\frac{3x - \frac{2}{3}(1+x)}{4} + \frac{1 - \frac{1}{5}x}{5\frac{1}{2}} = \frac{2\frac{2}{5} + \frac{1}{25}(x-1)}{2\frac{1}{5}}.$$

49.
$$\frac{1}{3}(x-a) - \frac{1}{5}(2x-3b) - \frac{1}{2}(a-x) = 10a + 11b$$
.

50.
$$\frac{2x+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{3ax + (a-b)^2}{ab}$$
.

51.
$$\frac{2x+1}{29} - \frac{402-3x}{12} = 9 - \frac{471-6x}{2}.$$

$$52. \quad \frac{15 - \frac{2}{3}x}{2\frac{1}{2}} - \frac{2x + 5}{2\frac{1}{2}} = \frac{17 - \frac{1}{3}4x}{3}$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1874.]

- 113. দেশমিক-ভগ্নাংশবিশিষ্ট সামীকরপঃ আবশ্যক হইলে, মিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশ পরিণত করিয়া সমীকরণ সমাধান করা যাইতেরে।
 - উদা. 1. সমাধান কর: $\frac{x-2}{.05} \frac{x-4}{.0625} = 56$.

বৈহেতু, '
$$05 = \frac{5}{90}$$
 $\frac{1}{18}$ এবং ' $0625 = \frac{625}{10000} = \frac{625}{10000} = \frac{625}{16}$ অতথ্য, $\frac{x-2}{18} = \frac{x-4}{16} = 56$,

• অথবা, 18(x-2)-16(x-4)=56, অথবা, 2x+28=56; 2x=28, অথবা, x=14.

উদা. 2. সুমাধান কর:
$$.65x + \frac{.585x - .975}{.6} - \frac{.156}{.2} - \frac{.39x - .78}{.9}$$

$$\sqrt{\frac{585x - 975}{6}} = \frac{585x - 975}{6} = \frac{195x - 325}{2}$$
;

$$\frac{1.56}{2} = \frac{15.6}{2} = 7.8$$
; 94 ? $\frac{39x - .78}{9} = \frac{3.9x - 7.8}{9} = \frac{1.3x - 2.6}{3}$;

অতএব, সমীকরণটি এইরূপ দাঁড়াইলঃ

$$65x + \frac{1.95x - 3.25}{2} = 7.8 - \frac{1.3x - 2.6}{3}$$

স্বতরাং, উভয় পিক্ষকেই 6 দ্বারা গুণ করিয়া,

$$3.9x + (5.85x - 9.75) = 46.8 - (2.6x - 5.2).$$

পক্ষান্তর করিয়া,
$$(3.9+5.85+2.6)x = 46.8+5.2+9.75$$
, অথবা, $12.35x = 61.75$;
$$x = \frac{61.75}{19.35} = 5.$$

প্রথালা 60

নিম্লিথিত স্মীকরণগুলি স্মাধান কর:

1.
$$5x - 2x = 3x - 15$$
.

2.
$$3.75x + 5 = 2.25x + 8$$
.

3.
$$1.2x - \frac{18x - 0.5}{5} = 4x + 8.9$$
.

4.
$$\frac{x+.75}{125} - \frac{x-.25}{25} = 15$$
.

5.
$$\frac{x}{5} - \frac{1}{05} + \frac{x}{005} - \frac{1}{0005} = 0.$$

6.
$$5x + \frac{45x - 75}{6} = \frac{12}{2} - \frac{3x - 6}{9}$$
 7. $7x + 4 = 67x + 5$.

7.
$$7x + 4 = 67x + 5$$

8.
$$15x + \frac{135x - 225}{6} = \frac{36}{2} - \frac{09x - 18}{9}$$

9.
$$5x + \frac{.02x + .07}{.03} - \frac{x + 2}{.9} = 9.5.$$

10.
$$0.011x + \frac{0.001x - 0.125}{6} = \frac{5 - x}{03} - 0.145$$
. [किनि: প্রবেশিকা, 1.886.]

114. সুবিধামত 'পদ-সংযোগ' ও 'পক্ষান্তরকরণ' প্রক্রিয়া দারা সমীকরণ সমাধান:

উদা. 1. সমাধান কর:
$$\frac{23x-29}{12} + \frac{19x+13}{7} = \frac{97x+72\frac{1}{2}}{35} - \frac{7x-8\frac{1}{3}}{4}.$$

এখন পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{23x - 29}{12} - \frac{7x - 8\frac{1}{3}}{4} = \frac{97x + 72\frac{1}{2}}{35} - \frac{19x + 13}{7},$$

অথবা,
$$\frac{(23x-29)-(21x-25)}{12} = \frac{(97x+72\frac{1}{2})-(95x+65)}{35},$$
 অথবা,
$$\frac{x-2}{6} = \frac{2x+7\frac{1}{2}}{35}.$$

এখন, উভয় পক্ষকেই 6 × 35 দারা গুণ করিয়া,

$$35x - 70 = 12x + 45$$
 পাওয়া গেল।

স্থতরাং,
$$23x = 115$$
; অথবা, $x = 5$.

উদা. 2. সমাধান কর:
$$\frac{x-a(b+c)}{bc} + \frac{x-b(c+a)}{ca} + \frac{x-c(a+b)}{ab} = 3.$$

সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখা যাইতে পারে: যথা,

$$\frac{x - a(b + c)}{bc} + \frac{x - b(c + a)}{ca} + \frac{x - c(a + b)}{ab} = 1 + 1 + 1.$$

এখন পক্ষান্তর করিয়া,

$$\left\{\frac{x-a(b+c)}{bc}-1\right\}\left\{+\frac{x-b(c+a)}{ca}-1\right\}+\left\{\frac{x-c(a+b)}{ab}-1\right\}=0;$$

অথবা,
$$\frac{x-a(b+c)-bc}{bc} + \frac{x-b(c+a)-ca}{ca} + \frac{x-c(a+b)-ab}{ab} = 0$$
;

অথবা,
$$\frac{x - (ab + ac + bc)}{bc} + \frac{x - (ca + cb + ab)}{ca} + \frac{x - (ca + cb + ab)}{ab} = 0$$
,

অথবা,
$$\left\{x - (ab + bc + ca)\right\} \left\{\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab}\right\} = 0$$
;
 $x - (ab + bc + ca) = 0$.

অতএব, x = ab + bc + ca.

প্রথমালা 61

নিম্নলিথিউ সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$\frac{5x+6}{4} + \frac{64x-35}{15} = \frac{20x+23}{16} + \frac{13x-7}{3}$$
.

2.
$$\cdot \frac{17x - 13}{9} + \frac{108x + 75}{32} = \frac{27x + 19}{8} + \frac{50\frac{7}{18}x - 39}{27}$$
.

3.
$$\frac{29x - 18}{8} + \frac{189x - 93}{49} = \frac{86\frac{13}{21}x - 54}{24} + \frac{27x - 13}{7}.$$

4.
$$\frac{16x-17}{9} - \frac{23x-15}{16} = \frac{142\frac{7}{16}x-153}{81} + \frac{92x-65}{64}.$$

5.
$$\frac{18x - 19}{7} + \frac{135x + 62\frac{1}{2}}{65} = \frac{27x + 14}{13} + \frac{106\frac{5}{13}x - 114}{42}$$

6.
$$\frac{33 - 19x}{15} - \frac{41 + 27x}{28} + \frac{164 + 107\frac{1}{15}x}{112} - \frac{164\frac{13}{28} - 95x}{75} = 0.$$

7.
$$\frac{18-41x}{9} - \frac{17-16x}{8} + \frac{9\frac{16}{21}-10x}{5} - \frac{14-32x}{7} = 0.$$

8.
$$\frac{x-a^2}{b^2+c^2} + \frac{x-b^2}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} = 3.$$

9.
$$\frac{3x-bc}{b+c} + \frac{3x-ca}{c+a} + \frac{3x-ab}{a+b} = a+b+c$$
.

10.
$$\frac{ax - b^2 + c^2}{c - b} + \frac{bx - c^2 + a^2}{a - c} + \frac{cx - a^2 + b^2}{b - a} = 2(a + b + c).$$

11.
$$\frac{x - (b^3 + c^3)}{a^2 - 3bc} + \frac{x - (c^3 + a^3)}{b^2 - 3ca} + \frac{x - (a^3 + b^3)}{c^2 - 3ab} = a + b + c.$$

12.
$$\frac{p^2x + (l^3 + m^3)}{l^2 - lm + m^2} + \frac{q^2x + (m^3 + n^3)}{m^2 - mn + n^2} + \frac{r^2x + (n^3 + l^3)}{n^2 - ln + l^2} = 2(l + m + n)$$

II. সমীকরণ সম্মায় প্রশাবলী (Equational Problems)

115. 'সরল সমীকরণ' সম্বন্ধীয় সহজ প্রশ্নাবলী প্রতীক (symbols) সাহায্যে প্রকাশ করিয়া, উহাদের সমাধান করার প্রণালী ষষ্ঠ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে। বর্ত্তমানে ঐ জাতীয় জটিলতর প্রশ্ন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে।

পূর্ব্বেই থলা হইয়াছে যে, এই জাতীয় প্রশ্ন সমাধানের পক্ষে, প্রশ্নগুলিকে প্রতীক সাহায্যে প্রকাশ করাই প্রধানতঃ অস্ত্রবিধাজনক। অতএব, ইহাতে দক্ষতা লাভের জন্ম শিক্ষার্থিগণের এই জাতীয় প্রশ্নামূশীলনে বিশেষ অভ্যাস থাকা উচিত্।

যদিও এই সকল প্রশ্ন সমাধান করার কোন সাধারণ নিয়ম দেওয়া যায় না, তথাপি নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিলে, অনেক স্থবিধা হইবে বলিয়া আশা করা যায় :

- (1) কোন প্রশ্নকে বহুবার পড়িয়া ভালরূপে উহার অর্থ বুঝিয়া লও।
- (2) প্রশ্নের নির্ণেয় রাশিকে x দারা স্থচিত কর।
- (3) প্রশ্নে প্রদৃত্ত সর্ত্তসমূহ x এর সাহায্যে প্রকাশ করিয়। একটি সরল , সমীকরণ লিখ।
- (4) সর্বনেষে, এই দ্মীকরণ সমাধান করিয়া æ এর মান নির্ণয় কর।
 নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি বারা প্রাক্রিয়া-প্রণালী উত্তমরূপে বৃদ্ধিতে পারা যাইবে।
 ষষ্ঠ অধ্যায়ের উদাহরণগুলিও দেখ।

উলা. 1. 20 বৎসর পূর্ব্বে এক ব্যক্তির বয়স তাহার পুত্রের বয়সের পাঁচগুণ ছিল; 16 বৎসর পরে পুত্রের বয়স 41 বৎসর হইলে, পিতার বর্ত্তমান বয়ুস কত ?

এস্থলে, পিতার বর্ত্তমান বয়স নির্ণয় করিতে হইবে; অতএব, ইহাকে x দারা স্থচিত কর।

∴ 20 বৎসর পূর্বের, পিতার বয়স = (x - 20) বৎসর;
 আবার, 16 বৎসর পরে, পুত্রের বয়স 41 বৎসর হইবে;
 ∴ পুত্রের বর্ত্তমান বয়স = 41 - 16 অর্থাৎ 25 বৎসর;
 অতএব, 20 বৎসর পূর্বের, পুত্রের বয়স = 25 - 20 অর্থাৎ 5 বৎসর;
 কাজেই, প্রশ্নে প্রদত্ত সর্ত্তাম্পারে, x - 20 = 5 × 5;
 অথবা, x = 20 + 5 × 5 = 20 + 25 = 45 বৎসর।
 স্থতরাং, পিতার বর্ত্তমান বয়স 45 বৎসর।

উদা. 2. পাঁচটি ক্রমিক অথও সংখ্যার গোগফল 1185 হইলে, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

ক্ষুত্র সংখ্যাটিকে x দারা স্থাতিত কর। এখন, যেহেতু যে কোন গৃইটি ক্রমিক অথও সংখ্যার অন্তরফল 1 (এক), স্থতরাং অন্তান্ত সংখ্যাগুলি যথাক্রমে x+1, x+2, x+3 এবং x+4 হইবে।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তা হুসারে,

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) = 1185$$
;
অথবা, $5x + 10 = 1185$;
অথবা, $5x = 1185 - 10 = 1175$;
 $x = \frac{1175}{5} = 235$.

অতএব, নির্ণের সংখ্যাগুলির মধ্যে ক্ষুদ্রতমটি 235 হওয়ার, উহারা বথাক্রমে 235, 236, 237, 238 এবং 239 হইবে।

উদা. 3. ছই ব্যক্তি একই সময়ে A হইতে যাত্রা করিল; একজন ঘোড়ায় চড়িয়া ঘণ্টায় $7\frac{1}{3}$ মাইল গতিতে এবং অক্স ব্যক্তি রেল গাড়ীতে ঘণ্টায় 30 মাইল গতিতে চলিতে লাগিল; যদি প্রথমোক্ত ব্যক্তি শেষোক্ত ব্যক্তি হইতে 30 মিনিট পরে B তে পৌছায়, তাহা হইলে, A হইতে B এর দূরত্ব কত, তাহা নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1873.]

ধর, মাইল এককের তুলনায়, A হইতে B এর দূরত্ব-মান =x. তাহা হইলে, A হইতে B তে যাইতে, প্রথমোক্ত ব্যক্তির সময় $=\frac{x}{7\frac{1}{2}}$ \in টা, অর্থাৎ $\frac{2x}{15}$ ঘণ্টা, এবং শেষোক্ত ব্যক্তির সময় $=\frac{x}{30}$ ঘণ্টা।

অতএব, প্রদত্ত সর্তামুসারে,

$$\frac{2x}{15} = \frac{x}{30} + \frac{1}{2}$$
 [30 মিনিট $= \frac{1}{2}$ ঘণ্টা] অথবা, $4x = x + 15$; অথবা, $3x = 15$; কাজেই, $x = 5$.

উদ্ধা. 4. এক ব্যক্তিকে তাঁহার বয়সের কথা জিজ্ঞাসা করা হইলে, তিনি উত্তর করিলেন, "10 বৎসর পূর্বের, আমার পুত্রের বয়স হইতে আমার বয়স পাঁচগুণ বেশী ছিল, কিন্তু 20 বৎসর পরে, আমার বয়স আমার পুত্রের বয়সের কেবলমাক দিগুণ ছইবে।" ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স কর্ত ?

ধর, ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স=x বৎসর। তাহা হইলে, 10 বৎসর পূর্বের, ঐ ব্যক্তির বয়স = (x-10) বৎসর; এবং পুত্রের বয়স = $\frac{1}{5}(x-10)$ বৎসর। স্থতরাং, পুত্রের বর্ত্তমান বয়স = $\{\frac{1}{6}(x-10)+10\}$ বৎসর। কাজেই, 20 বৎসর পরে, পুত্রের বয়স = $\{\frac{1}{6}(x-10)+30\}$ বৎসর এবং স্পাষ্টতঃই পিতার বয়স = (x+20) বৎসর হইবে।

অতএব, প্রদত্ত দিতীয় সর্ত্তানুসারে,

$$x+20=2\{\frac{1}{5}(x-10)+30\}$$
 $\frac{2}{5}(x-10)+60$; $\frac{2}{5}(x-10)+60$; $\frac{2}{5}(x-10)+60$; $\frac{2}{5}(x-10)+300$; $\frac{$

উপরোক্ত উদাহরণে, ঐ ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়স 5x বৎসর ধরিয়া নইলে, প্রক্রিয়াতে কোন ভগ্নাংশবিশিষ্ট পদ থাকিত না।

উদা. 5. A এবং B উভয়েরই আয় সমান। A তাহার আর্টের এক-পঞ্চমাংশ সঞ্চয় করিল; কিন্তু B, A হইতে বৎসরে £80 অধিক ব্যয় করিয়া, চারি বৎসর পরে £220 পরিমাণ ঋণগ্রস্ত হইল। তাহাদের প্রত্যেকের আয় কত ?

ধর, প্রত্যেকের বাৎসরিক আয়ের পরিমাণ $\pounds x$. তাহা হইলে, A বৎসরে $\pounds \hbar x$ খরচু করে; স্মতরাং B বর্ৎসরে $\pounds(\frac{1}{2}x+80)$ খরচ করে; এবং এই পরিমাণ খরচ করিয়া B চারি বৎসরে £220. অর্থাৎ এক বৎসরে £55 পরিমাণ ঋণগ্রস্ত হইল। কাজেই, এক বৎসরে B এর আয় অপেক্ষা ব্যয়, $\pounds 55$ পরিমিত বেশী।

অতএব, $x = (\frac{4}{5}x + 80) - 55$; অথুবা, $\frac{1}{5}x = 25$; ... x = 125. স্তুর্ন্থা, A ও B প্রত্যেকেই বৎসরে £125 আয় করে।

উলা. 6. একজন স্ত্রীলোক কতকগুলি ডিম প্রতি পেনিতে ছইটা দরে, এবং সমান সংখ্যক ডিম প্রতি পেনিতে তিনটা দরে, ক্রয় করিয়া সমস্ত ডিম প্রতি ছই পেনিতে পাঁচটা দরে বিক্রয় করিল; ইহাতে তাহার 4 পেনি লোকসান হইলে, সে মোট কতগুলি ডিম কিনিয়াছিল?

ধর, তাহার ক্রীত ডিমের সংখ্যা = x. তাহা হইলে, যথন মোট ডিমের অর্দ্ধ-সংখ্যা, পেনি প্রতি তুইটা দরে, এবং অর্দ্ধ সংখ্যা, পেনি প্রতি তিনুটা দরে, কেনা হইয়াছে ; অতএব, সমস্ত ডিমের ক্রয়-মূল্য

$$=\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, \frac{1}{3}\right)$$
্রেন্স $=\left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6}\right)$ পেন্স্।

সমস্ত ডিম প্রতি ছই পেনিতে 5 টা করিয়া বিক্রয় করিয়া লব্ধ মূল্য $=x \times \frac{2}{5}$ পেন্স্।

অতএব, প্রদত্ত সর্তামুসারে,
$$\frac{2x}{5} = \left(\frac{x}{4} + \frac{x}{6}\right) - 4$$
;

অথবা, 24x = 15x + 10x - 240; $\therefore x = 240$.

অতএব, সে 240 টা ডিম কিনিয়াছিল।

উদা. 7. ছই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককস্থানীয় অঙ্কটি দশকস্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ; এবং ঐ অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি হইতে 2 বাদ দিলে বিয়োগফল সংখ্যাটির এক-ষষ্ঠাংশ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

্ধর, সংখ্যাটির দশকস্থানীয় অঙ্ক =x ; তাহা হইলে এককস্থানীয় অঙ্ক =2x ;

সংখ্যাটি =
$$10x + 2x$$
;

=12x. [65 নিয়মের পরবর্ত্তী চতুর্থ উদাহরণ দেখ।]

কাজেই, প্রদৈত্ত সর্ত্তামুসারে.

$$(x+2x)-2=\frac{12x}{6}$$
; অথবা, $18x-12=12x$; অথবা, $6x=12$; $\therefore x=2$.

স্থতরাং. নির্ণেয় সংখ্যা = 24.

প্রথমালা 62

1. একথা ক্রিজমিক্র দৈর্ঘ্য উহার প্রস্তের দিগুণ ; উহা হইতে দৈর্ঘ্যে 50 গজ এবং প্রস্তে 10 গজ বড় আর একথানি জমির অন্তর্যতন পূর্ব্বোক্ত জমির আয়তন হইতে 6800 বর্গগজ বেশী। প্রত্যেকথানি জমির পরিমাণ নির্ণয় কর।

- বেও মুক্তি একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রেস্থ অপেক্ষা 3 ফুট বেশী। উহার দৈর্ঘ্য 3 ফুট কমাইলে এবং প্রেস্থ ক্রি ফুট কাড়াইলে, উহার ক্ষেত্রফলের কোনদ্রপ পরিবর্ত্তন হয় না; ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
 - 3. A ও B সমপরিমাণ অর্থ লইয়া খেলিতে আরম্ভ করিল; খেলায় B তাহার অর্থের $\frac{\pi}{12}$ অংশ হারিল এবং A, B এর অবশিষ্ট অর্থের অর্দ্ধ হইতে $\pounds 6$ বেশী লাভ করিল। প্রত্যেকে কত লুইয়া খেলা আরম্ভ করিয়াছিল ?
 - 4. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি ৪০ বৎসর ; আবার, পুত্রের বয়সের দিশুণ করিলে উহা পিতার বয়স্ অংশুক্ষা 10 বৎসর বেশী হয় ; প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।
- 5. এক ব্যক্তি ক্রিয়া পুরুষ ও স্ত্রীলোকের মধ্যে £5 এরূপে ভাগ করিয়া দিল যে, প্রত্যেক পুরুষ 3 শি. এবং প্রত্যেক স্ত্রীলোক 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইল। পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা নির্ণয় কর। প্রিয়-জ- ক্রিয়া পাইল।
- 6. 154 মাইল দ্রবর্তী ছুইটি স্থান হইতে যথাক্রমে $A \otimes B$ নামক ছুই ব্যক্তি পথিমধ্যে মিলিত হইবার নিমিত্ত একই সময়ে যাত্রা করিল ; A, প্রতি ছুই ঘণ্টায় B মাইল হিসাবে এবং B, প্রতি চারি ঘণ্টায় B মাইল হিসাবে গমন করিলে, তাহারা কথন এবং কোথায় মিলিত হইল ?
- ্বি.) একজন মজুরকে 36 দিনের জন্ম এই সর্ব্তে কাজে নিযুক্ত করা হইল যে, তাহার কাজের জন্ম সে দৈনিক 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইবে, কিন্তু অমুপস্থিত হইলে, প্রত্যেক দিনের জন্ম তাহাকে 1 শি. 6 পে. করিয়া ক্ষতিপূরণ দিতে হইবে। নিদিষ্ট সময়ের পর সে মোট 58 শি. পাইয়া থাকিলে, সে কতদিন কাজ করিয়াছিল ? '
 - ৪. এক ব্যক্তি যে মূল্যে একথানি ছবি কিনিলেন, সেই পরিমাণ খরচেই উহা বাঁধাইলেন; যদি বাঁধাই থরচ £1 কম এবং ছবির মূল্য 15 শি. বেশী ওইত, তাহা হইলে, বাঁধাই খরচ ছবির মূল্যের ঠিক অর্দ্ধ হইত; ছবির মূল্য নির্ণয় কর।

কিলঃ প্রবেশিকা, 1860.]

- 9. একটি খুঁটির এক-চতুর্থাংশ কাদার ভিতর, এক-তৃতীয়াংশ জলের ভিতর এবং 10 ফুট জলের উপরে আছে। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত ? [কলি: প্রবৈশিকা, 1863;]
- 10. একজন মজুরকে 30 দিনের জন্ম এই সর্ত্তে কাজে নিযুক্ত করা হইল যে, কাজ করিলে প্রতিদিন সে 2 শি. 6 পা. করিয়া পাইবে এবং কাজুনা করিলে প্রতিদিনের জন্ম তাহার এক শিলিং করিয়া কাটা যাইবে। সে মোট £2. 7 শি. পাইয়া থাকিলে কতদিন সে কাজ ক্রিয়াভিদ এবং কতদিনই বা য়ে বসিয়া কাটাইয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।

া। A একটি কাজ 9 দিনে শেষ করিতে পারে, B এর উহা করিতে দিগুণ সময় লাগে এবং C একদিনে A এর দৈনিক কাজের পরিমাণের $\frac{9}{4}$ অংশ করিতে পারে। A, B, C একত্রযোগে কাজ করিলে, কতদিনে উহা শেষ করিতে পারিবে ?

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

- 12 £54. 12 শি. এর ভিতর যত সংখ্যক পাউগু ঠিক তত সংখ্যক শিলিং আছে ; প্রত্যেকের সংখ্যা নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1885.]
- 13. A, B ও C এর মধ্যে কতক পরিমাণ অর্থ এরপর্ভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, A সমস্ত অর্থের অর্ধ হইতে £30 কম, B সমস্ত অর্থের এক-তৃতীরাংশ হইতে £10 কম এবং C সমস্ত অর্থের এক-চতুর্থাংশ হইতে £8 বেশী পাইল। প্রত্যেকে কত করিয়া পাইল?
- 14. একজন লোক কতকগুলি ভেড়া কিনিতে যাইয়া দেখিতে পাইল যে, প্রতি ভেড়া £2. 2 শি. দরে কিনিলে ভেড়াগুলির মোট মূল্য দিতে তাহার £1. 8 শি. কম পড়িবে; কিন্তু প্রতি ভেড়া £2 দরে কিনিতে পারিলে উহাদের মূল্য দেওয়ার পর তাহার তহবিলে £2 উদ্বৃত্ত থাকিবে। সে কতগুলি ভেড়া কিনিতে গিয়াছিল এবং তাহার তহবিলই বা কত ছিল?
- 15. ইয়র্ক এবং লণ্ডন, 200 মাইল দ্রবর্ত্তী এই ছইটি শহর হইতে ছইখানা গাড়ী একই সময়ে রওনা হইল; একখানা ঘণ্টায় 9½ মাইল এবং অন্তথানা ঘণ্টায় 9½ মাইল বেগে চলিতে থাকিলে, রওনা হওয়ার কতক্ষণ পরে এবং কতদূরে তাহারা মিলিত হইবে ?
- 16. আমি কতকগুলি আতা প্রতি পেনিতে তিনটি দরে এবং উহার ৡ-সংখ্যক আতা প্রতি পেনিতে চারিটি দরে কিনিয়া, একত্রে প্রতি 6 পেন্সে 16 টি দরে সমস্ত আতা বিক্রয় করিয়া মে‡টু ৪ৡ পেন্স্ লাভ করিলাম। আমি কতগুলি আতা কিনিয়াছিলাম ?
- 17. ছই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 5, এবং বামদিকের অঙ্কটির সহিত 1 মোগ করিলে যোগফল সংখ্যাটির এক-অষ্টমাংশ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 18. ত্ই অন্ধবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশকস্থানীয় অন্ধটি এককস্থানীয় অন্ধটি হইতে চ্বুবড়; এবং সংখ্যাটি হইতে অন্ধন্ধয়ের সমষ্টির প্রাচগুণ বিয়োগ করিলে সংখ্যান্থিত অন্ধ তুইটি উন্টোইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 19. ত্ই অস্ক্রিশিষ্ট্র,কোন সংখ্যার অঙ্কছয়ের সমৃষ্টি 5 এবং দশকস্থানীয় অঙ্কটির দশগুণের সহিত এককস্থানীয় অঙ্কটির চত্ত্বপ্তর্ণ যোগ করিলে, সংখ্যাস্থিত স্কুষ্ক তুইটি উন্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

- 20. 39 কে এরূপ চারিভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগের সহিত 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় ভাগ হইতে 2 বাদ দিলে, তৃতীয় ভাগকে 3 দ্বারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে, লব্ধ ফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।
- 21. 60 কে এরূপ চারিভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগ হইতে 3 বাদ দিলে, দ্বিতীয় ভাগের সহিত 11 যোগ করিলে, তৃতীয় ভাগন্ধক 4 দ্বারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে, লব্ধ ফলগুলি পরস্পার সমান হইবে।
- 22. 116 কে এরাপ চারিভাগে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগের সহিত 5 যোগ করিলে, দ্বিতীয় ভাগ হইতে 4 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় ভাগকে 3 দারা গুণ করিলে, এবং চতুর্থ ভাগকে 2 দারা ভাগ করিছুল, লব্ধ ফলগুলি পরস্পর সমান হইবে।

অষ্টাদশ অথ্যায়

সরল সহ-সমীকরণ (Simultaneous Equations)

এবং

তৎসম্বন্ধীয় প্রশ্নাবলী (Problems)

I. • সরল সহ-সমীকরণ

116. ভূমিকা x-y=2 সমীকরণটিতে $x \cdot y$ এই ছুইটি অজ্ঞাতরাশি বর্ত্তমান এবং স্পষ্টই বুঝা যায় যে, অজ্ঞাতরাশিষয়ের অসংখ্য মান দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইতে পারে; কারণ, যে সংখ্যাদ্বয়ের অন্তর্মণ 2 হইবে, সেই সংখ্যাদ্বয় দারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। [যথা, x=4, y=2; বা, x=5, y=3; বা, x=6, y=4; বা, x=-3, y=-5; ইত্যাদি।] অধিকন্ত, যদি দেওয়া থাকে যে, $x \cdot y$ y, x+y=8 সমীকরণটিকেও সিদ্ধ করিবে, তাহা ইইলে পূর্ক্তোল্লিখিত বিভিন্ন সংখ্যাযুগলের মধ্যে যে সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি x হইবে, তাহাদিগকেই নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব দেখা যায় যে,

$$\begin{cases}
 x - y = 2 \\
 x \rightarrow y = 8
 \end{cases}$$

এই সুমীকরণ্দ্র $x \otimes y$ এর একই মান দারা যুগপৎ সিদ্ধ হইতে পারে, কেবলমাত সিদ্ধ x = 5 এবং y = 3 হয়।

আবার দেখা যাইতে পারে যে.

$$x+y+z=6$$

$$x-y+z=4$$

$$x+y-z=2$$

এই সমীকরণ তিনটির প্রত্যেকটি স্বতন্ত্রভাবে x,y ও z এর অসংখ্য মান দারা সিদ্ধ হইতে পারিলেও, উহারা কেবলমাত্র $x=3,\ y=1$ এবং z=2 এই মান তিনটি দারাই যুগপৎ সিদ্ধ হইবে।

উপরোক্ত সমীকরণগুলির স্থায়, তুই বা ততোধিক সমীকরণের প্রত্যেকটিই যদি উহাদের অন্তর্গত অজ্ঞাতরাশিসমূহের **একই** মান শারা মুগপৎ সিদ্ধ হয়, তাহা হইলে, ঐ সমীকরণগুলিকে সহ-সমীকরণ (simultaneous equation) বলে। সমীকরণস্থিত অজ্ঞাতরাশিগুলির প্রত্যেকটিই একশক্তিবিশিষ্ট হইলে এবং সমীকরণে উহাদের তুই বা তদধিকের গুণফলবিশিষ্ট কোন পদ না থাকিলে, সমীকরণটিকে সরল বা একশক্তি-সমীকরণ বলা হয়।

প্রথমতঃ আমরা ছই বর্ণ (বা জ্ঞাতরাশি)-বিশিষ্ট সরল সহ-সমীকরণ সম্বন্ধে আলোচনা করিব। এই প্রকার সমীকরণ সমাধান করিবার সাধারণতঃ তিনটি পদ্ধতি আছে; উহাদিগকে যথাক্রমে নিম্নলিখিতরূপে সন্ধিবেশিত করা যাইতেছে।

117. প্রথম পাদ্ধাতিঃ সমীকরণদ্বরের যে কোনটি হইতে, অজ্ঞাত-রাশিদ্বরের যে কোনটির মান অপরটি দারা প্রকাশ করিয়া, ঐ লব্ধ মান অক্যু, সমীকরণটিতে স্থাপন কর।

উদা. 1. সমাধান কর ঃ
$$5x-24y=16$$
\ $4x-y=31$ দিতীয় সমীকুরণ্টি হইতে দেখা যায় যে, $y=4x-31$... (1) y এর এই লব্ধ মান প্রথম সমীকরণ্টিতে y এর পরিবর্ত্তে বসাইলে,

$$5x - 24(4x - 31) = 16$$
;
অথবা, $5x - 96x + 744 = 16$, পাওয়া যায় ।
 $-91x = -728$; $x = 8$.

অতএব, (1) হইতে, $y=4\times 8-31=1$ পাওয়া গেল। স্থতরাং, x=8 এবং y=1; ইহাই নির্ণেয় বীজ (root)।

উদা. 2. সমাধান কর:
$$\frac{3x-5y}{2}+3=\frac{2x+y}{5}$$
; $8-\frac{x-2y}{4}=\frac{x}{9}+\frac{y}{3}$.

প্রথম সমীকরণের উভয় পক্ষকে 10 দ্বারা গুণ কর:

জতএব,
$$5(3x - 5y) + 30 = 2(2x + y)$$
,
জথবা, $15x - 25y + 30 = 4x + 2y$;
 $\therefore 11x = 27y - 30$. (1)

দিতীয় সমীকরণের উভয় পক্ষকে 12 দারা গুণ কর;

ষত্এব,
$$96 - 3(x - 2y) = 6x + 4y$$
,
ষথবা, $96 - 3x + 6y = 6x + 4y$,
 $2y - 9x + 96 = 0$. (2)

(1) হইতে
$$x = \frac{27y - 30}{11}$$
 ... (3)

x এর এই মান (2) তে x এর পরিবর্ত্তে বসাও;

অতএব,
$$2y - \frac{9(27y - 30)}{11} + 96 = 0$$
;

$$22y - 9(27y - 30) + 1056 = 0,$$

অথবা,
$$22y - 243y + 270 + 1056 = 0$$
;

$$\therefore$$
 221 $y = 1326$; \therefore $y = 6$.

কাজেই, (3) হইতে,
$$x = \frac{27 \times 6 - 30}{11} - \frac{132}{11} = 12$$
.
স্থাবাং, $x = 12$ ও $y = 6$.

প্রথমালা 63

নিম্নলিখিত স্মীকরণগুলি স্মাধান কর:

1.
$$x + 4y = 14$$
 2. $5x - 8y = 9$ 3. $2x + 3y = 32$ $11y - 9x = 3$ 4. $9x - 4y = 8$ 5. $x + ay = b$ 6. $2x - \frac{1}{5}(y - 3) = 4$ $3y + \frac{1}{3}(x - 2) = 9$ 7. $\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{3}(2x + 4)$ 8. $\frac{1}{3}(x - y) = \frac{1}{2}(x - 24)$ 8. $\frac{1}{3}(x - y) = \frac{1}{2}(x - 24)$ $\frac{1}{3}(x - y) = \frac{1}{3}(x - y) = \frac{1$

1.
$$\frac{1}{8}(3x-2y)-3 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}(2x-y)$$
 10. $\frac{1}{8}(2x+3y)+\frac{1}{8}x=8$ $\frac{1}{2}(5x-4y)-3=\frac{1}{8}(4x-3y)$ $\frac{1}{2}(7y-3x)-y=11$

118. ত্রিভীয় পাদ্ধাভিঃ সমীকরণদ্বরের প্রত্যেকটি হইতে, অজ্ঞাতরাশি তুইটির যে কোনটির (ধর, y এর) মান অপর অজ্ঞাতরাশিটি (অর্থাৎ x) দারা প্রকাশ করিয়া, ঐ শব্ধ মানদ্বরের সমতা স্থাপন কর।

উদা. 1. সমাধান কর:
$$6x - 5y = 11$$
, $2x + 3y = 27$.
প্রথম সমীকরণ হইতে, $5y = 6x - 11$,
$$\therefore y = \frac{6x - 11}{5} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, 3y = 27 - 2x,

$$\therefore \quad y = \frac{27}{3} \cdot \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

অতএব, (1) ও (2) হইতে,
$$\frac{6x-11}{5} = \frac{27-2x}{3}$$
; . . . $3(6x-11) = 5(27-2x)$; অথবা, $18x-33 = 135-10x$; $28x = 168$: x

স্থতরাং, (1) হইতে,
$$y = \frac{6 \times 6 - 11}{5} = 5$$
.

অতএব, x=6 এবং y=5.

ভিনা. 2. সমাধান কর:
$$\frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3y-5$$

$$\frac{5y-7}{2} + \frac{4x-3}{6} = 18-5x.$$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1880.]

প্রথম সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 20 দ্বারা গুণ করিয়া,

4(7+x) -
$$5(2x-y) = 20(3y-5)$$
;

অথবা, $28-6x+5y=60y-100$;
 $... 55y+6x=128....$ (1)

দ্বিতীয় সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায় যে,

অথবা,
$$3(5y-7) + (4x-3) = 6(18 \frac{1}{1}, 5x);$$

$$15y-21+4x-3=108-30x.$$

$$34x+15y=132.$$

সহজ বীজগণিত

(1) হইতে,
$$y = \frac{128 - 6x}{55}$$
 ... (3)

এবং (2) হইতে,
$$y = \frac{132 - 34x}{15}$$
 ... (4)

.·. (3) ও (4) হইতে**,**

$$\frac{128-6x}{55} = \frac{132-34x}{15}$$
; অথবা, $\frac{64-3x}{11} = \frac{66-17x}{3}$;

[উভয় পক্ষকে 💈 দারা গুণ করিয়া]

3(64 – 3
$$x$$
) = 11(66 – 17 x);
থথবা, 192 – x = 726 – 187 x ;
 x = 3.

অতএব, (3) হইতে,
$$y = \frac{128 - 6 \times 3}{55} = \frac{110}{55} = 2.$$

স্থতরাং, $x = 3$ এবং $y = 2$.

প্রথমালা 64

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$5x - 3y = 9$$

 $5y + 2x = 16$

3.
$$3x - 7y = 7$$

 $11x + 5y = 87$

5.
$$32x - 25y = 28$$

 $14x + 15y = 116$

2.
$$3y - 4x = 1$$

 $3x + 4y = 18$

4.
$$y(3+x) = x(7+y)$$

 $4x+9 = 5y-14$

6.
$$\frac{1}{7}(3x+y) = \frac{1}{6}(2x+y+1)$$

8 - $\frac{1}{6}(x-y) = 6$

7.
$$\frac{1}{1}\frac{1}{8}(5x-6y)+3x = 4y-2$$

 $\frac{1}{8}(5x+6y)-\frac{1}{4}(3x-2y)=2y-2$

8.
$$2x - \frac{1}{4}(y+3) = 7 + \frac{1}{5}(3y-2x)$$

 $4y + \frac{1}{8}(x-2) = 26\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2y+1)$

9.
$$2x - \frac{1}{3}(2y - 1) = 3\frac{5}{24} + \frac{1}{4}(3x - 2y)$$

 $4y - \frac{1}{4}(5 - 2x) = 6 - \frac{1}{5}(3 - 2y)$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1873.]

ে
$$\frac{x}{3} - \frac{2}{y} = 1, \frac{x}{4} + \frac{3}{y} = 3.$$
 [এলাহাবাদ, 1923.]

119. ভৃতীয় শর্কাভিঃ সমীকরণদ্বাকে এক্প-ছুক্টি সংখ্যাদারা গুণ কর যে, গুণুনোৎপদ্ম সমীকরণ চুইটিতে, স্ম্প্রভাতরাশিদ্বরের যে কোনটির সহগদ্বর উভর সমীকরণেই সমান হইবে; তাহা হইলে, এই শেষোক্ত সমীকরণ চুইটির যোগ বা বিয়োগ দারা এরূপ একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে, যাহাতে একটিমাত্র অজ্ঞাতরাশি বর্ত্তমান থাকিবে।

উলা. 1. সমাধান কর:
$$3x-4y=5$$
 $5x+2y=17$

ছিতীয় সমীকরণটিকে 2 দারী গুণ করিয়া, 10x+4y=34 পাওয়া গেল ; } এবং প্রথম সমীকরণটি 3x-4y=5

অতএব, যোগ করিয়া, 13x = 39; $\therefore x = 3$.

প্রথম সমীকরণে x এর এই মান বসাইলে, 4y=9-5=4 ; y=1. অতএব, x=3 এবং y=1.

উদা. 2. সমাধান কর:
$$5x + 9y = 89$$
 } $2x - 17y = 15$

সমীকরণহয়ের প্রথমটিকে 2 দারা এবং দ্বিতীয়টিকে 5 দারা গুণ কর।

স্থতরাং,
$$10x + 18y = 178$$

এবং $10x - 85y = 75$

অতএব, বিয়োগ করিয়া, 103y = 103; $\therefore y = 1$.

দিতীয় সমীকরণে y এর এই মান বসাইলে,

$$2x = 15 + 17 = 32$$
; ... $x = 16$.
সতএব, $x = 16$ এবং $y = 1$.

। উপরোক্ত প্রক্রিয়ার পরিবর্তে, প্রথম সমীকরণটিকে 17 দ্বারা এবং দিতীয়টিকে 9 দ্বারা গুণ করিয়া, লব্ধ সমীকরণদ্বয়কে যোগ করিলে x এর মান নির্ণয়ক সমীকরণটি প্রথমে পাঁওয়া যাইত। উপরোক্ত প্রক্রিয়া অবলম্বনের কারণ এই যে, উভয় সমীকরণেই x এর সহগ দ্বোট সংখ্যা হওয়ায় গুণনকার্য্য সহজ্যাধ্য হইয়াছে।

উদা. 3. সমাধান কর:
$$23x - 24y = 21$$
 $25x - 16y = 43$

সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটিকে 2 দারা এবং দ্বিতীয়টিকে 3 দারা গুণ করিলে,

$$46x - 48y = 42$$
 $75x - 48y = 129$ গাওয়া যায়

অতএব, বিয়োগ করিয়া, 29x = 87: ... x = 3.

দিতীয় সমীকরণটিতে x এর এই মান বসাইলে

$$16y = 75 - 43 = 32$$
; $\therefore y = 2$. স্থতরাং, $x = 3$ এবং $y = 2$.

টীকা। এন্থলে লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, গুণন-লব্ধ সমীকরণদ্বয়ে y এর সহগ, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের y এর সহগ তুইটির ল. সা. গু.। সকল ক্ষেত্রেই এইরূপ করা উচিত, নতুবা গুণন-প্রক্রিয়া অযথা কপ্টসাধ্য হইয়া পড়ে।

উলা. 4. সমাধান কর:

$$\frac{x-2}{2} - \frac{x+y}{14} = \frac{x-y-1}{8} - \frac{y+12}{4}$$
, [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.]
$$\frac{x+7}{3} + \frac{y-5}{10} = 1 - x - \frac{5(y+1)}{7}$$

প্রথম সমীকরণ হইতে,

$$\frac{7(x-2)-(x+y)}{14} = \frac{(x-y-1)-2(y+12)}{8};$$
অথবা,
$$\frac{6x-y-14}{7} = \frac{x-3y-25}{4},$$
অথবা,
$$24x-4y-56 = 7x-21y-175,$$
অথবা,
$$17x+17y = -119;$$
অথবা,
$$x+y=-7.$$
 ... (1)

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে,

$$\frac{10(x+7)+3(y-5)}{30} = \frac{7(1-x)-5(y+1)}{7};$$
 স্বধ্বা,
$$\frac{10x+3y+55}{30} = \frac{2-7x-5y}{7},$$

অথবা,
$$70x + 21y + 385 = 60 - 210x - 150y$$
;
 $280x + 171y = -325$ (2)

(1) কে 171 দ্বারা গুণ করিয়া,
$$171x + 171y = -1197$$
;

আবার,
$$280x + 171y = -325$$
.

স্থতরাং, বিয়োগ করিয়া, 109x = 872; x = 8. x এর এই মান (1) তে বনাইয়া, y = -7 - 8 = -15. সভএব, x = 8 এবং y = -15.

|. 5. সমাধান কর:
$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1$$

$$\frac{7}{x} + \frac{4}{y} = 1\frac{7}{8}.$$

প্রথম সমীকরণটিকে 4 দারা এবং দ্বিতীয়টিকে 3 দারা গুণ করিয়া,

অতএব, বিয়োগ করিয়া, $\frac{13}{x} = \frac{13}{8}$;

প্রথম সমীকরণে x এর মান বসাইয়া,

$$\frac{3}{y} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
; $y = 4$

স্কুতরাং,

x=8 এবং y=4.

প্রশালা 65

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$7x - 5y = 11$$

 $3x + 2y = 13$
2. $13x + 6y = 58$
 $5x - 11y = 9$
3. $8x - 9y = 20$
 $7x - 10y = 9$

7.
$$28x - 15y = 41$$
 8. $19x + 24y = 34$ 9. $47x - 56y = 123$ $23x + 36y = 62$ $25x + 84y = 293$

10.
$$.51x - 16y = 3$$
 11. $52x - 9y = 34$ **12.** $12x + 85y = -49$ $68x + 23y = 137$ $39x + 14y = 67$ $19x - 34y = 91$

13.
$$65x - 14y = 9$$
 14. $15x + 46y = 17$ **15.** $14x + 81y = 53$ $91x - 15y = 31$ $13x + 69y = 73$ $17x + 135y = 101$

16.
$$5x + 11y = 146$$
 17. $ax + by = c$ $11x + 5y = 110$ $ax + b^2y = c^2$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1881.]

18.
$$\frac{x+y}{2} + \frac{3x-5y}{4} = 2$$
 $\left. \begin{array}{c} \frac{x}{14} + \frac{y}{18} \\ \end{array} \right. = 1$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

19.
$$\frac{4x+5y}{40} = x - y$$

$$\frac{2x-y}{3} + 2y = \frac{1}{2}$$
20.
$$\frac{4x-3y-7}{5} = \frac{3x}{10} - \frac{2y}{15} - \frac{5}{6}$$

$$\frac{y-1}{3} + \frac{x}{2} - \frac{3y}{20} = \frac{y-x}{15} + \frac{x}{6} + \frac{11}{10}$$

21.
$$\frac{5x-3y}{12} + \frac{7x-5y}{15} = 1 - \frac{25x+3y}{60}$$

$$(3\frac{1}{2})x^{\frac{9}{2}} + 2y - 5 + \frac{11x - (4\frac{1}{3})y + 17}{11} = \frac{19}{22} + \frac{17x - 10y + 2}{3}$$
22.
$$\frac{3x-5y}{3} - \frac{2x-8y-33}{12} = \frac{y}{2} + \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$$

$$3\frac{1}{2}\left(\frac{x}{7} + \frac{y}{4} + 1\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1}{3}\left(4x - \frac{y}{8} - 24\right)$$
23.
$$2\cdot 4x + 32y - \frac{18x - 025}{25} = \cdot 8x + \frac{5\cdot 2 + 01y}{5}$$

$$\frac{2y+5}{1\cdot 5} = \frac{49x-7}{4\cdot 2}$$
24.
$$\frac{4}{x} + \frac{10}{y} = 2$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$$

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20}$$

$$\frac{1879.}{1879.} \cdot \frac{5}{x} + \frac{10}{y} = 5\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{5x} + \frac{3}{3y} = 1\frac{2}{16}$$
27.
$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{5y} = 1$$

$$\frac{1}{5x} + \frac{1}{3y} = 1\frac{2}{16}$$
28.
$$\frac{3}{y} - \frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{2}{5x} + \frac{5}{2y} = 7$$
29.
$$\frac{x}{4} + \frac{2}{y} = 2$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{3}{2y} = 2\frac{7}{20}$$
30.
$$\frac{1}{5x} + \frac{y}{9} = 5$$

$$\frac{1}{3x} + \frac{y}{2} = 14$$

$$\frac{1}{376.} \cdot \frac{1}{376.} \cdot \frac{1}{376.}$$

II. সরল সহ-সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী (সহজ)

120. উদা. 1. A এবং B উভয়ের নিকটেই কতগুলি করিয় আম ছিল; A, B কে বলিল, ''তোমার আম হইতে আমাকে 30টি দিলে আমার আমের সংখ্যা তোমার সংখ্যার দিগুণ হইবে।" B উত্তর করিন, ''তুমি যদি আমাকে 10টি দাও, তবে আমার আমের সংখ্যা তোমার আমের সংখ্যা তিনগুণ হইবে।" প্রত্যেকের কতগুলি করিয়া আম ছিল?

ধর, A এর আমের সংখ্যা x এবং B এর আমের সংখ্যা y. তাহা হইলে, A এর উদ্ভি অনুসারে, $x+30=2(y-30) \qquad \cdots \qquad (1)$

এবং B এর উক্তি অমুসারে.

$$y + 10 = 3(x - 10)$$
 ... (2)

(2) হইতে. 3x - y = 40.

অথবা,
$$6x - 2y = 80$$
 ... (3)

(1) হইতে,
$$x-2y=-90$$
 ... (4)

ম্বতরাং, বিয়োগ করিয়া, 5x = 170; $\therefore x = 34$.

(4) তে x এর এই মান বসাইলে.

$$2y = 34 + 90 = 124$$
; $y = 62$.

অতএব, A এর 34টি এবং B এর 62টি আম ছিল।

উদা. 2. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 🎷 যোগ করিলে উহা 2 তে পরিণত হয় এবং হর হইতে 2 বাদ দিলে উহা 1এ পরিণত হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

ধর, নির্ণেয় ভগ্নাংশ =
$$\frac{x}{y}$$
 .

তাহা হইলে,
$$\frac{x+7}{y} = 2 \dots$$
 ... (1)

এবং
$$\frac{x}{y-2} = 1 \dots$$
 ... (2)

এখন, (1) হইতে, x+7=2y; $\therefore x=2y-7$ এবং (2) হইতে, x=y-2

এবং (2) হইতে, $x = y - 2^{\int}$ 2y - 7 = y - 2; y = 5 এবং x = 5 - 2 = 3.

$$2y-7=y-2$$
; $y=5$ and $x=5-2=3$.

ু অতএব, নির্ণেয় ভগ্নাংশ = ই.

উদা. 3. চারিজন পুরুষ এবং চারিজন বালক যে কাজ তিনদিনে সম্পন্ন করিতে পারে, তুইজন পুরুষ এবং সাতজন বালকের তাহা করিতে চারিদিন লাগে। • একজন পুরুষ বা একজন' বালক ঐ কাজ কতদিনে শেষ করিতে পারে ?

ধর, একজন পুরুষ x দিনে এবং একজন বালক y দিনে Δ কাজ সম্পন্ন করিতে পারে। তাহা হইলে, একজন পুরুষ ,একদিনে,সম্পূর্ণ কাজের $rac{1}{x}$ অংশ এবং একজন ংঝালুক একদিনে $rac{1}{u}$ অংশ করিতে পারে।

অতএব, দিতীয় সর্ত্ত অমুসারে,
$$\frac{2}{x} + \frac{7}{y} = \frac{1}{4}$$
 ... (1) এবং প্রথম সর্ত্ত অমুসারে, $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{3}$... (2)

এবং প্রথম সর্ত্ত অনুসারে,
$$\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{3}$$
 ... (2)

(1) কে 2 দারা গুণ করিয়া লব্ধ স্মীকরণ হইতে (2) বাদ দিলে,

$$\frac{10}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \; ; \qquad \therefore \quad y = 60.$$

অতএব, (2) হইতে,
$$\frac{4}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$
; $\therefore x = 15$.

স্থতরাং একজন পুরুষ সম্পূর্ণ কাজটি 15 দিনে এবং একজন বালক 60 দিনে শেষ করিতে পারে।

উদা. 4. 192 গ্যালন জলপূর্ণ একটি চৌবাচ্চার তলদেশে, জল নিষ্কাশন করিবার জন্ম তুইটি নল বসান হইল। তুইটি নল একই সময় খুলিয়া দিয়া তিন ঘণ্টা পরে একটিকে বদ্দ করিয়া দেওয়ায় চৌবাচ্চাটি আনও 11 ঘণ্টা পরে শূন্ত হইল ; কিন্তু, ঐ নলটিকে যদি 6 ঘণ্টা পরে বন্ধ করা হইত, তবে আর 6 ঘণ্টা পরে চৌবাচ্চাটি শৃশু হইত। বরাবর সমান বেগে জল পড়িয়া থাকিলে. প্রত্যেকটি নল হইতে কত গ্যালন করিয়া জল পড়িয়াছিল ?

ধর, নল তুইটি ঘণ্টায় যথাক্রমে $x \circ y$ গ্যালন করিয়া জল বাহির করে।

এখন প্রথম ক্ষেত্রে, প্রথম নলটি 3 ঘণ্টা এবং দ্বিতীয় নলটি 3+11 অর্থাৎ 14 ঘণ্টা খোলা ছিল। অতএব, 3x + 14y = 192 ... (1)

আবার, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, প্রথম নলটি 6 ঘণ্টা এবং দ্বিতীয়টি 12 ঘণ্টা খোলা ছিল। অতএব, 6x + 12y = 192. ... (2)

(1) কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ সমীকরণ হইতে (2) বাদ দিলে,

অতএব, (2) হইতে, 6x = 192 - 144 = 48;

স্থুতরাং, নল ছুইটি ঘণ্টায় মথাক্রমে ৪ গ্যালন এবং 12 গ্যালন করিয়া জল বাহির করে।

উদা. 5. আয়তক্ষেত্রাকৃতি একটি প্রাঙ্গণ এরূপ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থবিশিষ্ট যে, উহার দৈৰ্ঘ্য 3 গজ বাড়াইলে এবং প্ৰস্থ 3 গজ কমাইলে, ক্ষেত্ৰফল 18 বৰ্গগজ কমিয়া যাইত ; এবং দৈর্ঘ্য 3 গঙ্গ, বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 গজ বাড়াইলে, ক্ষেত্রফল 60 বর্গগজ বাড়িয়া কিলিঃ এবেশিকা, 1888.]• ষাইত। প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

ধর. প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য x গজ এবং প্রস্থ u গজ।

তাহা হইলে, প্রথম দর্ত্ত অন্মারে,

$$(x+3)(y-3)=xy-18$$
; ... (1)

এবং ফিটার সর্ভ অমুসারে, (x+3)(y+3)=xy+60; ... (2)

(1) হইতে,
$$3y-3x=-9$$
, অথবা, $y-x=-3$, ... (3)
(2) হইতে, $3y+3x=51$, অথবা, $y+x=17$... (4)
(3) ও (4) যোগ করিয়া, $2y=14$; ... $y=7$.

অতএব, (4) হইতে, $\dot{x} = 17 - 7 = 10$.

স্বতরাং, প্রাঙ্গণটির দৈর্ঘ্য 10 গজ এবং প্রস্থ 7 গুজ।

উদা. 6. ছই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সহিত 7 যোগ করিলে যোগফল দ্বশকস্থানীয় অস্কটির তিনগুণ হইবে; কিন্তু সংখ্যাটি হইতে 18 বাদ দিলে উহার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া যাইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। 🦸

ধর, x দশকস্থানীয় এবং y এককস্থানীয় অঙ্ক।

তাহা হইলে, প্রশ্নের সর্ত্ত অনুসারে,

$$x + y + 7 = 3x \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

(1) হৈতে,
$$2x - y = 7$$
; ... (2)

এবং (2) হইতে,
$$9x - 9y = 18$$
, অথবা, $x - y = 2$... (3)

(3) হইতে (4) বাদ দিলে, x=5 ; স্থতরাং (4) হইতে, y=5-2=3. অতএব. নির্ণেয় সংখ্যাটি 53.

উদা. 7. A এবং B এই সর্ত্তে ঘুঁটি খেলিতে আরম্ভ করিল যে, A ্খেলায় যতবার $oldsymbol{\cdot}$ জিতিবে প্রতিবারে B এর নিকট হইতে 2 শিলিং করিয়া পাইবে এবং যতবার হারিবে প্রতিবাহর ullet েকে 3 শিলিং করিয়া দিবে। কয়েকবার খেলার পর দেখা গেল যে, A3 শিলিং জিতিয়\bar{u}ছে, কিন্তু A প্রতিবারে হারিবার জন্ম যদি B কে 5 শিলিং করিয়া দিত এবং মোট ঐ সংখ্যক বার থেলার মধ্যেই আরও একবার বেশী হারিত, তাহা হইলে [•] তাহার মোট 30 শিলিং লোকদান হইত। প্রত্যেকে কয়টি করিয়া বাজী জিতিয়াছিল ?

ধর, x = A যতবার বাজী জিতিয়াছে,

$$y=B$$
 ,, ,, ,, ।
তাহা হইলে, স্পষ্টই বুঝা যায় যে, মোট $x+y$ সংখ্যক বার থেলা হইয়াছিল।

💌 এখন, যেহেতু 🔏 প্রতিবারে জিতিবার জন্ম B এর নিকট হইতে 🙎 শিলিং কবিয়া পায় এবং প্রতিবারে হারিবার জন্ম (অর্থাৎ, B এর প্রতিবারে জয়ের জন্ম) B কে 3 শিলিং করিয়া দেয়, ক্রাহ্মের মোট লাভ অবশ্যই (2x-3y) শিলিং।

অতএব,
$$2x-3y=3$$
 ... (1)

অপর সর্ত্তাত্মসারে, A এর 2(x-1) শি. লাভ এবং 5(y+1) শি. লোকসান হইত ; স্থতরাং তাহার মোট লোকসান [5(y+1)-2(x-1)] শি. হইত ।

্ অতএব,
$$5(y+1)-2(x-1)=30$$
; অথবা, $5y-2x=23$. (2)

(1) এবং (2) যোগ করিয়া, 2y = 26;

y = 13.

অতএব, (1) হইতে, $x = \frac{3+39}{2} = 21$.

অতএব, A, 21টি বাজী এবং B, 13টি বাজী জিতিয়াছিল।

প্রগ্রমালা 66

- ু 1. কোন ভ্যাংশের লবকে \ দিগুণ এবং হরের সহিত 7 যোগ করিলে উহার মান 🖁 হয়, কিন্তু হরকে দিগুণ এবং লবের সহিত 2 যোগ করিলে উহার মান 🖁 হয়; ভ্যাংশটি নির্ণয় কর।
- ু হুইটি সংখ্যার প্রথমটিকে দ্বিতীয়টির পাঁচগুণের সহিত যোগ করিলে যোগফল 52 হয়, কিন্তু দ্বিতীয়টিকে প্রথমটির আটগুণের সহিত যোগ করিলে যোগফল 65 হয়; সংখ্যা তুইটি নির্ণয় কর।
- 3. তুইটি সংখ্যার বৃহত্তরটির পাঁচগুণ, ক্ষুদ্রতরটির চারিগুণ হইতে 22 বেশী, এবং বৃহত্তরটির তিনগুণ ও ক্ষুদ্রতরটির সাতগুলার যোগফল 32; সংখ্যা তুইটি নির্ণয় কর 🖟
 - ্র-্য4. 🕊 সংখ্যার অন্তরফল 45 এবং ভাগফল 4; সংখ্যা তুইটি নির্ণয় কর।
- 5. এরূপ তুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যেন বুহত্তরটির 🚦 অংশের ও ক্ষুদ্রতরটির , 🛊 অংশের যোগুফল 11 হয়, এবং বুহত্তরটির 🌡 অংশ ও ক্ষুদ্রতরটির 🕆 অংশ সমান হয়।
 - ্ 6. কোন একটি ভগ্নাংশের হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে, উহা $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয়, কিন্তু লবের সহিত 7 যোগ করিলে উহা 1 এ পরিণত হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় র্মের 1
 - 7. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ করিলে উহার মান 1 •হয়, কিন্তু হরের সহিত 1 যোগ করিলে উহার মান ½ হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।
 [কলিঃ প্রবেশিকা, 1862.]
- স8. কোন একটি ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ করিলে উহা ½ এ পরিণত হয় এবং হরের সহিত 1 যোগ করিলে ⅓ এ পরিণত হয় ; ভগ্নাংশটি কত ?
 ✓ সে9. A এবং B এর একত্র 39 টাকা আছে, কিন্তু A যদি তাহার টাকার ৡ অংশ
- 🗸 ా. 9. A এবং B এর একত্র 39 টাকা আছে, কিন্তু A যদি তাহার টাকার శ্ব অংশ এবং B তাহার 🏖 অংশ হারাইত, তবে তাহাদের কেবলমাত্র 11 টাকা থাকিত্। ' প্রেণ্ড্যেকের কত টাকা আছে ?
- 10. তুইটি সংখ্যা এরপভাবে আছে বে, ছোটটির সহিত 7 যোগ করিলে যোগফল বড়টির দিগুঁণ হইবে, এবং বড়টির সহিত 4 যোগ করিলে দেল্পেল ছোটটির তিনগুণ হইবে; সংগ্রা তুইটি নির্ণয় করে।

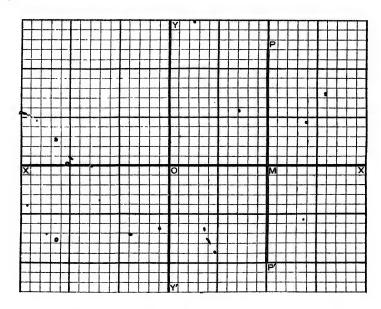
- ্রা. ছই ব্যক্তি, 27 মাইল দূর হইতে, একই সময় যাত্রা করিয়া একই দিকে চলিলে, 9 ঘন্টায় মিলিত হইতে পারে, কিন্তু বিপরীত দিকে চলিলে 3 ঘন্টায়•মিলিতে পারে। ভাহাদের প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।
- 12. একজন পোদার (banker) কে £10 পরিমিত অর্থ, স্ব্রিণ এবং অর্দ্ধ-ক্রাউন এই ছই জাতীয় মুদ্রাতে এক্লপভাবে দিতে বলা হইল, যেন অর্দ্ধ-ক্রাউনের সংখ্যা স্ব্রিণের সংখ্যার ঠিক দ্বিগুণ হয়। সে কি প্রকারে এক্লপ দিবে ?
- ✓ 13. একজন লোক এবং একটি বালক, কোন কাজ 15 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, কিন্তু সেই কাজই সাতজন লোক এবং নয়টি বালক 2 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। একজন লোক কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে?
- 14. একটি আয়তক্ষেত্র, দৈর্ঘ্যে 6 গজ বর্ড় ও প্রস্তে 4 গজ ছোট অপর একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান এবং ইহা দৈর্ঘ্যে ৪ গজ বড় ও প্রস্তে 5 গজ ছোট একটি তৃতীয় ক্ষেত্রফলের সমান। উহার ক্ষেত্রফল কত ?
- 15. 15 পাউগু চা এবং 17 পাউগু কফির মূল্য একত্রে 3 পা. 5 শি. 6 পে. এবং 25 পাউগু চা ও 13 পাউগু কফির মূল্য একত্রে 4 পা. 6 শি. 2 পে. হইলে, প্রত্যেকটির প্রতি পাউগুর মূল্য নির্ণয় কর।
- 16. A এর 30 মাইল হাঁটিতে B এর $^{\circ}$ চেয়ে 3 ঘণ্টা বেশী সময় লাগিল; কিন্তু পদক্ষেপ দিগুণ করিয়া, তাহার B হইতে 2 ঘণ্টা সময় কম লাগিল; তাহাদের প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।
- 17. চার্লস্, উইলিয়ম্কে বলিল, ''তোমার মারবেল হ'তে 10টি আমাকে দিলে, আমার মারবেলের সংখ্যা তোমার দিগুণ হবে''; কিন্তু উইলিয়ম্ চার্লস্কে বলিল, ''তুমি আমাকে 10টি; দিলে, আমার সংখ্যা তোমার তিনগুণ হবে''। প্রত্যেকের কয়টি করিয়া মারবেল ছিল ?
- $m{1}$ $m{A}$, $m{B}$ এবং $m{C}$ এর মধ্যে $m{1}100$ টাকা এরপভাবে ভাগ করা হইয়াছিল যে, $m{A}$ এর, $m{B}$ কে $m{2}00$ টাকা দেওয়ার পর, $m{B}$, $m{A}$ এর দ্বিগুণ এবং $m{C}$ এর তিনগুণ পাইল। পূর্বের, $m{A}$, $m{B}$ এবং $m{C}$ এর প্রত্যেকে কত টাকা করিয়া পাইয়াছিল ?
- ✓ 19. 'হই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যাকে উহার অঙ্ক ছইটিরে সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল 6 হয় এবং ৪° অবশিষ্ট থাকে। অঙ্ক ছইটিকে বিপরীতভাবে স্থাপন করিয়া, উৎপন্ন সংখ্যাটিকে, অঙ্ক ছইটির সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল 4 হয় এবং ৪ অবশিষ্ট থাকে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- ✓ 20. ত্ই অঙ্কবিশিষ্ট এরপ একটি সংখা নির্ণয়৽ কর যাহাকে, উহার অন্তর্গত
 অঙ্ক ত্ইটিকে উল্টাইয়া লিখিলে যাহা হয়, তাহার সহিত যোগ করিলে, . যোগার্টল 121 হয়
 এবং ছোট সংখ্যাটি বড় সংখ্যাটি হইতে বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল 9 হয়
 ।

- 2) ক্রাউন এবং অর্ধ-গিনি দ্বারা 25 গিনির একটি বিল্ (bill) পরিশোধ করা হইল এবং অর্ধ-গিনির সংখ্যার দ্বিগুণ ক্রাউনের সংখ্যার তিনগুণের চেয়ে 17 বেশী; প্রত্যেকটির সংখ্যা নির্ণয় কর।
- ✓ 22. এক ব্যক্তি, কোন একটি ক্রেতার নিকট 9টি ঘোড়া এবং 7টি গরু £300
 মূল্যে বিক্রয় করিল; সে অন্ত এক ব্যক্তির নিকট একই হারে এবং উক্ত মূল্যে 6টি ঘোড়া
 ও 13টি গরু বিক্রয় করিল। ঘোড়া ও গরু প্রত্যেকটির মূল্য কত ?
- $\sqrt{23}$. A এবং B মথাক্রমে 15 দিন ও 14 দিন কাজ করিয়া তাহাদের বেতন বাবদ $\pounds 5$. 17s. পাইল ; এবং B এর তিনদিনের বেতন অপেক্ষা A এর চারিদিনের বেতন 11s. বেশী, তাহাদের প্রত্যেকের দৈনিক বেতন কত ?
- \checkmark 24 \land এবং \land একটি কাজ १ও দিনে সম্পন্ন করিতে পারে; একত্রে \checkmark দিন কাজ করিয়া \land অবসর গ্রহণ করিলে, \land কাজটি \lor 6 দিনে শেষ করিল। প্রত্যেকে পৃথক্ভাবে কতদিনে কাজটি সম্পন্ন করিতে পারে \lor
- 25. কোন ভগ্নাংশের লবের সহিত 2 এবং হরের সহিত 1 যোগ করিলে, ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয়, এবং লব ও হর প্রত্যেকটি হইতে 1 বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ এ পরিণত হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।
- ✓ 27 বি এবং 100 এর মধ্যবর্ত্তা কোন একটি সংখ্যা উহার অঙ্কগুলির ঘোগফলের আটগুণ এবং উহা হইতে 45 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল, সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়কে উল্টাইয়া লিখিয়া উৎপন্ন সংখ্যা হইবে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 28 A এবং B $\cancel{20}$ শিলিং বাজী ধরিল। A হারিয়া গেলে, তাহার B এর তথনকার তহবিলের দ্বিগুণ অপেক্ষা 25 শিলিং কম থাকিবে; কিন্তু B হারিয়া গেলে, তাহার A এর তথনকার তহবিলের $\frac{5}{17}$ অংশ থাকিবে; তাহাদের প্রত্যেকের তহবিলের পরিমাণ নির্ণয় কর।
- 29. এক ব্যক্তি কয়েকটি ভেড়া কিনিবার ইচ্ছা করিয়া দেখিল যে, এক একটি ভেড়ার দাম £2. 2s. হইলে তাহার £2 \betas. কম শড়িবে. কিন্তু এক একটির দাম £2 হইলে প্রয়োজন অপেক্ষা তাহার £2 বেশী থাকিবে। ভেড়ার সংখ্যা এবং এ ব্যক্তির অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।
- 30. হই অঙ্কবিশিষ্ট কোন একটি সংখ্যা উহার অঙ্ক ছুইটির যোগফলের তিনগুণ এবং সংখ্যাটিকে 3 দারা গুণ করিলে, গুণফল উক্ত অঙ্ক ছুইটির যোগফলের বর্গ হইবে। সংখ্যাটি নির্শির কর।

উনবিংশ অথ্যায়

সরল সমীকরণের লৈখিক চিত্রাবলী (Graphs of Simple Equations)

- 121. সংখ্যাসমূহ জ্যামিতিক বিন্দু দারা কি প্রকারে স্থচিত করা হয়, তাহা সপ্তম অধ্যায়ে আলোচিত হইয়াছে। এক্ষণে, সরল সমীকরণগুলিকে কিরূপে লৈখিক চিত্রে প্রকাশ করা যাইতে পারে, তাহাই বিবেচ্য বিষয়। নিয়লিথিত উদাহরণগুলি দ্বারা এই বিষয়ের সম্যক্ ধারণা হইবে।
 - উদা. 1. একটি বিন্দু যদি এক্নপভাবে স্থান পরিবর্ত্তন করে যে, সকল অবস্থানেই উহার ভূজ (abscissa) 5 একক দীর্ঘ, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চার-পথ (locus) কি হইবে, তাহা নির্ণয় কর।



মনে কর, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহর দিগুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরা⁸হইল।

OX (অর্থাৎ x-অক্ষরেখা) এর উপর একটি বিন্দু M এরূপে লও, যেন OM=5 একক দীর্ঘ। M বিন্দু দিয়া YOY' এর সমান্তর করিয়া PMP' রেখাটি টান।

এখন, স্পষ্টই দেখা যায় যে, PMP' রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভূজ 5 একক দীর্ঘ হইবে ; এবং এতদ্বাতীত অন্ত কোন বিন্দুরই ভূজ 5 একক দীর্ঘ হইবে না।

কাজেই, সচল বিন্দুটি সকল সময়েই PMP' রেখার উপরে থাকিবে।

অতএব দেখা যায় যে, একটি বিন্দু যদি এরপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভূজ সকল সময়েই 5 একক দীর্দ্ধ, তাহা হইলে উহার সঞ্চার-পথ PMP' রেথাটি দারা স্থাচিত হয়। ইহাকেই সংক্ষেপে বলা হয় যে, PMP' সরলরেখা x=5 এই সমীকরণটির লেখ বা লৈখিক চিত্র (graph).

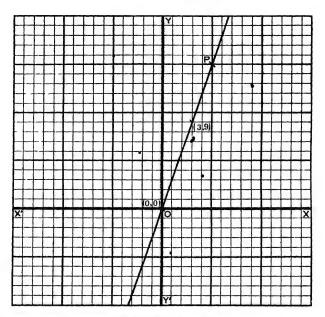
- **টীকা 1.** ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, y=5 সমীকরণটির লৈথিক চিত্র, XOX' এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা।
- 2. দাধারণভাবে বলা যাইতে পারে যে, x=a সমীকরণটির লৈখিক চিত্র (graph) y-অক্ষরেখার (y-axis এর) সমান্তরাল একটি রেখা, এবং এই রেখাটি x-অক্ষরেখার উপরিস্থিত এরূপ একটি বিন্দু দিয়া যায়, যাহা মূলবিন্দু (origin) হইতে a-একক দূরে অবস্থিত; তদ্ধপ, y=b সমীকরণটির লৈখিক চিত্র x-অক্ষরেখার (x-axis এর) সমান্তরাল একটি রেখা, এবং উহা y-অক্ষরেখাস্থিত এরূপ একটি বিন্দু দিয়া যায়, যাহা মূলবিন্দু হইতে b-একক দূরে অবস্থিত।
- 3.° স্পষ্টতঃই, x=0 এর লৈখিক চিত্র y-অক্ষরেখা ; এবং y=0 এর লৈখিক চিত্র x-অক্ষরেখা ।
- উদ্ধা. 2. একটি বিন্দু যদি এরপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভূঁজ (অর্থাৎ x) এবং কোটি (অর্থাৎ y) সর্বনদা y=3x সমীকরণটি দ্বারা পরস্পর-সম্বন্ধ, তাহা হইলে ঐ বিন্দুটির সঞ্চার-পথ কি, তাহা নির্ণয় কর ।

বৈহেতৃ,
$$x=0$$
 হইলে, $y=0$. $x=3$ হইলে, $y=9$.

ু অতএব, সচল বিন্দুর হুইটি অবস্থান (0, 0) এবং (3, 9) দ্বারা স্থচিত হইতেছে।

ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া (0, 0) এবং (3, 9) বিন্দু তুইটি সংস্থাপন কর। এই বিন্দুদ্বের সংযৌজক অসীম সরলরেবীটিই নির্নেয় সঞ্চার-পথ হইবে।

ধর, এই অসীম সরলরেথাটির উপর P যে কোন একটি বিন্দু। চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, P এর ভুজ-কোটি (co-ordinates) যথাক্রমে 5 ,এবং 15; এবং



এই সংখ্যা তুইটি দ্বারা প্রদন্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। এইরূপে দেখা যাইতে পারে যে, উক্ত বেখার উপরিস্থিত অন্তান্ত সকল বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। কিন্তু ঐ রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়না।

কাজেই, সচল বিন্দৃটি সকল সময়েই OP সরলরেখার উপর থাকিবে এবং কোন সময়েই উহার বাহিরে যাইরে না।

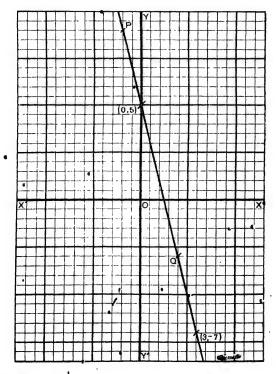
অতএব, ইহা প্রতিপন্ন হইল যে, কোন সচল বিন্দুর ভূজ-কোটি (অর্থাৎ x এবং y) \cdot সুকল সময়েই যদি y=3x সমীকরণ দ্বারা প্রস্পব-সম্বদ্ধ হয়, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চীর-পথ OP রেথা দ্বারা স্থচিত হইবে। অর্থাৎ, OP সরলরেখাই y=3x সমীকরণটির লৈখিক চিত্র।

টীকা। সাধারণভাবে বলিলে, m যে কোন সংখ্যাই হউক না ক্নে, y=mx এর লৈখিক চিত্র, মূলবিন্দুগামী এক সরলরেখাঁ হইবে।

উদা. 3. একটি বিন্দু যদি এরপভাবে চলিতে থাকে যে, উহার ভুক্ত-কোটি (অর্থাৎ x এবং y) সর্বাদা y=-4x+5 সমীকরণটি দ্বারা পরস্পর-সম্বদ্ধ, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চার-পথ কি, তাহা নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে দেখা যায় যে,

অতএব, সচল বিন্দুটির তুই অবস্থান (0, 5) এবং (3, – 7) দ্বারা স্থাচিত হইতেছে। এখন, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দ্বিগুণকে একক ধরিয়া (0, 5) এবং '(3, – 7) বিন্দুদ্বয় সংস্থাপন কর। উহাদের সংশোজক অসীম সরলরেখাটিই নির্ণেয় সঞ্চার-পথ।



ধব, এই জ্বাদীম রেখার উপর P যে কোন একটি বিন্দু। চিত্র হইতে দেখা যায়

যে, P এর ভূজ-কোটি যথাক্রমে - 1 ও 9; এবং এই সংখ্যা হুইটি দারা প্রদত্ত স্মীকরণটি সিদ্ধ হয়। রেথার উপর আর একটি বিন্দু, Q, লইলেও দেখা যায় যে, উহার ভুজ-কোটি '2 এবং - 3'ও সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। তজ্ঞপ, দেখা যাইবে যে, রেখার উপরিস্থিত সকল বিন্দুর ভূজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। কিন্তু রেথার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভূজ-কোটি দ্বারাই প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে না। কাজেই. সচল বিন্দুটি সর্বাদা PQ রেখার উপরে থাকিবে এবং কোন সময়েই উহার বাহিরে যাইবে না।

স্থতবাং, কোন সচল বিন্দুর ভূজ-কোটি যদি y=-4x+5 দ্বারা সম্বন্ধ হয়, তাহা হইলে উহার সঞ্চার-পথ, PQ, এই অসীম সরলুরেখা দ্বারা স্থচিত হইবে। অর্থাৎ, PQসরলরেখাটিই y=-4x+5 সমীকরণটির লৈখিক চিত্র।

- 1. সাধারণভাবে বলিলে, m ও c যে কোন সংখ্যাই হউক না কেন. y = mx + c এর লৈখিক চিত্র, (0, c) বিন্দুগামী এক সরলরেখা হইবে।
- **টাকা 2.** যেহেতু, তুই অক্ষর (ধর, $x \otimes y$)-বিশিপ্ত প্রত্যেক সরল সমীকরণকেই y=mx+c এর আকারে প্রকাশ করা যায়, অতএব, **সকল সরল সমীকরণের** লৈখিক চিত্রই সরলরেখা হইবে।
- টীকা 3. কোন নির্দিষ্ট সমীকরণের লৈখিক চিত্রকে সচল বিন্দুর সঞ্চার-পথ বলিয়া অভিহিত করা যায়, যদি উক্ত সচল বিন্দুর যে কোন অবস্থানের ভুজ্ল-কোটির মানদ্বর নিনিষ্ট সুমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

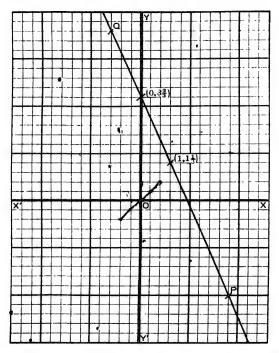
উদা. 4.
$$7x+3y=11$$
 সমীকরণটির লৈথিক চিত্র অঙ্কন কর।
এক্ষেত্রে, $x=0$ হইলে, $x=1$ হইলে, $y=3\frac{2}{3}$. $y=1\frac{1}{3}$.

অতএব, স্পষ্টই $(0,3\frac{2}{3})$ এবং $(1,1\frac{1}{3})$ বিন্দুন্ধ্য নির্ণেয় চিত্রের উপর অবস্থিত।

এখন, ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাছর তিনগুণকে একক ধরিয়া (0, 3%) ও (1, 1%) •বিন্দু ছইটি সংস্থাপন কর; উহাদের সংযোজক অসীম সরলরেথাটিই নির্ণেয় লেথ হইবে। প্রাক্তির তিপর য়ে কোন একটি বিন্দু, P, লইয়া, দেখা যায় যে,

·উহার ভূজ-কোটি (অর্থাৎ 3 এবং - 31) প্রাদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। ঐ রেথার

উপর অন্ত একটি বিন্দু, Q, লইলেও দেখা যায় যে, উহার ভূজ-কোটি, -1 এবং 6, সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, এই অসীম সরলরেখা



PQ এর উপরিস্থিত সকল বিন্দুর ভূজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে; কিন্তু উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভূজ-কোটিই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না ত্রতএব, PQ দারা স্থচিত অসীম সরলরেথাটিই নির্ণেয় লৈথিক চিত্র।

টীকা 1. 7x + 3y = 11 এর লৈখিক চিত্রকে, $\frac{11-7x}{3}$ এই বীজগণিতীয় রাশির লৈখিক চিত্রও বলা হয়।

° **ঢাকা 2.** PQ সরলরেখাটি 7x+3y=11 সমীকরণের লৈখিক চিত্র হওয়ার, উক্ত সমীকরণ্টিকে 'PQ সরলরেখার সমীকরণ' (equation to the str. line PQ) বলে।

होक् / है. क्लान निर्फिष्ट मज़लादाथांत मभीकर्त्रण निर्णय कतिए रहेल, धक्रम

একটি সমীকরণ নির্ণয় করিতে হয়, যাহা উক্ত রেথার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভূজ-কোটির মান দারাই সিদ্ধ হয়।

উদা. 5. (1, 1) এবং (3, $-rac{1}{2}$) বিন্দু তুইটি দিয়া অঙ্কিত সরলরেপার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, y = mx + c নির্দের সমীকরণ।

থেহেতু, $(1,\,1)$ এবং $(3,\,-rac{1}{2})$ এর প্রত্যেক মানযুগুল দারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে. অতএব,

$$1=m+c$$
 বুডারাং, $2m=-rac{3}{2}$; কাজেই, $m=-rac{3}{4}$; এবং $-rac{1}{2}=3m+c$

অতএব, নির্ণেয় স্মীকরণ $y=-rac{3}{4}x+rac{7}{4}$,

অথবা, 3x + 4y = 7.

প্রথমালা 67

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর:

(1)
$$x = 8$$
.

(2)
$$x = 13$$
.

(3)
$$x+11=0$$
.

(4)
$$y = -7$$
.

$$(5) \quad y - 9 = 0$$

(4)
$$y = -7$$
. (5) $y - 9 = 0$. (6) $y + 10 = 0$.

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির দৈখিক চিত্র অ্ক্ষন কর:

$$(1) \quad y = x.$$

$$(2) \quad y = -x.$$

(3)
$$y = 2x$$

(1)
$$y = x$$
. (2) $y = -x$. (3) $y = 2x$. (4) $y + 2x = 0$. (5) $y = -3x$. (6) $3y = 5x$.

$$(5) \quad y = -3x.$$

$$(6) \quad 3y = 5x.$$

$$7y + 8x = 0.$$

(8)
$$6y + 13x = 0$$
.

3. নিম্নলিখিত স্মীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন করঃ

(1)
$$y = 3x + 4$$
.

2)
$$y = 7x - 8$$
.

$$(3) \cdot y = -5x + 9.$$

(1)
$$y = 3x + 4$$
.
(2) $y = 7x - 8$.
(3) $y = -5x + 9$.
(4) $y = -8x - 11$.
(5) $3y = 7x + 4$.
(6) $-6y = 7x - 1$

$$3y = 7x + 4$$

(6)
$$-6y = 7x - 1$$

রিয়লিথিত সমীকরণগুলির লৈথিক চিত্র অঙ্কন কর:

(1)
$$2x + 7y = 10$$
.

$$(2) \quad 4x - 5y - 7 = 0.$$

(3)
$$5x + 6y + 8 = 0$$
.

$$(4) -3x + 7y + 8 = 0.$$

$$(5) \quad 10y - 9x = 13.$$

(6)
$$8x - 11y + 13 = 0$$

5. নিম্পলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর: (1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$. (2) $\frac{x}{7} + \frac{y}{-9} = 1$. (3) $\frac{x}{-8} + \frac{y}{13} = 1$.

$$(1)^{\frac{1}{3}} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$$

(2)
$$\frac{x}{7} + \frac{y}{-9} = 1$$
.

(3)
$$\frac{x}{-8} + \frac{y}{13} = 1$$

(4)
$$y = \frac{5-7x}{6}$$
. (5) $y = \frac{9x-13}{4}$. (6) $\frac{3x}{4} - \frac{4y}{3} = 1$.

$$(5) \ ^{\checkmark} y = \frac{9x - 1}{4}$$

(6)
$$\frac{3x}{4} - \frac{4y}{3} = 1$$
.

6. নিম্মলিখিত রাশিসমূহের লৈখিক চিত্র অঙ্কন কর:

(1)
$$x-3$$
.

(2)
$$3x + 4$$

(1)
$$x-3$$
. (2) $3x+4$. (3) $-7x+8$.

(4)
$$7 - 4x$$

(5)
$$\frac{5x-9}{4}$$

(4)
$$7 - 4x$$
. (5) $5x - 9$. (6) $8x + 11$.

7. নিম্নলিখিত বিন্দুদয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর:

$$(1)$$
 $(0, 0), (5, 6).$

$$(3)$$
 $(6, -8), (-7, 5).$

$$(4)$$
 $(-4, 8), (-9, -13).$

(5)
$$(-11, 0), (7, -10).$$

বিংশ অথ্যায়

সহজ দি-শক্তি সমীকরণ ও তদিষয়ক প্রশাবলী (Easy Quadratic Equations and Problems)

122. সংজ্ঞাঃ যে সমীকরণে অজ্ঞাতরাশির বর্গ বা দিতীয় শক্তিবিশিষ্ট পদ থাকে, এবং তদুর্দ্ধ শক্তিবিশিষ্ট কোন পদ থাকে না, তাহাকে দ্বি-শক্তি সমীকরণ (quadratic equation) বা দিতীয়মানের সমীকরণ (equation of the second degree) বলে।

যদি কোন দ্বি-শক্তি সমীকরণে, অজ্ঞাতরাশির কেবলমাত্র বর্গবিশিষ্ট পদটিই বর্জ্তমান থাকে (অজ্ঞাতরাশির প্রথম শক্তিবিশিষ্ট পদটি না থাকে), তাহাকে বিশুদ্ধ বা ভাষিপ্রাপ্তি সমীকরণ (pure quadratic), এবং বাহাতে প্রথম শক্তিবিশিষ্ট পদটিও বর্ত্তমান থাকে, তাহাকে মিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরণ (adfected quadratic) বলে। যথা.

$$3x^2 = 75$$
 একটি বিশুদ্ধ দ্বি-শক্তি সমীকরণ ;
এবং $3x^2 - 7x = 6$ একটি মিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরণ ।

123. বিশুক্ষ দ্বি-শক্তি সমীকর্পের সমাধান ঃ বিশুদ্ধ দি-শক্তি দীকরণের সমাধান করিতে হইলে, সরল সমীকরণ সমাধানের প্রণালী অনুসারে, জজ্ঞাতরাশির বর্গের মান (value of the unknown quantity) নির্ণয় করিয়া, এই নির্ণীত মানের বর্গঞ্জ বাহির করিতে হয়।

উদা. 1. সমাধান কর ঃ
$$5(x^2+1)-2=3(x^2+7)$$
.

এস্থনে, $5x^2+5-2=3x^2+21$;
অথবা, $5x^2+3=3x^2+21$; [পক্ষান্তর করিয়া]
অথবা, $2x^2+3=18$;
 $x^2=9$.

এখন, যেহেতু অজ্ঞাতরাশিটির বর্গ 9 এর সমান, স্থতরাং উহা হয় +3 নতুবা -3 হইবে; (এক্ষেত্রে, ৫ এর উভয় মানই প্রদন্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে; ছাত্রগণ ইহা পরীক্ষা করিয়া দেখিতে পারে 1.)

টীকা। উপবোক্ত উদাহবণে লক্ষ্য কবিবে যে, সর্ব্বশেষ প্রক্রিযাটি নিম্নলিখিত প্রশ্ন সমাধানের সমান ; "কোন্ সংগ্যাব বর্গ লইলে 9 পাওয়া যায ?"

উদা. 2. সমাধান কব ঃ $\frac{1}{3}(x-2)(x-3) - \frac{1}{21}(x-21)(x-14) = 2$ উভয পক্ষকে 21 দ্বাবা গুণ কৰিয়া,

$$7(x-2)(x-3) - (x-21)(x-14) = 42$$

ৰ বাম পক্ষ =
$$(7x^2 - 35x + 42) - (x^2 - 35x + 294)$$

= $7x^2 - 35x + 42 - x^2 + 35x - 294$
= $6x^2 - 252$

অতএব, নিম্নলিথিত সমীকবণাঁচ পাওযা গেল ,

$$6x^2 - 252 = 42$$

$$9931, \qquad 6x^2 = 252 + 42 - 294,$$

উভয পক্ষকে 6 দ্বাবা ভাগ কবিয়া, $x^2 = 49$

এখন, যেহেতু, অজ্ঞাতবাশিটি এইরূপ যে, উহাব বগ 49 এব সমান, স্মৃতবাং উহা হয় +7, নতুবা -7 হইবে।

অতএব,
$$x = +7$$
 অথবা -7

উদা. 3. 9 গজ দীর্ঘ ও 4 গজ প্রশস্ত একটি আযতক্ষেত্রেব সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট • একটি বর্গক্ষেত্রেব বাহুব দৈর্ঘ্য নির্ণয কব।

ধব, বৰ্গক্ষেত্ৰেব এক বাহুব দৈঘ্য = x গজ। তাহা হইলে, বৰ্গক্ষেত্ৰেব ক্ষেত্ৰফল $= x \times x$ বৰ্গগজ $= x^2$ বৰ্গগজ। আবাব, আযতক্ষেত্ৰেব ক্ষেত্ৰফল $= 4 \times 9$ বৰ্গগজ= 36 বৰ্গগজ।

কাজেই, প্রদত্ত সর্ত্তামুসাবে, x^2 বর্গগজ = 36 বর্গগজ।

অথবা,
$$x^2 = 36$$
; $x = 6$, অথবা -6

বেহেতু, প্রকৃত কোন বর্গক্ষেত্রেব বাছব দৈখ্য ধনবাশি না হইয়া পাবে না, অতএব এস্থলে, – 6 মানটি গ্রহণযোগ্য নহে। ব

স্থতবাং, নির্ণেয দৈর্ঘ্য = 6 গজ।

টীকা। দ্বি-শক্তি সমীকবণ বিষ্ঠ্যক প্রশ্লাবলীতে, সমীকবণেব যে বীজটি (100t) প্রাম্থেদন্ত পর্ত্তামুসাবে গ্রহণযোগ্য নহে, সেইটিকে পবিত্যাগ কবিতে হয়।

প্রশ্নালা 68

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে x এর মান নির্ণয় কর:

1.
$$3x^2 = 27$$
.

2.
$$a^2x^2 = a^4$$
. 3. $\frac{1}{7}x^2 = 28$.

3.
$$\frac{1}{7}x^2 = 28$$

4.
$$8x + \frac{7}{x} = \frac{65}{7}x$$
.

4.
$$8x + \frac{7}{x} = \frac{65}{7}x$$
. **5.** $2(x^2 - 5) + x(3 - x) = 3(x + 5)$.

6.
$$(x-7)(x-10)+(x-3)(x-2)=(x-17)(x-5)$$
.

7.
$$\frac{2x^2+10}{15}=7-\frac{50+x^2}{25}$$
. 8. $(x+a)^2-2a(a+x)=3a^2$.

8.
$$(x+a)^2 - 2a(a+x) = 3a^2$$
.

9.
$$x^2 + 2bx - b^2 = a^2 - b(b - 2x)$$
. 10. $2x(3x + 5) - 5x(x + 2) = 36$.

11.
$$\frac{3x^2+15}{7} + \frac{2x^2+9}{3} = \frac{2x^2+87}{21} + 2$$
.

- 12. কোন সংখ্যার চারিগুণ উহার অক্যোক্তকের যোগফলের সমান; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 13. কোন একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণ, 9 গজ দীর্ঘ এবং 3 গজ প্রস্থ-বিশিষ্ট একটি আয়তের ক্ষেত্রফলের চারিগুণের সমান: বর্গক্ষেত্রটির একটি বাছর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
- $oldsymbol{14.} \quad A$ এর একখণ্ড বর্গাক্বতি জমি আছে; সে উহা $oldsymbol{\mathit{B}}$ এর 91 বর্গগজ শৈক্রফলবিশিষ্ট একখানি আয়তক্ষেত্রাকৃতি বাগানের সহিত বদল করিয়া 10 বর্গগজ ; পরিমৃত জমি লাভ করিল ; বর্গাক্কতি জমির এক পার্শ্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
- 15. 10 ফুট দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখাকে এরূপ ছই ভাগে ভাগ কর, যেন প্রথমাংশের বর্গের পাঁচগুণের এবং দিতীয়াংশের বর্গের অস্তরফল প্রথমাংশের বিশগুণের , সমান হয়।
 - 124. উৎপাদক-বিশ্লেষণ সাহায্যে মিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরতোর সমাধামঃ মিশ্র দ্বি-শক্তি সমীকরণকে সরলীকরণ এবং পক্ষান্তরকরণ প্রাক্রিয়া দ্বারা $ax^2+bx^2+c=0$ ্এর আকারে লিথিয়া, যদি এতল্লব্ধ বীমপক্ষের উৎপাদক নির্ণয় করা যায়, তাহা হইলে উৎপাদক সাহায্যে সমীকরণের বীজ নিৰ্ণীত হইয়া থাকে। যথা

উলা. 1. সমাধান কর: $x^2 - 5x + 5 = 0$.

ম্পষ্টিই, বাম পক্ষ = (x-2)(x-3). অতএব, (x-2)(x-3)=0. বী--১৬

ে
$$x-2=0$$
 স্বাধাৎ, $x=3$ স্বাধাৎ, $x=3$.

অতএব, 2 এবং 3 ই প্রদন্ত সমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

উদা. 2. সমাধান কর: $2x^2 - 10x = 3x - 15$. পক্ষান্তর করিয়া, $2x^2 - 10x - 3x + 15 = 0$;

ম্পষ্টিই, বামপক্ষ = 2x(x-5) - 3(x-5) = (2x-3)(x-5).

ে
$$(2x-3)(x-5)=0$$
.
অভএব, $2x-3=0$
অথবা, $x-5=0$
অথবাৎ, $x=\frac{3}{2}$:

े. ৡ এবং 5 ই নির্ণেয় বীজ।

টীকা। উপরোক্ত সমীকরণটিতে, অর্থাৎ $2x^2-10x=3x-15$ অথবা 2x(x-5)=3(x-5) তে দেখা যায় যে, x-5 উৎপাদকটি উভয়পক্ষেই বর্ত্তমান। কাজেই, x-5=0 অর্থাৎ x=5 ধরিলে, সমীকরণের উভয়পক্ষের মানই সমান হইবে, অর্থাৎ সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। আবার, যদি x-5 এর মান শৃস্ত (0) না হয়, তাহা হইলে উভয়পক্ষকে x-5 দারা ভাগ করিলে, 2x=3 অর্থাৎ $x=\frac{9}{2}$ পাওয়া যায়। কাজেই, x=5 অথবা $\frac{9}{2}$ ইলে, সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। স্কতরাং, 5 অথবা $\frac{9}{2}$ ই নির্ণের বীজ।

ইহা হইতে দেখা যায় যে, সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে, উহার অন্তর্গত সকল পদকে একই দিকে পক্ষান্তর করার বিশেষ কোন আবশুকতা নাই।

উদা. 3. সমাধান কর:
$$10(2x+3)(x-3)+(7x+3)^2=20(x+3)(x-1)$$
. এখন, $10(2x^2-3x-9)+(49x^2+42x+9)=20(x^2+2x-3)$;

 \therefore পক্ষান্তর ও সরলীকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা $49x^2 - 28x - 21 = 0$ পাওয়া গেল ;

$$7x^2 - 4x - 3 = 0$$
;
অথবা, $(7x^2 - 7x) + (3x - 3) = 0$,
অর্থাৎ, $(7x + 3)(x - 1) = 0$.

অতএব,
$$7x+3=0$$
 মথবা, $x-1=0$ মথবা, $x=-\frac{3}{7}$

बाँउ এবং 1 हे প্রদত্ত সমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

উদা. 4. এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহা উহার অক্যোক্সকের 65 গুণ অপেক্ষা 64 বেশী।

ধর, নির্ণেয় সংখ্যা =
$$x$$
.

তাহা হইলে, প্রদত্ত সর্তামুযায়ী $x - \frac{65}{2} = 64$.

এখন, উভয় পক্ষকেই x দারা গুণ করিয়া, $x^2 - 65 = 64x$,

অথবা,
$$x^2-64x-65=0$$
, • [পক্ষাস্তর করিয়া] অথবা, $(x-65)(x+1)=0$, [উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া]

ত্ত অথবা,
$$x-65=0$$
 অথবা, $x+1=0$ অথবা, $x=65$ অথবা, $x=-1$ অথবা, $x=-1$ অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা 65 , অথবা, $x=-1$

প্রশ্নমালা 69

নিয়লিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$3x^2 - 12x + 1 = 6x - 23$$
.

$$2. \quad 4x^2 - 4x = 80.$$

3.
$$x+2-\frac{6}{x+2}=1$$
.

4.
$$x^2 + 9x - 52 = 0$$
.

5.
$$x^2 - \frac{5}{3}x - 4 = 0$$
.

6.
$$6x^2 + 5x - 4 = 0$$
.

5.
$$x^2 - \frac{5}{3}x - 4 = 0$$
.
6. $6x^2 + 5x - 4 = 0$
7. $3(x-2)^2 = 18 + (8x+1)$.
8. $x - \frac{x^3 - 8}{x^2 + 5} = 2$.

8.
$$x - \frac{x^3 - 8}{x^2 + 5} = 2$$

9.
$$\frac{21x^3 - 16}{3x^2 - 4} - 7x = 5.$$

10.
$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$
.

- 11. এইরূপ তুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের গুণফল 399 এবং যোগফল 40.
- 12. এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার বর্গ,সংখ্যাটির দশগুণ হইতে 96 বেশী।
- 13. কোন সংখ্যা 12 হইতে যত বেশী, সংখ্যাটির অন্তোক্তকের উনচল্লিশগুণ 4 হুইতে ঠিক তত কম; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 14. পিতা ও পুজের বর্ত্তমান বয়সের সমস্তর 25. দশ বৎসর পূর্বের উহাদের त्यमितिक्ष्णिक मःथाप्रदात खनक्त 150 हहेल, वाळिन्दातत वर्छमान वयम निर्नय कत्र ।
- 15. 100 বর্গগজ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট কোন স্মায়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্তু অপেক্ষা 15 গজ বেশী। ফুট প্রতি আট আনা দরের তারের জাঁল দিয়া ঐ ক্ষেত্রটি দেরাও করিতে . কত খরচ পড়িবে ?

বিবিধ প্রশ্নমালা IV

1

- 1. তুই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.) এবং লফিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.) এর সংজ্ঞা লিখ। $36x^2a^4c^5$, $24xy^2a^3b^4$ এবং $240y^3a^6b^2c$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ম্ম কর।
 - 2. নিম্নলিখিত রাশিসমূহকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^2 6x + 9$ এবং $4x^2 11x 3$.
- 3. $ab-ac-b^2+bc$ এবং $b^2-12ac-4a^2-9c^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
- 4. $x^3+y^3+3xy-1$ কে সরল উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং দেখাও যে ইহার এবং $2(x^2+xy-x)+3y(x+y)-(7+3y)+7x+7y$ এর গ. সা. শু. x+y-1.
 - 5. 2s = a + b + c হইবো, দেখাও যে, $\frac{2bc + (b^2 + c^2 a^2)}{2bc (b^2 + c^2 a^2)} = \frac{s(s a)}{(s b)(s c)}$
 - 6. সরল কর: $\frac{x^6}{x^2-1} \frac{x^4}{x^2+1} \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$.
 - \checkmark 7. সমাধান কর: ax + 1 = by + 1 = ay + bx.
- ৪. কোন চৌবাচ্চার সহিত হুইটি নল সংলগ্ন আছে; উহাদের একটি দারা a ঘণ্টায়, এবং অপরটি দারা b ঘণ্টায় চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করা যাইতে পারে। হুইটি নল একত্রযোগে চৌবাচ্চাটিকে কত ঘণ্টায় পূর্ণ করিবে? যদি চৌবাচ্চার সহিত্ত আরও একটি নল সংলগ্ন থাকিত এবং এই তৃতীয় নলটি দারা পূর্ণ চৌবাচ্চাকে c ঘণ্টায় শৃত্ত করিতে পারা যাইত, তাহা হইলে তিনটি নলই এক সঙ্গে খুলিয়া রাখিলে, কত ঘণ্টায় পূর্ণ চৌবাচ্চাটিকে শৃত্ত করা যাইবে?

II

- 1. $7x^{\frac{1}{2}}-26x+15$ এবং 5x(x-1)+3(3x-11)-24 এর ল. সা. শু. নির্ণয় কর।
 - $2. \quad x^3 + bx^2 + ax + ab$ এবং $x^2 (a b)x ab$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর b
 - 3. নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে সরল কর:

(i)
$$\frac{(3x^4y^2 - 3x^2y^4)^2}{(2x^3y - 2xy^3)^2}$$
; (ii) $\frac{3(x^2 - x - 30)(x^2 - 9x + 14)}{(x^2 - 13x + 42)(x^2 + 3x - 10)}$.

4.
$$x=a^2+b^2$$
 এবং $y=a^2-b^2$ হইলে, $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}$ এর মান নির্ণয় কর।

5. স্বল ক্র:
$$\frac{(2x-9)^2-(x-6)^2}{3(x^2-10x+25)} + \frac{2(x-3)^2}{3(x^2-8x+15)}$$

6. দেখাও যে,

$$rac{x^4}{3} - rac{11}{12} x^3 + rac{41}{8} x^2 - rac{23}{4} x + 6$$
 এর একটি উৎপাদক $rac{2x^2}{3} - rac{5x}{6} + 1$ হইবে।

7.
$$\frac{5}{7}(2x-11)-\frac{3}{4}(x-5)=\frac{x}{3}-(10-x)$$
 হইলে, x এর মান নির্ণয় কর। .

$$\sqrt{8}$$
. সমাধান কর: $ax + by = c^2$ এবং $\frac{a+x}{b} - \frac{b+y}{a} = 0$.

Ш

- 1. $a^2x^3 + a^5 2abx^3 + b^2x^3 + a^3b^2 2a^4b$ এবং $2a^2x^4 5a^4x^2 + 3a^6 2b^2x^4 + 5a^2b^2x^2 3a^4b^2$ এর গ. সা. গু. নির্গয় কর।
- 2. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ 'এবং $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
 - 3. x^2-9 , $(x+3)^2$ এবং x^2+x-6 এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1910.] •

্রু হুইটি বীজগণিতীয় রাশিমালার ল. সা. গ্রু. নির্ণয় করিবার নিয়ম বর্ণনা কর এবং যথাযথক্রপে উহা প্রতিপন্ন কর।

 $x^2 + (a + b)x + ab$, $x^2 - b^2$ এবং $x^2 + (a - b)x - ab$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5. , স্রল কর:
$$\cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{x+3}{x^2+x-6} - \frac{x-5}{x^2-3x-10} \right) - \frac{1}{x^2+4} \cdot$$

6. সমাধান কর: $ax + y = x + by - \frac{1}{2}(x + y) + 1$.

• ১ বি. কোন মূলধনের এক অংশ শতকরা 4 শাউণ্ড্ হিসাবে ও বাকী অংশ শতকরা 7 পাউণ্ড্ হিসাবে স্থান থাটাইলে মোট 196 পাউণ্ড্ স্থদ আদায় হয়; কিন্তু স্থানের যথাক্রমে 5 পাউণ্ড্ ও 6 পাউণ্ড্ ইইলে, মোট 212 পাউণ্ড্ স্থদ আদায় হইত্। মূলধনের অংশদ্বয়ের পরিমাণ নির্ণয় কর।

8.
$$3(x^2-4)=15$$
 হইলে, x এর মান নির্ণয় কর।

IV

1. হই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশির গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. এর সংজ্ঞা লিখ।

A এবং B, এই তুইটি বীজগণিতীয় রাশির, H এবং L যথাক্রমে গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. হইলে, দেখাও যে, $H \times L = A \times B$.

- 2. x^2-y^2 , $x^2-2xy+y^2$ এবং x^3-y^3 এর গ. সা. শু. নির্ণয় কর; এবং দেখাও যে, উহাদের ল. সা. শু. কে x^2+xy+y^2 দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফল $(x-y)(x^2-y^2)$ হইবে।
 - ॰ 3. $\frac{x+5}{x^2+3x-10}$ হইতে $\frac{x+6}{x^2+5x-6}$ এর ন্যুনতা নির্ণয় কর।
 - 4. সরল কর: $\frac{1}{m^2+m+1} + \frac{2m}{m^4+m^2+1}$.
 - 5. দেখাও যে, $(x+y)^3 (y+z)^3 = 3(x-z)\{(x+y)(y+z) + \frac{1}{3}(x-z)^2\}$.
- তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার এককস্থানে 5 আছে, এবং দশকস্থানের অঙ্কটি অন্ত হুইটির সমষ্টির অর্জ। আবায়, সংখ্যাটির সহিত 10৪ যোগ করিলে এই যোগলন্ধ সংখ্যার এককস্থানীয় অঙ্কটি পূর্ব্বপ্রদন্ত সংখ্যার শতকস্থানীয় অঙ্কের, এবং দশকস্থানীয় অঙ্কটি পূর্ব্বপ্রদন্ত সংখ্যার এককস্থানীয় অঙ্কের সমান হয়। প্রদন্ত সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 8. সমাধান কর : $5(x^2 3x + 11) + 3(x^2 + 2x + 4) = 3(3x^2 3x + 1)$.
 - 1. $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2$ এবং , $x^4-(a+b)^2x^2+2ab(a+b)x^2b^2$ এর গ. সা. শু. নির্ণয় কর।
 - ' 2. $35x^2 11x 6$ এবং $40x^2 29x + 3$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
 - 3. সুরল আকারে পরিবর্ত্তন কর ঃ

$$\left\{ \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{x^2 - y^2} + \frac{2y}{x-y} \right\} \times \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \left\{ \frac{3}{x-y} - \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right\}.$$

4. স্বল ক্র:
$$\frac{a^2 + bc + ca + ab}{a^2 + 2bc + 2ca + ab} \times \frac{a^3 + 8c^3}{a^4 + a^2c^2 + 6ac^3 + 4c^4}$$

5. (74) 49 (4),
$$\frac{x+2}{1+x+x^2} - \frac{x-2}{1-x+x^2} - \frac{2x^2-4}{1-x^2+x^4} = \frac{4x^4+8}{x^8+x^4+1}$$

- 6. A এবং B রেলগাড়ীতে 120 মাইল ভ্রমণ করিল। A দেড়গুণ ভাড়া দিয়া একথানি রিটার্গ টিকিট ক্রয় করিল। ফিরিয়া আসিয়া তাহারা দেখিল যে, A, B অপেক্ষা প্রতি 100 মাইলে 4 আ. 2 পাই কম ভাড়াতে ভ্রমণ করিয়াছে। দেখাও যে, মাইল প্রতি ভাড়া 2 পাই।
- x=5 হইলে, ax+b, এই রাশিটির মান 13 এবং x=13 হইলে, উক্ত রাশিটির মান 29 হয়। x=5 হইলে, দেখাও যে, এ রাশিটির মান 4 হইবে।
 - 8. একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ হইতে 4 এর ন্যুনতা 28; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

VI

- 1. $3x^3 18x^2 + 33x 18$, $x^2 5x + 6$ এবং $x^2 3x + 2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।
- 2. $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b$, $bx^2-(b^2+bc)x+b^2c$ এবং $cx^2-(c^2+ac)x+c^2a$ এর ল. সা. শু. নির্ণয় কর।
- 3. a এবং b, এই ডুইটি রাশির ল. সা. গু. x, এবং কা. সা. গু. y; $x+y=ma+\frac{b}{m}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+y^3=m^3a^3+\frac{b^3}{m^3}$.

4. স্বল হব:
$$\frac{z(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2} + \frac{x(y^3-z^3)}{y^2+yz+z^2} + \frac{y(z^3-x^3)}{z^2+zx+x^2}$$

$$5. \cdot x = \frac{a}{a+b}$$
 এবং $y = \frac{b}{a+b}$ হইলে, দেখাও যে,

(i)
$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$
; (ii) $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$.

৴6. সমাধান কর:

$$\frac{1}{3}(7x-5) + \frac{1}{39}(34x+10) - \frac{(3x-2)(5x-3)}{4} = \frac{(4-x)(2+15x)}{4} - 18.$$

সহজ বীজগণিত

₹8৮

7. কোন স্ত্রীলোক পেনি প্রতি তিনটি হিসাবে কতকগুলি আপেল, এবং পেনি প্রতি চারিটি হিসাবে ঐ সমান সংখ্যক আপেল ক্রয় করিয়া প্রতি হই পেনিতে সাতটি হিসাবে সমস্ত আপেল বিক্রয় করায় দেখিতে পাইল যে, তাহার তিন পেন্স্লোকসান হইয়াছে। সে কত মূল্যে আপেলগুলি বিক্রয় করিয়াছিল ?

ৰ্শ্য সমাধান কর: (2x+3)(x-5)+(x+5)(3x+1)=34+(x+4)(x+5).

VII

- 1. $x^3 7x^2 + 5x 35$, $x^4 + 8x^2 + 15$ এবং $x^3(x^2 + 8) 7(x^4 + 15) + 15x 56x^2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।
- 2. $ab-ac+bc-b^2$, $bc \sim ab+ac-c^2$ এবং $ac-bc+ab-a^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

 $3 \leftarrow x$ এবং y, এই ছুইটি সংখ্যার গ. সা. গু, এবং ল. সা. গু. বথাক্রমে 3 এবং 105 ; x+y=36 ছইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{35}$.

4. সরল কর:
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-1)}$$

$$x = \frac{a+b}{a-b}$$
 এবং $y = \frac{a-b}{a+b}$ হইলে, $\frac{x+y}{x-y}$ এর মান নির্ণয় কর।

- '॰ ঁ-'6. তুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা, উহার অন্তর্গত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির চারিগুণ হইলে, দেখাও যে, অঙ্ক তুইটিকে বিপরীতক্রমে লিখিয়া যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, সেইটি ঐ অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সাঠগুণ হইবে।
- ৯ সমাধান কর:

মাধান কর:
$$3x+20 = 4y-10$$
 $\{4(x-1)-3(y-3)=0\}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1895.]

8. কোন এক সংখ্যার বর্গ 7 হইতে যত বড়, ঐ সংখ্যার অর্দ্ধের বর্গ 13 হইতে তত ছোট ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

একবিংশ অধ্যায়

জটিল সূত্রাবলী (Harder Formulæ)

চতুর্থ অধ্যায়ে বর্ণিত স্ক্রাবলী হইতে জটিলতর স্ক্রাবলী সম্পর্কে বর্ত্তমানে আলোচনা করা যাইতেছে।

টীকা। শিক্ষার্থিগণ অতি সহজেই ইহার সূত্যতা প্রত্যক্ষ করিতে পারে। বলা বাহুল্য যে, নিম্নলিখিত স্ত্রাবলীও এই স্থ্রটিরই অস্তর্ভুক্ত।

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)\dot{x}^2 + (bc+ca+ab)x - abc;$$

$$(x+a)(x+b)(x-c) = x^3 + (a+b-c)x^2 - (bc+ca-ab)x - abc;$$

$$(x+a)(x-b)(x-c) = x^3 + (a-b-c)x^2 + (bc-ca-ab)x + abc.$$

দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$$(x-a)(x-b)(x-c) = \{x + (-a)\}\{x + (-b)\}\{x + (-c)\}$$

$$= x^3 + \{(-a) + (-b) + (-c)\}x^2 + \{(-b)(-c)$$

$$+ (-c)(-a) + (-a)(-b)\}x + (-a)(-b)(-c)$$

$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (bc+ca+ab)x - abc.$$

°এইরূপে অন্ত ত্ইটি স্ত্রের সত্যতাও প্রতিপন্ন করা যায়; ছাত্রদ্রের উপর উহাদের প্রমাণের ভার অর্পিত হইল।

উপা. 3.
$$x-4$$
, $x+5$ এবং $x-3$ এর গুণফল লিখ।
$$(-4)+5+(-3)=-2,$$

$$(5)(-3)+(-3)(-4)+(-4)(5)=-15+12-20=-23,$$

$$(-4)\times5\times(-3)=60.$$
অতএব, নির্পেয় গুণফল= $x^3-2x^2-23x+60$.

উদা. 4.
$$x+3$$
, $x+5$ এবং $x-8$ এর গুণফল লিখ।
$$3+5+(-8)=0,$$

$$(5)(-8)+(-8)(3)+(3)(5)=-40-24+15=-49,$$

$$3\times5\times(-8)=-120.$$
অতএব, নির্ণেয় গুণফুল = $x^3-0.x^2-49x-120$
= $x^3-49x-120$.

প্রশ্নালা 70

खनकन नियः

1.	x+1,	x + 2	এবং	x + 3.	
----	------	-------	-----	--------	--

3.
$$x+3$$
, $x-6$ এবং $x+2$.

$$\sqrt{5}$$
. $x-8$, $x+3$ এবং $x+1$.

7.
$$x-3, x+7$$
 এবং $x-4$.

9.
$$x = 5, x - 7$$
 এবং $x - 11$.

13.
$$x-6$$
, $x+8$ এবং $x-2$.

15.
$$x-3$$
, $x+12$ এবং $x+4$.

17.
$$x+9, x-5 ext{ at } x-7.$$

19.
$$x-14$$
, $x+8$ এবং $x+6$.

2.
$$x+2, x+5$$
 এবং $x+7$.

4.
$$x+4$$
, $x+5$ এবং $x-10$.

6.
$$x-5, x-2$$
 এবং $x+8$.

8.
$$x+6, x-5$$
 এবং $x-7$.

10.
$$x-3$$
, $x-6$ এবং $x-9$.

12.
$$x+5, x+9$$
 এবং $x+11$.

14.
$$x-3, x-7$$
 এবং $x-13$.

16.
$$x-9$$
, $x-10$ এবং $x+12$.

18.
$$x+8$$
, $x+12$ and $x+15$.

$$20. \quad x-5, x-10$$
 এবং $x-16.$

126. ব্ৰহ্মান্ত্ৰান্ত্ৰির বর্গ নির্ম 54 এর অন্তর্গত উদা. 4 এবং 5 এ যথাক্রমে দেখান হইয়াছে মি,

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc ;$$

$$\text{QR: } (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

উপর্বোক্ত উদাহরণ হুইটিতে দেখা যায় যে, সম্পূর্ণ রাশিটির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহার অন্তর্গত প্রত্যেকটি পদের বর্গের সমষ্টি লইয়া উহার সহিত, প্রত্যেকটি পদকে উহার পরবর্ত্তী সকল পদ দারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলের দ্বিগুণ, যোগ করিতে হয়। উপরোক্ত ফলগুলিকে নিম্নলিখিতরূপে লিখিলে মনে রাখা স্থবিধাজনক। যথা

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a(b+c) + 2bc;$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2a(b+c+d) + 2b(c+d) + 2cd.$$

ইহা দেখান যাইতে পারে যে, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই এই নিয়ম প্রযোজ্য। দৃষ্টান্তস্বরূপ, a+b+c+d+e এর বর্গ নির্ণয় করা যাউক।

এখন,
$$(a+b+c+d+e)^2$$

$$=\{(a+b+c)+(d+e)\}^2$$

$$=(a+b+c)^2+2(a+b+c)(d+e)+(d+e)^2$$

$$=\{a^2+b^2+c^2+2a(b+e)+2bc\}$$

$$+\{2a(d+e)+2b(d+e)+2c(d+e)\}+(d^2+e^2+2de)$$

$$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+2a(b+c+d+e)+2b(c+d+e)$$

$$+2c(d+e)+2de.$$

অতএব, আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি যে, কোন বহুপদরাশির বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে, উহার অন্তর্গত প্রত্যেক পদের বর্গ লইয়া উহাদের সমষ্টির সহিত, প্রত্যেক পদকে তৎপরবর্তী পদসমূহ দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলের দিগুণ, যোগ করিতে হয়।

বলা বাহুল্য যে, বহুপদরাশিটিতে এক বা একাধিক ঋণাত্মক পদ থাকিলেও উপরিবর্ণিত নিয়ম প্রযোজ্য হইবে; কারণ, ঐ নিয়মে উল্লিখিত প্রতীকুসমূহ অত্যস্ত ব্যাপক অর্থ্যেই প্রযুক্ত হইয়াছে, এবং উহাদের মধ্যে যে কোনটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশি নির্দেশ করিতে পারে।

া বৈছিছ,
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$
,
ভাতএব, $2(ab+ac+bc)=\{a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\}-(a^2+b^2+c^2)$
 $=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$.
ভাজপ, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$.
ভাজপ, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$.

ভাজপ, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)$.
 $(x-y+z-v)^2=x^2+y^2+z^2+v^2+2x(-y+z-v)$
 $+2(-y)(z-v)+2z(-v)$
 $=x^2+y^2+z^2+v^2-2xy+2xz-2xv$
 $-2yz+2yv-2zv$.

উপা. 2.
$$-a+2b-3c-d$$
 এর বর্গ निश।
$$(-a+2b-3c-d)^2=a^2+4b^2+9c^2+d^2+2(-a)(2b-3c-d) +2(2b)(-3c-d)+2(-3c)(-d) = a^2+4b^2+9c^2+d^2-4ab+6ac+2ad -12bc-4bd+6cd.$$

WH. 3. a=19, b=18 and c=32 except, $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac$ - 2bc এর মান নির্ণয় কব।

প্রদত্ত রাশি =
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2a(b-c) + 2b(-c) = (a+b-c)^2$$
. অতএব, নির্ণেয় মান = $(19+18-32)^2=(5)^2=25$.

উলা. 4. x=b+c. y=c-a. z=a-b হইলে. প্রমাণ কর যে, কিলিঃ প্রবেশিকা, 1883.] $x^{2} + y^{2} + z^{2} - 2xy - 2xz + 2yz = 4b^{2}$.

$$x^{2} + y^{2} + z^{2} - 2xy - 2xz + 2yz = x^{2} + y^{2} + z^{2} + 2x(-y-z) + 2(-y)(-z)$$

$$= (x - y - z)^{2} = \{(b + c) - (c - a) - (a - b)\}^{2}$$

$$= (2b)^{2} = 4b^{2}.$$

প্রগ্রমালা 71

বর্গ নির্ণ্য কর:

1. x + y - z.

2. x - y + z.

3. -x+y+z.

4. $-x^2 - y + z$. 5. x - y - z.

6. a - x + y - z.

7. a-x-y-z. 8. m+n+p+q+r. 9. p-q+h-x-y.

10. -a+b-c+x-y-z.

11. a-2x-3y-4z.

12. 2a-b+2c-d.

মান নির্ণয় কর:

13.
$$l^2 + m^2 + n^2 - 2lm + 2ln - 2mn$$
, $availabel{eq:locality}$ $l = 17$, $m = 23$ and $n = 13$.

14.
$$p^2 + q^2 + r^2 + 2pq - 2pr - 2qr$$
, $q = 16$, $q = 12$ and $r = 25$.

15.
$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ab + 2bc$$
, $a = 28$, $b = 13$ and $c = 15$.

16.
$$x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2\dot{x} - 2y$$
, যখন $x = 6$ এবং $y = 7$.

17.
$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 36$$
, যথন $x = 23$ এবং $y = 18$.

18.
$$\omega^2 + 4y^2 + 1 - 4xy - 2x + 4y$$
, যথন $x = 26$ এবং $y = 12$.

19.
$$x^2 + 9y^2 - 6xy - 2x + 6y + 64$$
, যখন $x = 49$ এবং $y = 16$.

20.
$$9x^2 + y^2 - 6xy + 6x - 2y - 24$$
, $337 x = 14$ 33 ? $y = 38$.

- 21. a+b+c=12 এবং $a^2+b^2+c^2=50$ হইলে, ab+ac+bc এর মান নির্থাকর।
- 22. a+b+c=13 এবং ab+ac+bc=50 হইলে, $a^2+b^2+c^2$ এর মান
- 127. দ্বিপদরাশির শক্তি নির্বয়: উদ্ঘাতন (Involution):

গুণন প্রক্রিয়া দ্বারা দেখান যাইতে পারে যে:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

টীকা 1. কোন রাশিকে সেই রাশি দ্বারা এক বা একাধিক বার পর পর গুণ করিলে, লব্ধ গুণফলকে ঐ রাশির শক্তি (power) বলে; এবং ঐ রাশিটিকে গুণন প্রক্রিয়া-নির্দিষ্ট শক্তিতে উদ্ধীত করা হইল, এরপ বলা হয়। কোন রাশিকে যে কোন শক্তিতে উন্নীত করার প্রক্রিয়াকে উদ্ঘাতন (involution) বলে; এবং কোন রাশির উদ্ঘাতন প্রক্রিয়া দ্বারা যে রাশিমালা পাওয়া যায়, 'তাহাকে ঐ রাশির বিভ্তি (expansion) বলে।

টিকা 2. উপরোক্ত ফলগুলি পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে,

- (1) দ্বিপদরাশির যে কোন শক্তির বিস্তৃতিতে (expansion এ) লব্ধ পদ-সংখ্যা, ঐ শক্তির প্রচক-সংখ্যা হইতে 1 (এক) অধিক হয়। যথা, পঞ্চম শক্তির বিস্তৃতিতে, পদ-সংখ্যা 6, ষষ্ঠ শক্তির বিস্তৃতিতে পদ-সংখ্যা 7, ইত্যাদি।
- ্ঠে (2) a-b এর যে কোন শক্তির বিস্তৃতির (ρ xpansion) এবং a+b এর সমশক্তির বিস্তৃতির মধ্যে পার্থক্য এই যে, পূর্ব্বোক্ত বিস্তৃতির পদগুলি একাস্তরভাবে (alternately) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক, কিন্তু শেষোক্ত বিস্তৃতির পদগুলি সমস্তই ধনাত্মক হয়।
- (3) কোন দ্বিপদরাশির শক্তিতে যে স্থচক থাকে, দ্বিপদরাশির প্রথম । দ a এবং দ্বিতীয় পদ b কে সেই স্থচকবিশিষ্ট করিলে যথাক্রমে বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ পাওয়া

যায়। যথা, a+b এর চতুর্থ শক্তির বিস্তৃতিতে a^4 প্রথম পদ এবং b^4 শেষ পদ হয়; a+b এর পঞ্চ্ম শক্তির বিস্তৃতিতে a^5 প্রথম পদ এবং b^5 শেষ পদ হয়; ইত্যাদি। এবং অক্সান্ত পদগুলির যে কোনটিতে a এর স্ফক, উহার পূর্ববর্তী পদটির a এর স্ফক হইতে a এক স্কেক, উহার পূর্ববর্তী পদটির a এর স্ফক হইতে a এক স্কেক, উহার পূর্ববর্তী পদটির a এর স্ফক হইতে a এক স্কেক, উহার পূর্ববর্তী পদটির a এর স্ফক হইতে a এক স্কেক, উহার পূর্ববর্তী পদটির a এর স্কেক হইতে a এক স্কেক হইয়া থাকে।

- (4) বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগ দ্বিপদরাশির শক্তির স্টাকের সমান হয়; এবং যে কোন পদের সাংখ্য-সহগকে সেই পদের ৫ এর স্টাক দ্বারা গুণ করিয়া লক্ষ গুণফলকে সেই পদের স্থান-নির্দেশক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে, উহার পরবর্ত্তী পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যায়। যথা, দ্বিতীয় পদের সাংখ্য-সহগকে ঐ পদের ৫ এর স্টাক দ্বারা গুণ করিয়া ৪ দ্বারা ভাগ করিলে তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগকে ঐ পদের ৫ এর স্টাক দ্বারা গুণ করিয়া ৪ দ্বারা ভাগ করিলে চতুর্থ পদের সাংখ্য-সহগকে ঐ পদের ৫ এর স্টাক দ্বারা গুণ করিয়া ৪ দ্বারা ভাগ করিলে চতুর্থ পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যাইবে; ইত্যাদি।
- (5) বিস্তৃতিতে, প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদ্রবর্ত্তী পদ ছইটির সাংখ্য-সহগদ্বর সমান। যথা, প্রথম দিক হইতে গণনা করিয়া 4-তম পদের সাংখ্য-সহগ, শেষ দিক হইতে গণনা করিয়া 4-তম পদের সাংখ্য-সহগের সমান; তদ্ধপ, প্রথম হইতে 5-তম পদের সাংখ্য-সহগ, শেষ হইতে 5-তম পদের সাংখ্য-সহগের সমান; ইত্যাদি।

উল্লিখিত নিয়মসমূহকে সাধারণভাবে প্রতিপন্ন করা, এই পুস্তকে আলোচ্য বিষয়ের বহির্ভূত। কিন্তু এইগুলি মনে রাখিলে, দ্বিপদরাশির যে কোন শক্তির বিস্তৃতরূপ (expanded form) গুণন প্রক্রিয়া ব্যতিরেকে অতি সহজে লিখিতে পারা যায়।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দারা উপরোক্ত নিয়মসমূহের প্রয়োগ পরিষ্কার্কুপে বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. $(a+b)^7$ এর বিস্তৃতি (expansion) নির্ণয় কর। বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা = 8;

এবং প্রথম পদ = a^7 ,

দিতীয় পদ = $7a^6b$,

তৃতীয় পদ: ${}^{7 \times 6}a^5b^3 = 21a^5b^2$ [নিয়ম (3) এবং (4)]

চতুৰ্ পদ: = 21 × 5 a 4 b 3 = 35a 4 b 3;

এখন, যেহেতু প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদ্রবর্তী পদন্বয়ের সাংখ্য-সহগগুলি সমান [নিরম $(5)]_c$ অতএব বিস্তৃতির পঞ্চম, ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম পদগুলি যথাক্রমে $35a^3b^4$, $21a^2b^5$, $7ab^6$ এবং b^7 হইবে।

মুত্রাং $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

উদা. 2.
$$(x-y)^8$$
 এর বিস্থৃতি নির্ণয় কর। স্পষ্টতঃ, বিস্থৃতির মোট পদ-সংখ্যা = 9. প্রথম পদ = x^8 '; দিতীয় পদ = $-8x^7y$; তৃতীয় পদ = $\frac{8\times7}{2}x^6y^2$ = $28x^6y^2$; চতুর্থ পদ = $-\frac{28\times6}{3}x^5y^3 = -56x^5y^3$; পঞ্চম পদ = $\frac{56\times5}{4}x^4y^4$ = $70x^4y^4$;

এখন, যেহেতু পরবর্ত্তী চারিটি পদের সাংখ্য-সহগ বিপরীতক্রমে প্রথম চারিপদের সাংখ্য-সহগের সমান, অতএব, বিস্তৃতির ষষ্ঠ্, সপ্তম, অষ্টম এবং নবম পদগুলি যথাক্রমে $-56x^3y^5$, $28x^2y^6$, $-8xy^7$ এবং y^8 .

মতাবাং, $(x-y)^8 = x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5$ $+ 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$.

• উদ্ধা. 3.
$$(2x-3y)^7$$
 এর বিস্কৃতি নির্ণয় কর। স্পষ্টতঃ, বিস্কৃতির মোট পদ-সংখ্যা $= 8$.

যেহেতু, এস্কুল a এর পরিবর্ত্তে 2x এবং b এর পরিবর্তে 3y দেওয়া আছে, অতএব, .বিস্কৃতিতে,

প্ৰথম পদ =
$$(2x)^7$$
;
ায় পদ = $-7(2x)^6(3y)$;
তৃতীয় পদ = $\frac{7 \times 6}{2}(2x)^5(3y)^2 = 21(2x)^5(3y)^2$;
চতুপ পদ = $-\frac{21 \times 5}{3}(2x)^4(3y)^3 = -35(2x)^4(3y)^3$.

কাজেই, পঞ্চম, ষষ্ঠ, সপ্তম এবং অষ্টম পদগুলি যথাক্রমে $35\sqrt[3]{2x}$ $^3(3y)^4$, $21(2x)^2(3y)^5$, $7(2x)(3y)^6$ এবং $-(3y)^7$ হইবে।

স্থতরাং,

$$(2x - 3y)^{7} = (2x)^{7} - 7(2x)^{6}(3y) + 21(2x)^{5}(3y)^{2} - 35(2x)^{4}(3y)^{3}$$

$$+ 35(2x)^{3}(3y)^{4} - 21(2x)^{2}(3y)^{5} + 7(2x)(3y)^{6} - (3y)^{7}$$

$$= 128x^{7} - 7(64x^{6})(3y) + 21(32x^{5})(9y^{2}) - 35(16x^{4})(27y^{3})$$

$$+ 35(8x^{3})(81y^{4}) - 21(4x^{2})(243y^{5}) + 7(2x)(729y^{6}) - 2187y^{7}$$

$$= 128x^{7} - 1344x^{6}y + 6048x^{5}y^{2} - 15120x^{4}y^{3} + 22680x^{3}y^{4}$$

$$- 20412x^{2}y^{5} + 10206xy^{6} - 2187y^{7}.$$

Get 1. $x = \sqrt[3]{3} - 1$ **EXC.** $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x - 8$ এর মান নির্ণয় কর।

প্ৰাদন্ত রাশি =
$$(x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1) - 9$$

= $(x+1)^6 - 9$ '\(\text{} = (\frac{3}{3})^6 - 9 = 9 - 9 = 0.\)

প্রশালা 72

বিস্তৃতি নির্ণয় কর:

1.
$$(x+1)^5$$
. 2. $(x+1)^6$. 3. $(a+b)^8$. 4. $(a+b)^9$. 5. $(x-y)^5$. 6. $(m-n)^7$. 7. $(x+2)^4$. 8. $(x+2)^5$.

9.
$$(x+1)^8$$
. 10. $(x+3)^4$. 11. $(x-1)^5$. 12. $(2-z)^6$.

9.
$$(x+1)^8$$
. 10. $(x+3)^4$. 11. $(x-1)^5$. 12. $(2-z)^6$. 13. $(2x-1)^4$. 14. $(x-y)^9$. 15. $(3x-2)^5$. 16. $(1-a)^8$.

17.
$$(1-c)^7$$
. 18. $(1-3x)^8$. 19. $(1-2x)^7$. 20. $(2x-a)^8$.

21.
$$(x^6-a)^{10}$$
 22. $(3x-2a)^5$

मत्रन कतः •

23.
$$(x+1)^5 - (x-1)^5$$
, **24.** $(x-1)^6 + (x+1)^6$, **25.** $(x+a)^7 - (x-a)^7$.

নিম্নলিখিত বিস্তৃতিতে সাংখ্য-সহগগুলির যোগফল নির্ণয় কর:

26.
$$(x+a)^4$$
. 27. $(x+a)^5$. 28. $(x+a)^6$.

29.
$$(x+a)^7$$
. 30. $(x+a)^8$.

মান নির্ণয় কর :

31.
$$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 32$$
, $\sqrt[3]{4}$ $x = -2$.

32.
$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x$$
, $\sqrt[3]{4}$ $x = \sqrt[3]{2} + 1$.

33.
$$16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x - 80$$
, $34 = x = 2$.

34.
$$v^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$
, $\sqrt{4}$ $x = -5$.

25.
$$x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x - 609$$
, य्थन $x = -7$.

128. সূত্র :
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

= $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$
= $a^3+b^3+c^3-3abc$.

$$[(a+b+c)(a^{2}+b^{2}+c^{2}-bc-ca-ab)$$

$$=(a+b+c)\{(a^{2}+b^{2}-ab)-(ac+bc)+c^{2}\}$$

$$=(a+b+c)\{(a+b)^{2}-3ab-c(a+b)+c^{2}\}$$

$$=(a+b+c)\{(a+b)^{2}-c(a+b)+c^{2}-3ab\}$$

$$=(a+b)^{3}+c^{3}-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b)^{3}-3ab(a+b)+c^{3}-3abc$$

$$=a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc.$$

জ্বস্থানি । বিপরীতক্রমে, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$. অতএব, আমরা সর্বাদা $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর আকারের যে কান রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে পারি।

টাকা। থেছেডু, $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$, অতথ্য, $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

উদা. 1. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz - yz$ কে x - y - z দারা গুণ কর। x এর পরিবর্ত্তে a, -y এর পরিবর্ত্তে b এবং -z এর পরিবর্ত্তে c লিখিলে,

$$(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy+xz-yz)$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$= a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$= x^3-y^3-z^3-3xyz.$$

উদা. 2., $m^3 - n^3 + 1 + 3mn$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

m এর পরিবর্ত্তে a, -n এর পরিবর্তে b এবং 1 এর পরিবর্তে c লিখিলে.

$$m^{3} - n^{3} + 1 + 3mn = a^{3} + b^{3} + c^{3} - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^{2} + b^{2} + c^{2} - ab - ac - bc)$$

$$= (m - n + 1)(m^{2} + n^{2} + 1 + mn - m + n).$$

ं वी->१

উন্ধা. 3. দেখাও বে, $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$ x-y এর পরিবর্ত্তে $a,\ y-z$ এর পরিবর্ত্তে b এবং z-x এর পরিবর্ত্তে c লিখিলে, a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0.

মত্বাব,
$$\{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3\} - 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

$$= 0 \times (a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0 ;$$

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x).$$

প্রথমালা 73

ত্রণ কর:

1.
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy + zz + yz$$
 ($x + y - z$)

2.
$$p^2 + 4q^2 + r^2 + 2pq + pr - 2qr$$
 ($p - 2q - r$)

3.
$$4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$$
 ($4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 9y^2 + z^2 + 6xy + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 9y^2 + 2xz - 3yz$ ($4x^2 + 2xz - 3yz$) ($4x^2 + 2xz - 3yz$)

$$4.$$
 $a^2+4b^2+2ab-3a+6b+9$ ($a-2b+3$) ($a^2+4b^2+2ab-3a+6b+9$

5.
$$9a^2 + 25b^2 + 15ab + 12a - 20b + 16$$
 কে $3a - 5b - 4$ ছারা।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

6.
$$x^3 - y^3 - 1 - 3xy$$
.
7. $x^3 - y^3 + 6xy + 8$.
8. $x^3 - 8y^3 - 27z^3 - 18xyz$.

8.
$$x^3 - 8y^3 - 27z^3 - 18xyz$$
.

मान निर्णय करा :

9.
$$x^3 + y^3 + 18xy - 216$$
 এর, যথন $x + y = 6$.

11.
$$(s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 - 3(s-a)(s-b)(s-c)$$
 and

ম্পূন্ত যে,
$$(a-2b)^3+(2b-3c)^3+(3c-a)^3$$
 যথন $3s=a+b+c$

12. (49)
$$3(a-2b)^2+(2b-3c)^2+(3c-a)^2$$

= $3(a-2b)(2b-5c)(3c-a)$.

13. (7) 19 (4),
$$(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3$$

= $3(x+y-2z)(y+z-2x)(z+x-2y)$.

14. (
$$a+2b-3c)^3+(b+2c-3a)^3+(c+2a-3b)^3$$

= $3(a+2b-3c)(b+2c-3a)(c+2a-3b)$.

15. CFITS CF,
$$(2p-5q+3r)^3+(2q-5r+3p)^3+(2r-5p+3q)^8$$

= $3(2p-5q+3r)(2q-5r+3p)(2r-5p+3q)$.

16. $x=a^2-b^2$, y=2ab, $z=a^2+b^2$ হইলে, $x^6+y^6-z^6+3x^2y^2z^2$ এর মান নির্ণয় কর।

17.
$$x = 658$$
, $y = 668$, $z = 674$; $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।

129.
$$= a^2(b-c)(b-c)$$

$$= a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$$

$$= bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b).$$

$$[(a-b)(a-c)(b-c) = \{a^2 - a(b+c) + bc\}(b-c)$$

$$= a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c)$$

$$= a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$$

অনুসি. 1. বিপরীতক্রমে, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ = (a-b)(a-c)(b-c).

অতএব, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ এর আকারের যে কোন রাশির উৎপাদকই অবিলম্বে জানিতে পারা যায় । •

অনুসি. 2. থেহেতু,
$$a-c=-(c-a)$$
, অভএব, $(a-b)(a-c)(b-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

স্থতরাং, পূর্ব্বোক্ত স্ত্রটি নিম্নলিখিতরূপেও লিখা যাইতে পারে:

$$a^{2}(b-c)+b^{2}(c-a)+c^{2}(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

জামুসি. 3. যেহেতু, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ কে ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a) এর আকারে লিখা যাইতে পারে,

অতথ্যব,
$$ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) = -(a-b)(b-c)(c-a)$$
.

উদা. | সরণ কর: $(a+2b+3c)^2(a-2b+c)+(b+2c+3a)^2(b-2c+a)+(c+2a+3b)^2(c-2a+b)+(a-2b+c)(b-2c+a)(c-2a+b)$.

$$a+2b+3c$$
 এর পরিবর্জে x , $b+2c+3a$ এর পরিবর্জে y , এবং $c+2a+3b$ এর পরিবর্জে z ,

অতএব, প্রদন্ত রাশিমালা

$$=x^{2}(y-z)+y^{2}(z-x)+z^{2}(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)$$

$$=-(y-z)(z-x)(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)=0.$$

প্রথমালা 74

দেখাও যে,
$$(x-2y+z)(2x-y-z)(y-2z+x)=(x-y)^2(y-2z+x)+(y-z)^2(z-2x+y)+(z-x)^2(x-2y+z).$$
দেখাও যে, $(a+b)^2(b-a)+(b+c)^2(c-b)+(c+a)^2(a-c)+(b-a)(c-b)(a-c)=0.$
উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

2
$$(a-b+c)^2(a-c)+2(b-c+a)^2(b-a)+2(c-a+b)^2(c-b)$$
.
4. $(x+y)^2(y-x)+(y+z)^2(z-y)+(z+x)^2(x-z)$.
5. সরল কর: $2(a-b-c)^2(b-c)+2(b-c-a)^2(c-a)+2(c-a-b)^2(a-b)+8(a-b)(b-c)(c-a)$.

6. স্বল কর :
$$(x-y)(y-z)(x-2y+z)+(y-z)(z-x)(y-2z+x)$$

+ $(z-x)(x-y)(z-2x+y)+(x-2y+z)(y-2z+x)(z-2x+y)$.

130.
$$\Rightarrow_{a} = (b+c)(c+a)(a+b)$$

$$= a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$$

$$= a(b^2+c^2) + b(c^2+a^2) + c(a^2+b^2) + 2abc$$

$$= bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 2abc$$

$$= (a+b+c)(bc+ca+ab) - abc.$$

ি
$$(b+c)(c+a)(a+b) = (b+c)\{(a+b)(a+c)\}$$

$$= (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\}$$

$$= a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc(b+c)$$

$$= a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + b^2c + bc^2$$

$$= a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc.$$
[পদগুলিকে অন্তর্গপে সাজাইয়া]

কিন্ত, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ $=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$ [পদগুলিকে পুনরায় সাজাইয়া] $=(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)+(a^2b+ab^2)$ =bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b) =bc(a+b+c-a)+ca(a+b+c-b)+ab(a+b+c-c) =bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b+c)-bca-cab-abc =(a+b+c)(bc+ca+ab)-3abc.

👯 ইহা হইতেই সূত্ৰ-নির্দ্দিষ্ট অভেদগুলি পাওয়া যায়।

131. স্কুন্ত্র P, নিম্নল্লিখিত রাশিত্রয়ের যে কোনটি বুঝাইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, (a+b+c)(bc+ca+ab)=P+3abc:

$$y(i)$$
 $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$;

(ii)
$$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$$
;

(iii)
$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$
.

ি নিয়ম 130 হইতে পক্ষান্তর-করণ, বা প্রকৃত গুণন দারা,

$$(a+b+c)(bc+ca+ab) = a^{2}(b+c) + b^{2}(c+a) + c^{2}(a+b) + 3abc$$

$$= a(b^{2}+c^{2}) + b(c^{2}+a^{2}) + c(a^{2}+b^{2}) + 3abc$$

$$= bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc.$$

উদা. 1. গুণফল নির্ণয় কর: (2x + 3y + 5z)(15yz + 10zx + 6xy).

2x, 3y এবং 5z এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া,

$$a+b+c=2x+3y+5z,$$

$$bc + ca + ab = 15yz + 10zx + 6xy$$
;

$$(2x+3y+5z)(15yz+10zx+6xy)$$

$$= (a+b+c)(bc+ca+ab)$$

$$=a^{2}(b+c)+b^{2}(c+a)+c^{2}(a+b)+3abc$$

$$=4x^{2}(3y+5z)+9y^{2}(5z+2x)+25z^{2}(2x+3y)+3.2x.3y.5z$$

$$=12x^2y + 20x^2z + 45y^2z + 18y^2x + 50z^2x + 75z^2y + 90xyz.$$

উপা. 2. দেখাও যে,
$$(x+3y+12z)(12yz+4zx+xy)-12xyz$$

= $(y+4z)(12z+x)(x+3y)$.

x. 3y এবং 12z এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া,

$$a+b+c=x+3y+12z,$$

$$bc + ca + ab = 36yz + 12zx + 3xy = 3(12yz + 4zx + xy),$$

এবং, abc = 36xyz.

... বাম পক্ষ =
$$\frac{1}{3}\{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc\}$$

$$=\frac{1}{3}(b+c)(c+a)(a+b)$$

িবিয়ম 1301

 $=\frac{1}{3}(3y+12z)(12z+x)(x+3y)$ [a, b এবং c এ মান বসাইয়া]

$$= (y + 4z)(12z + x)(x + 3y).$$

প্রশ্নমালা 75

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গুণফল লিখ:

1.
$$(x+2y)(2y+3z)(3z+x)$$
. **2.** $(8x+y)(y+5z)(5z+8x)$.

3.
$$(a+2b)(2b+3c)(3c+a)$$
. $\sqrt{4}$. $(3x+y+10z)(10yz+30zx+3xy)$.

5.
$$(x+2y+z)(2x+y+z)(x+y+2z)$$
. **6.** $(a-2b)(2b-3c)(3c+a)$.

সরল কর:

7.
$$a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$
.

8.
$$c(b+c-a)(c+a-b) + a(c+a-b)(a+b-c) + b(a+b-c)(b+c-a) + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

9.
$$(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)+(x+y)^2(x+y+2z)$$

 $-(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y).$

10.
$$2a(b+c-a)^2 + 2b(c+a-b)^2 + 2c(a+b-c)^2 - 3abc + 2(a+b+c)\{(c+a-b)(a+b-c) + (a+b-c)(b+c-a) + (b+c-a)(c+a-b)\}.$$

11. প্রমাণ কর যে,
$$(x+y-z)\{(y+z-x)^2+(z+x-y)^2\}+(y+z-x)+\{(z-x)^2+(x+y-z)^2\}+(z+x-y)\{(x+y-z)^2+(y+z-x)^2\}+(y+z-x)^2\}+(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)^2$$

132.
$$= (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$\{(a+b+c)^3 = \{(a+b)+c\}^3$$

$$= (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)c\{(a+b)+c\}, \qquad [\text{FARM 57}]$$

$$= \{a^3 + b^3 + 3ab(a+b)\} + c^3 + 3(a+b)c(a+b+c)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + \{3ab(a+b) + 3(a+b)c(a+b+c)\}$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)\{ab+c(a+b+c)\}$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)\{c^2 + c(a+b) + ab\}$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(c+b)(c+a) \qquad [\text{FARM 61}]$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

া. 1. $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$ কে উৎপাদকে বিল্লেখণ কর।

y+z, z+x এবং x+y এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে a, b এবং c গিখিলে, a+b+c=2(x+y+z).

. '. প্রদত্ত রাশি =
$$\{2(x+y+z)\}^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3 - (x+y)^3$$

 $= (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$
 $= 3(b+c)(c+a)(a+b)$ [অমুসি.]
 $= 3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$.

[a, b এবং c এর মান বসাইয়া]

উদা. 2. দেখাও যে.

$$(x+y+z)^3 = (y+z-x)^3 + (z+x-y)^3 + (x+y-z)^3 + 24xyz.$$

এখন, y+z-x, z+x-y এবং x+y-z এর পরিবর্ডে যথাক্রমে a, b এবং c লিখিয়া, a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z.

$$b + c = (z + x - y) + (x + y - z) = 2x,$$

$$c + a = (x + y - z) + (y + z - x) = 2y,$$

এবং
$$a+b=(y+z-x)+(z+x-y)=2z$$
.

$$(x+y+z)^3 = (a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$= (y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+3.2x.2y.2z$$

$$= (y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz,$$

প্রশ্নালা 76

- 1. a + b + c = 0 হৈলে, দেখাও যে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3a(c+a)(a+b)$ = 3b(b+c)(b+a) = 3c(c+a)(c+b) = 3abc.
- $2. \quad 2s = x + y + z$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

• •
$$(s-x)^3 + (s-y)^3 + (s-z)^3 + 3xyz = s^3$$
.

3. প্রামাণ কর যে, $(2x-y-z)^3 + (2y-z-x)^3 + (2z-x-y)^3$ = 3(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y).

5. CPRISCH,
$$(2x-y-z)^3+y^3+z^3+3(y+z)(2x-y)(2/3-z)$$

= $(2x-y-3z)^3+u^3+27z^3+3(y+3z)(2x-y)(2x-3z)$.

6.
$$2s = x + y + z$$
 ইইলে, প্রমাণ কর যে,
$$s^3 + (s - 2x)^3 + (s - 2y)^3 + (s - 2z)^3 - 24(s - x)(s - y)(s - z) = 0.$$

7.
$$3s = 2(x+y+z)$$
 ইইলে, দেখাও যে, $(s-y-z)^3 + (s-z-x)^3 + (s-x-y)^3 + 3(y+z-s)(z+x-s)(x+y-s) = 0$.

সবল কর:

8.
$$(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3-(a+b+c)^3+108abc$$
.

9.
$$(x+y+z)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3 - (x+y)^3 + x^3 + y^3 + z^3$$
.

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

10.
$$x^3 - (2x - y - z)^3 - (2y - z - x)^3 + (y - 2z)^3$$
.

11.
$$64(x+y+z)^3 - (2x+y+z)^3 - (x+2y+z)^3 - (x+y+2z)^3$$
.
মান নির্ণয় কর:

12.
$$a^3 + b^3 + c^3$$
, $a = 0$, $a + b = 0$.

13.
$$x^3 + y^3 + z^3$$
, $\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$

14.
$$(x+y+z)^3 - (x+z-y)^3 - (y+z-x)^3 - (x+y-z)^3 - 23xyz$$
, যথন $x=10$, $y=64$ এবং $z=2$.

15.
$$(6x-y-z)^3+y^3+z^3+3(y+z)(6x-y)(6x-z)$$
,
যথন $x=\frac{11}{6},\ y=\frac{115}{115}$ এবং $z=17$.

133. সূত্রাবলীর পুনরুত্রেখঃ পূর্ববর্ণিত হত্রসমূহের আবখক-মত প্রয়োগের স্থবিধার জক্ত উহাদিগকে নিমে সন্নিবেশিত করা হইল। কিন্তু এই হত্তগুলিকে ছাত্রগণের এরূপভাবে মুখস্থ করিয়া রাখা কর্ত্তব্য যে. প্রয়োগের সময় উহাদিগকে পুনরায় দেখিয়া লইতে না হয়।

I.
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
.

II.
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
.

III.
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
.

IV.
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

 $= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
V. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

V.
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

= $a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

VI.
$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

 $= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$= (a+b)(a^{2}-ab+b^{2})$$
VII. $b^{3}-b^{3}=(a-b)^{3}+3ab(a-b)$

$$= (a-b)(a^{2}+ab+b^{2})$$

VIII.
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$
.
 IX. $(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab$.
 X. $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$.
 XI. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$.
 XII. $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc$.
 XIII. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$$
 XIV. $(a-b)(a-c)(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)$

$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$

$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$

$$=(a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$$
 XV. $(b+c)(c+a)(a+b)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$$

$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc.$$
 XVII. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$

$$=(b+c)(c+a)(a+b)+abc$$

$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$$

$$=(b+c)(c+a)(a+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b)+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)(a+b+b+abc$$

$$=a(b+c)(c+a)($$

XXVI.
$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$$
.
XXVII. $(a_s^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + a^2b^2 - b^4$.
XXVIII. $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
 $= 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$.
XXIX. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
XXX. $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

দ্রাবিংশ অপ্রায় জটিল গুণনীয়ক ও অভেদাবলী (Harder Factors and Identities)

I. গুণনীয়ক (Factors)

দ্বাদশ অধ্যাযে a^2-b^2 , a^3+b^3 , a^3-b^3 এবং ax^2+bx+c এব আকারের রাশিসমূহকে কি প্রকাবে গুণনীযকে (উৎপাদকে) বিশ্লেষণ কবা যায, তাহা বর্ণিত হইযাছে। বর্ত্তমান অধ্যায়ে জটিলতব বাশিসমূহেব বিশ্লেষণ-প্রণালী বর্ণিত হইবে।

 $134.\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3-3abc}$ এর আকারের রাশিসমূহকে ভিৎপাদকে বিশ্লেষণ:

বৈছেতু,
$$b^3 + c^3 = (b+c)^3 - 3bc(b+c)$$
,

অতএব, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$= a^3 + \{(b+c)^3 - 3bc(b+c)\} - 3abc$$

$$= \{a^3 + (b+c)^3\} - 3bc\{(b+c) + a\}$$

$$= \{a + (b+c)\}\{a^2 - a(b+c) + (b+c)^2\} - 3bc(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)\{a^2 - ab - ac + b^2 + 2bc + c^2 - 3bc\}$$

$$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2\}.$$

ভাগা. 1. $a^3-b^3+c^3+3abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কব। প্রান্থ রাশি = $a^3+(-b)^3+c^3-3a(-b)c$ = $\{a+(-b)+c\}\{a^2+(-b)^2+c^2-(-b)c-ca-a(-b)\}$ $a^3-b^3+c^3+3abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কব। $a^3-b^3+c^3-3a(-b)c$

উদা. 2.
$$x^3 - y^3 + 6xy + 8$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রাশি =
$$x^3 + (-y)^3 + (2)^3 - 3x(-y).2$$

= $\{x + (-y) + 2\}\{x^2 + (-y)^2 + 2^2 - (-y).2 - 2x - x(-y)\}$
= $(x - y + 2)(x^2 + y^2 + 4 + 2y - 2x + xy).$

উদা. 3.
$$x^6 + 32x^3 - 64$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

প্রাণি =
$$x^6 + 8x^3 - 64 + 24x^3$$

= $(x^2)^3 + (2x)^3 + (-4)^3 - 3.x^2.2x.(-4)$
= $\{x^2 + 2x + (-4)\}\{(x^2)^2 + (2x)^2 + (-4)^2 - 2x(-4)$
— $(-4)x^2 - x^2.2x\}$
= $(x^2 + 2x - 4)(x^4 + 4x^2 + 16 + 8x + 4x^2 - 2x^3)$
= $(x^2 + 2x - 4)(x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 8x + 16)$.

উদা. 4. ভাগফল নির্ণয় কর: $a^3 + b^3 + 1 - 3ab$ কে a + b + 1 ছারা।

থেছেডু,
$$a^3 + b^3 + 1 - 3ab = a^3 + b^3 + 1^3 - 3ab.1$$

$$= (a+b+1)\{a^2 + b^2 + 1^2 - b.1 - 1.a - ab\}$$

$$= (a+b+1)(a^2 + b^2 + 1 - b - a - ab);$$
নির্গেষ্ট ভাগফল = $a^2 + b^2 + 1 - b - a - ab$.

প্রশ্নালা 77

.উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

1.
$$x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz$$
.

2.
$$p^3 - 8q^3 - r^3 - 6pqr$$
.

3.
$$8x^3 - 27y^3 - z^3 - 18xyz$$
. 4. $a^3 + 8b^3 + 1 - 6ab$.

4.
$$a^3 + 8b^3 + 1 - 6ab$$
.

5.
$$8a^3 + 27b^3 - 64 + 72ab$$
.

$$\sqrt{6}$$
. ভাগফল নির্ণয় কর: $x^3-y^3+6xy+8$ কে $x-y+2$ দারা।

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

7.
$$x^6 + 5x^3 + 8$$
.

7.
$$x^3 + 5x^3 + 8$$
.
8. $(x-y)^3 - (y-z)^3 + (z-x)^3 + 3(y-z)(z-x)(x-y)$.

$$9. \quad a^6 - 18a^3 + 125.$$

ভাগফল নির্ণয় কর:

* 10.
$$x^3 + 27 - 5y(25y^2 - 9x)$$
 কে $x^2 + 25y^2 + 9 + 5xy - 3x + 15y$ ছারা।
11. $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$ কে $a + b + c$ ছারা।

12.
$$x^3 - y^3 - 1 - 3xy$$
 কে $x - y - 1$ দ্বাবা।

13.
$$x^3 - 8y^3 + 27z^3 + 18xyz$$
 কে $x - 2y + 3z$ বারা।

14.
$$8a^3 - 27b^3 - c^3 - 18abc$$
 ($4a^2 + 9b^2 + c^2 + 6ab + 2ac - 3bc$)

"15.
$$14a^8 - 4b^3 + 9a^2b$$
 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

135. (a+b+c)(bc+ca+ab)-abc এর আকারের রাশি-সমূত্রের বিশ্লেষ্

উন্নিখিত রাশি =
$$\{a + (b+c)\}\{a(b+c) + bc\} - abc$$

= $a^2(b+c) + a(b+c)^2 + bc(b+c) = (b+c)\{a^2 + a(b+c) + bc\}$
= $(b+c)(a+b)(a+c) = (b+c)(c+a)(a+b)$.

ख्यूजि. 1.
$$(a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)(c+a)(a+b)=abc$$
.

SAME 3.
$$(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(bc+ca+ab).$$

136. নিম্নলিখিত রাশিদ্রয়ের উৎ পাদকে বিশ্লেষ্ণ।

(i) P+2abc এবং (ii) P+3abc,

যখন P নিম্নোক্ত রাশিত্রযেব যে কেণনটি বুঝাইতেছে:

(1)
$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$$
.

(2)
$$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$$
.

(3)
$$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$$
.

(i) P, (1) দাবা স্থচিত বাশিটিকে ব্ঝাইলে.

$$P + 2abc = a^{2}(b+c) + b^{2}(c+a) + c^{2}(a+b) + 2abc$$

$$= a^{2}(b+c) + a(b^{2} + 2bc + c^{2}) + b^{2}c + bc^{2}$$

$$= a^{2}(b+c) + a(b+c)^{2} + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^{2} + a(b+c) + bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c) = (b+c)(c+a)(a+b).$$

(ii) P, (2) দ্বারা স্থচিত রাশিটিকে ব্ঝাইলে,

$$P + 3abc = bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + 3abc$$

$$= bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b) + abc + abc + abc$$

$$= \{bc(b+c) + abc\} + \{ca(c+a) + abc\} + \{ab(a+b) + abc\}$$

$$= bc(a+b+c) + ca(c+a+b) + ab(a+b+c)$$

$$= (a+b+c)(bc+ca+ab).$$

137. নিমোক্ত রাশিসমূহের যে কোনটি Q দারা সূচিত হইলে, Q এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

(1)
$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
.

(2)
$$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
.

(3)
$$-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}.$$

$$Q$$
 এর প্রথম আকার লইলে, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+b^2c-bc^2$$

$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$

$$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

অনুসি. a, b, c এর পরিবর্তে যথাক্রমে a^2, b^2 এবং c^2 বসাইলে,

$$a^{4}(b^{2}-c^{2}) + b^{4}(c^{2}-a^{2}) + c^{4}(a^{2}-b^{2})$$

$$= -(b^{2}-c^{2})(c^{2}-a^{2})(a^{2}-b^{2})$$

$$= -(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)_{r}$$

উদা. ৷ গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর:

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b).$$

প্রাপত্ত বাশি =
$$(x^2 - 2ax + a^2)(b-c) + (x^2 - 2bx + b^2)(c-a) + (x^2 - 2cx + c^2)(a-b)$$

= $x^2\{(b-c) + (c-a) + (a-b)\} - 2x\{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\} + \{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)\}$
= $x^2 \cdot 0 - 2x \cdot 0 - (b-c)(c-a)(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)$.

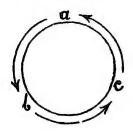
156. a³(b-c)+b³(c-a)+c³(a-b) の気 でくずれて

বিশ্লেষ্

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
 $=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$
 $[a$ এর অধঃক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাইয়া],
 $\cdot = (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$
 $= (b-c)\{-b^2(a-c)-bc(a-c)+a(a^2-c^2)\}$
 $[b$ এর অধঃক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাইয়া],
 $= (b-c)(a-c)\{-b^2-bc+a(a+c)\}$
 $= (b-c)(a-c)\{c(a-b)+a^2-b^2\}$
 $[c$ এর অধঃক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাইয়া],
 $= (b-c)(a-c)\{c(a-b)+a^2-b^2\}$
 $[c$ এর অধঃক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাইয়া],
 $= (b-c)(a-c)(a-b)(c+b+a)$
 $= (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

টীকা। লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, প্রদন্ত রাশিমালাকে (i) a এর শক্তির ক্রমান্থসারে সাজাইলেই, b-c উৎপাদকটি অবিলমে পাওয়া যায়; (ii) ইহার পর, ধন্তুর্বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত রাশিমালাকে আবার b এর শক্তির ক্রমান্থসারে সাজাইলে, পরবর্ত্তী উৎপাদক a-c সহজে পাওয়া যায়; (iii) সর্ব্বশেষে, আবার ধন্ত্র্বন্ধনীর অন্তর্ভুক্ত রাশিমালাকে c এর শক্তির ক্রমান্থসারে সাজাইলে, তৃতীয় উৎপাদক a-b পাওয়া যায়।

139. ত্রু-ক্রেম (Cyclic order): 137 ও 138 নিয়মে উল্লিখিত রাশিসমূহে, a, b, c অক্ষর তিনটির বিক্রাস একটু বিশেষত্বযুক্ত। দৃষ্টান্তস্বরূপ, 137 নিয়মে উল্লিখিত Q এর তুল্য আকারত্রয়ের যে কোনটির প্রথম পদে a, b, c এর পরিবর্জে যথাক্রমে b, c, a লিখিলেই উহার দ্বিতীয় পদটি পাওয়া যায়; আবার, দ্বিতীয় পদে h, c, a এর পরিবর্জে যথাক্রমে c, a, b লিখিলে তুতীয় পদ, এবং তৃতীয় পদে c, a, b এর পরিবর্জে যথাক্রমে a, b, c লিখিলে প্রথম পদ, পাওয়া যায়। a, b, c অক্ষর তিনটিকে, কোন্ ক্রম-অমুসারে ক্রমাম্বয়ে পরিবজ্ঞিত করিতে হইবে, তাহা নিম্নলিখিত উপায়ে সহজে বুঝা যায়।



a, b, c অক্ষর তিনটিকে (চিত্রে যেরূপ প্রদর্শিত হইরাছে)
একটি রন্তের পরিধির উপর সাজাও; এখন, a হইতে আরম্ভ
করিয়া তীর-,চিহ্ননির্দিষ্ট দিকে চলিতে থাকিলে, পরিধির
উপরিস্থিত অক্ষর তিনটিকে abc এই ক্রমে পাওয়া যায়;
তজ্ঞপ, b ও c হইতে আরম্ভ করিয়া পূর্বোল্লিখিত দিকে
চলিতে থাকিলে অক্ষরত্রয়কে যথাক্রমে bca ও cab ক্রমে
পাওয়া যায়।

যদি তিনটি অক্ষর a, b, c উপরোক্তরূপে বিশ্রন্থ হয়, তাহা হইলে ঐ বিশ্রাসকে চক্তে-ক্রেম (cyclic order) বলে।

নিমে a, b, c এর চক্র-ক্রম বিস্থাসযুক্ত কতিপয় রাশি দেওয়া হইল:

- (i) b+c, c+a are a+b; (ii) b-c, c-a are a-b;
- (iii) b+c-a, c+a-b are a+b-c; (iv) bc, ca are ab;
- (v) $a^{2}(b-c)$, $b^{2}(c-a)$ এবং $c^{2}(a-b)$; ইত্যাদি।

 $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ এর শুপনীয়কে বিজেষণ:

্র একে ত্রেও, অক্ষরগুলি চত্র-ক্রম অমুসারে বিশ্রন্ত হওয়ায়, পূর্ব্ব উদাহরণের প্রণালী অমুষায়ী প্রক্রিয়া, আরম্ভ করিতে হইবে।

- 141. সূত্ৰ: $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ এর শুপনীয়কে বিশ্লেষ্
- 142. সূত্ৰ: $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ এর প্রপ-নীয়কে বিশ্লোম্বন: [132 নিয়মের অম্সি. দেখ] :

প্রামি =
$$4b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2)$$

= $(2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$
= $\{2bc + (a^2 - b^2 - c^2)\}\{2bc - (a^2 - b^2 - c^2)\}$
= $\{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\}\{(b^2 + 2bc + c^2) - a^2\}$
= $\{a^2 - (b - c)^2\}\{(b + c)^2 - a^2\}$
= $\{a + (b - c)\}\{a - (b - c)\}\{(b + c) + a\}\{(b + c) - a\}$
= $(a + b - c)(a - b + c)(b + c + a)(b + c - a)$
= $(a + b + c)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$.

প্রথমালা 78

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

1. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

2. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$.

3. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$.

4. $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3)$.

5. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$,

6. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz$.

```
সহজ বীজগণিত
```

$$x^{2}(y-z)^{3}+y^{2}(z-x)^{3}+z^{2}(x-y)^{3}$$
.

8.
$$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$$
.

9.
$$(x^2 + 2x + 4)(y - z) + (y^2 + 2y + 4)(z - x) + (z^2 + 2z + 4)(x - y)$$
.

10.
$$\{x^2 - (b+c)x + bc\}(b-c) + \{x^2 - (c+a)x + ca\}(c-a) + \{x^2 - (a+b)x + ab\}(a-b)$$

$$11. (x+b)(x+c)(b-c) + (x+c)(x+a)(c-a) + (x+a)(x+b)(a-b).$$

12.
$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 3abc$$
.

13.
$$8x^3 - (y-z)^3 - (z+x)^3 - (x-y)^3$$
.

14.
$$a^{6}(b^{3}-c^{3})+b^{6}(c^{3}-a^{3})+c^{6}(a^{3}-b^{3}).$$

15.
$$x^6(y^4-z^4)+y^6(z^4-x^4)+z^6(x^4-y^4)$$
.

.16.
$$8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$$
.

17.
$$yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)-x^3-y^3-z^3-2xyz$$
.

18.
$$(x+1)^2(y-z)+(y+1)^2(z-x)+(z+1)^2(x-y)$$
.

19.
$$(x+1)^3(y-z)+(y+1)^3(z-x)+(z+1)^3(x-y)$$
.

20.
$$x(y-z)^3 + y(z-x)^3 + z(x-y)^3$$
.

21.
$$2b^2c^2y^2z^2 + 2c^2a^2z^2x^2 + 2a^2b^2x^2y^2 - a^4x^4 - b^4y^4 - c^4z^4$$
.

22.
$$72y^2z^2 + 18z^2x^2 + 8x^2y^2 - x^4 - 16y^4 - 81z^4$$
.

23.
$$b+c-a=7$$
, $c+a-b=10$ এবং $a+b-c=3$ হইলে, $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ এর মান নির্ণয় কর।

24. a+b+c=20, bc+ca+ab=18 and abc=37 exert. $a^2(b+c)$ $+b^{2}(c+a)+c^{2}(a+b)$ এর মান নির্ণয় কর।

25. a+b+c=13 and $a^2+b^2+c^2=69$ exert, $(a+b+c)^3-a^3-b^3$ $-c^3 + 3abc$ এর মান নির্ণয় কর।

143. বিপরীভ রাশিমালার (Reciprocal Expression এর) প্রপ্রীয়ক নির্পয়:

সংজ্ঞাঃ যে রাশিমালাতে, প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদন্বয়ের সহগ তুইটি পরস্পর সমান, তাহাকে বিপরীত রাশিমালা (Reciprocal or recurring ${
m expression}$) বলে। যথা, $x^4+4x^3+5x^2+4x+1$ একটি বিপরীত রাশিমালা।

উদ্ধা. 1.
$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$
 কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা
$$=(x^4+1)+(2x^3+2x)+3x^2$$
,

সিমান সহগবিশিষ্ট পদন্বয়কে সংযুক্ত করিয়া

$$= \{(x^2+1)^2 - 2x^2\} + 2x(x^2+1) + 3x^2$$

$$= (x^2+1)^2 + 2x(x^2+1) + 3x^2 - 2x^2$$

$$= (x^2+1)^2 + 2(x^2+1) \cdot x + x^2$$

$$= \{(x^2+1) + x\}^2 = (x^2+x+1)^2.$$

উদা. 2. $a^4 - 5a^3 - 12a^2 - 5a + 1$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর। প্রদন্ত রাশিমালা = $(a^4 + 1) - (5a^3 + 5a) - 12a^2$

[সমান সহগবিশিষ্ট পদম্মকে সংষ্ক্ত করিয়া] $= \{(a^2+1)^2-2a^2\}-5a(a^2+1)-12a^2$ $= (a^2+1)^2-5(a^2+1).a-2a^2-12a^2$ $= x^2-5xa-14a^2, \qquad [a^2+1 \text{ এর পরিবর্ডে } x \text{ लिখিয়া}]$ = (x+2a)(x-7a) $= (a^2+1+2a)(a^2+1-7a) \text{ } [x \text{ এর পরিবর্ডে } a^2+1 \text{ লিখিয়া}]$ $= (a+1)^2(a^2-2a+1).$

144. পরীক্ষা দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয়ঃ

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, প্রদত্ত রাশিমালার পদসমূহকে এরপভাবে বিভিন্ন
ভাগে বিশ্বস্ত করা যায়, যাহাদের প্রত্যেকে x − 1 দ্বারা বিভাজ্য। যথা.

প্রাণি মালা =
$$x^3 - x^2 - x^2 + x - 6x + 6$$

= $(x^3 - x^2) - (x^2 - x) - (6x - 6)$
= $x^2(x - 1) - x(x - 1) - 6(x - 1)$
= $(x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

টীকা। লুক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, প্রাদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্জে 1, -2, অথবা 3' বসাইলে রাশিমালার মান প্রত্যেক ক্ষেত্রেই 0 হয়। এতদমুসারে সাধারণভাবে বলা যায় যে, x সমন্বিভ কোন রাশিমালাতে x এর পরিবর্জে a বসাইলে যদি রাশিমালার মান a (শৃষ্ম) হয়, ভবে এ রাশিমালার একটি উৎপাদক x-a হইবে।

- (1) যদি উহার বিভিন্ন পদগুলির সহগের বীজ্বগণিতীয় যোগফল 0 হয়, তবে x-1 a রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে।

(2) যদি অষ্থা স্চকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল, অবশিষ্ট পদসমূহের সহগের যোগফলের সমান হয়, তবে x+1 ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। যথা, প্রথম উদাহরণে, বিভিন্ন পদগুলির সহগের যোগফল

আবার, x^3+3x^2+3x+1 তে, x^3 এবং x ই, x এর অযুগ্ম স্টেকবিশিষ্ট পদ। এই পদন্বয়ের সহগের যোগফল=1+3=4; এবং অবশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল=3+1=4. এই উভয় যোগফলই সমান হওয়ায়, বুঝা যাইতেছে যে, x^3+3x^2+3x+1 এর একটি উৎপাদক x+1 ইইবে।

উলা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

x এর অযুগ্ম স্টেকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল =1+11=12; এবং অবশিষ্ট পদসমূহের সহগের যোগফল =6+6=12. অতএব, x+1 প্রদন্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। এখন, প্রদন্ত রাশিমীলার পদসমূহকে এরপভাবে সভ্যবদ্ধ কর, যেন প্রত্যেকটি সভ্য x+1 দ্বারা বিভাজ্য হয়। এইরূপ করিলে,

প্রাশিমালা =
$$x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$$

= $(x^3 + x^2) + (5x^2 + 5x) + (6x + 6)$
= $x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1)$
= $(x+1)(x^2 + 5x + 6) = (x+1)(x+2)(x+3)$.

উলা. ৪. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $8x^3 + 16x - 9$.

2x এর পরিবর্ত্তে y লিখিলে, প্রদত্ত রাশিমালা $=(2x)^3+8.(2x)-9$ $=y^3+8y-9.$

এখন, $y^3 + 8y - 9$ এর সহগগুলির যোগফল = 1 + 8 - 9 = 0.

ষ্মতএব, এই রাশিমালার একটি উৎপাদক y-1 হইবে। এখন, ইহার পদগুলিকে এক্কপভাবে সম্ববদ্ধ কর, যেন প্রত্যেকটি সম্ব y-1 দারা বিভাষ্য হয়। এইরূপ করিলে,

$$y^3 + 8y - 9 = y^3 - y + 9y - 9 = y(y^2 - 1) + 9(y - 1)$$

$$= (y - 1)\{y(y + 1) + 9\} \doteq (y - 1)(y^2 + y + 9)$$

$$= (2x - 1)(4x^2 + 2x + 9). \qquad [y এর পরিবর্জে 2x বসাইন]$$

উদা. 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ $x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 4x + 1$. এক্ষেত্রে দেখা যায় যে,

ু অযুগ্ম স্নচকবিশিষ্ট পদগুলির সহগের যোগফল=1+(-13)+4 = -8;

এবং অবশিষ্ট সহগগুলির যোগফল = 4 + (-13) + 1 = -8. এই উভর যোগ-ফল সমান হওয়ায়, প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক x + 1 হইবে।

এখন, রাশিমালার পদসমূহকে এরপভাবে সভ্যবদ্ধ কর, যেন প্রত্যেকটি সভ্য x+1 দ্বারা বিভাজ্য হয় । এইরূপ করিলে,

আবার, $x^4+3x^3-16x^2+3x+1$ উৎপাদকটি একটি বিপরীত রাশিমালা (reciprocal expression) হওয়ায়, 143 নিয়মে বণিত প্রণালী অনুসারে,

$$x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 1 = (x^4 + 1) + (3x^6 + 3x) - 16x^2$$

[সমান সহগবিশিষ্ট পদগুলিকে সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া]

=
$$\{(x^2+1)^2-2x^2\}+3x(x^2+1)-16x^2$$

= $(x^2+1)^2+3(x^2+1)x-2x^2-16x^2$
= $y^2+3yx-18x^2$ [x^2+1 এর পরিবর্জে y বসাইয়া]
= $(y-3x)(y+6x)$
= $(x^2+1-3x)(x^2+1+6x)$,
[y এর পরিবর্জে উহার মান x^2+1 লিখিয়া]
= $(x^2-3x+1)(x^2+6x+1)$.

অতএব, প্ৰদত্ত বাশিমালা = $(x+1)(x^2-3x+1)(x^2+6x+1)$.

উদা. 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3 + x^2 - 21x - 38$.

পরীক্ষা করিষ্মা দেখা গেল যে, x এর পরিবর্ত্তে -2 বসাইলে রাশিমালার মান 0 হয়। কাজেই, x-(-2) অর্থাৎ x+2 উহার একটি উৎপাদক হইবে।

অতএব,
$$x^3+x^2-21x-38=(x^3+2x^2)-(x^2+2x)-(19x+38)$$

$$[x+2 \ \mbox{ছারা বিভাজ্য হয়, এরূপ সভেষ সভ্যবদ্ধ করিয়া]}$$
 • $=x^2(x+2)-x(x+2)-19(x+2)$
$$=(x+2)(x^2-x-19).$$

145. ন্থই মাত্ৰা (dimension) রিশিষ্ট সমমাত্র রাশিমালার (homogeneous expression এর) গুণনীয়ক নির্ণয় :

নিম্লিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়াপ্রধালী বুঝান যাইতেছে:

উদা. 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর ঃ $6a^2 + 7ab + 2b^2 + 11ac + 7bc + 3c^2$. প্রদত্ত রাশিমালায়, a=0 ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ = $2b^2 + 7bc + 3c^2$

$$=(2b+c)(b+3c)$$
 ... (1)

প্রদন্ত রাশিমালায়, b=0 ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ $=6a^2+11ac+3c^2$

$$=(3a+c)(2a+3c)$$
 ... (2)

প্রদেন্ত রাশিমালায়, c=0় ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ $=6a^2+7ab+2b^2$

$$=(3a+2b)(2a+b)$$
 ... (3)

এখন, (1), (2), (3) দারা স্থাচিত ফলগুলি হইতে স্পষ্টই দেখা যায় সে, প্রাদ্ধ নাশিমালা = (3a+2b+c)(2a+b+3c); [কারণ, এই গুণনীয়ক তুইটিতে, (i) a=0 বসাইলে (1) দারা স্থাচিত গুণনীয়কদ্বয়, (ii) b=0 বসাইলে (2) দারা স্থাচিত গুণনীয়কদ্বয় এবং (iii) c=0 বসাইলে (3) দারা স্থাচিত গুণনীয়কদ্বয় পাওয়া যায়।]

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method): প্রদত্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন অক্ষরের, ধর a এর, শক্তির অধ্যক্রম অমুসারে সাজাইলে,

প্রদত্ত রাশিমালা =
$$6a^2 + (7b + 11c)a + (2b^2 + 7bc + 3c^2)$$

= $6a^2 + (7b + 11c)a + (2b + c)(b + 3c)$.

এখন, (2b+c)(b+3c) এবং $(a^2$ এর সহগ) 6 এর গুণফলকে এরূপ ছুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি a এর সহগ (অর্থাৎ, 7b+11c)এর সমান হয়। পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, 2(2b+c) এবং 3(b+3c) এই ছুইটিই নির্ণেয় উৎপাদক।

অতএব, প্রদত্ত রাশিশালা =
$$6a^2 + 2(2b+c)a + 3(b+3c)a + (2b+c)(b+3c)$$

= $2a\{3a + (2b+c)\} + (b+3c)\{3a + (2b+c)\}$
= $(3a+2b+c)(2a+b+3c)$.

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2yz - 4z^2$.

স্পষ্টতঃ ইহা x, y, z সমন্বিত একটি সমম্ত্র রাশিমালা।

ইহাতে x=0 ধরিলে, ইহার অবশিষ্টাংশ $=2y^2-2yz-4z^2=2(y^2-yz-2z^2)$ $=2(y+z)(y-2z)=(2y+2z)(y-2z) \hspace{1cm} ...\hspace{1cm} (1)$

আবার, প্রদত্ত রাশিমালাতে y=0 ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ

$$= x^{2} - 4z^{2} = (-x + 2z)(-x - 2z) \qquad ... \tag{2}$$

এবং প্রাদত্ত রাশিমালাতে
$$z=0$$
 ধরিলে, উহার অবশিষ্টাংশ $=x^2-3xy+2y^2=(-x+2y)(-x+y)$ \cdots (3)

এখন, (1), (2), (3) দারা স্থচিত ফলগুলি হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে,

প্রদন্ত রাশিমালা =
$$(-x + 2y + 2z)(-x + y - 2z)$$

= $(x - 2y - 2z)(x - y + 2z)$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ প্রদন্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন একটি অক্ষরের (ধর x এর), শক্তির অধ্যক্রম অমুসারে সাজাইলে,

• প্রদান বাল
$$=x^2-3yx+(2y^2-2yz-4z^2)$$

 $=x^2-3yx+2(y+z)(y-2z).$

এখন, x^2 এর সহগ (অর্থাৎ 1) এবং x-বর্জ্জিত পদ (term independent of x) [অর্থাৎ, 2(y+z)(y-2z)] এর গুণফলকে এরূপ তুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি x এর সহগ (অর্থাৎ, -3y) এর সমান হয়। পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, -2(y+z) এবং -(y-2z)ই নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয়।

অতএব, প্ৰদন্ত বাশিমালা =
$$x^2 - 2(y+z)x - (y-2z)x + 2(y+z)(y-2z)$$

= $x\{x-2(y+z)\} - (y-2z)\{x-2(y+z)\}$
= $(x-2y-2z)(x-y+2z)$.

146. স্থই বা ভদেধিক অক্ষরবিশিষ্ট দ্বি-মাত্র (of the second degree) রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় : °

উদা.। উৎপাদকে বিশ্লেষণ করঃ $6a^2 + 7ab + 2b^2 + 11a + 7b + 3$.

প্রদন্ত রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত যে কোন অক্ষরের, ধর a এর, শক্তির অধ্যক্রম অমুসারে সাজাইলে.

প্রদত্ত রাশিমালা =
$$6a^2 + (7b + 11)a + (2b^2 + 7b + 3)$$

• = $6a^2 + (7b + 11)a + (2b + 1)(b + 3)$.

এখন, a^2 এর সহগ (অর্থাৎ 6) এবং a-বিৰ্দ্ধিত অংশ [অর্থাৎ (2b+1)(b+3)] ্রির গুণফলকে এরূপ তুই উৎপাদকৈ বিশ্লেষণ কর, যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি a এর সহগ [অর্থাৎ 7b+11] এর সমান হয় । এই উৎপাদকদ্বয় স্পষ্টতঃই 2(2b+1) এবং 3(b+9)].

অতএব প্রদন্ত রাশিমালা =
$$6a^2 + 2(2b+1)a + 3(b+3)a + (2b+1)(b+3)$$

= $2a\{3a + (2b+1)\} + (b+3)\{3a + (2b+1)\}$
= $(3a+2b+1)(2a+b+3)$.

147. যথোচিত পদ-বিস্তাস (arrangements of terms) ও সঞ্জ্যবন্ধ-কন্ত্রপ (grouping) দ্বান্তা গুণনীয়ক নির্পন্থ কোন কোন হলে, রাশিমালার পদগুলিকে কোন এক নির্দিষ্টরূপে সাজাইলেই উহার গুণনীয়ক-গুলি স্বস্পষ্ট হইয়া পড়ে; কিন্তু অনেক হলে আবার এরপ হয় না। কাজেই, বর্ত্তমান নিয়মের অন্তর্ভূক্ত বিশ্লেষণ-প্রক্রিয়ার জন্ম কোন নির্দিষ্ট প্রণালী দেওয়া যায় না। স্বতরাং, নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দ্বারা কতকগুলি পরস্পর-বিচ্ছিন্ন বিশ্লেষণ-প্রণালীর প্রতি ছাত্রদিগের দৃষ্টি আকৃষ্ট করা যাইতেছে; ইহা দ্বারা তাহাদের আলোচ্য বিষয়ের সম্যক্ ধারণা হইবে।

উদা. 1. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $(3x^2-4b^2)a+(3a^2-4x^2)b$. প্রদন্ত রাশিমালা $=3x^2a-4t^2a+3a^2b-4x^2b$ $=(3x^2a+3a^2b)-(4b^2a+4x^2b)$ [১ম ও ৩য় পদন্তয়, এবং ২য় ও ৪র্থ পদন্তয়, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া] $=3a(x^2+ab)-4b(ab+x^2)$ $=(x^2+ab)(3a-4b)$.

উদা. 2. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^4 + x^2y^2 - y^2z^2 - z^4$.

প্রথম ও চতুর্থ পদদ্বয়, এবং দিতীয় ও তৃতীয় পদদ্বয়, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া,

প্রাশিমালা =
$$(x^4 - z^4) + (x^2y^2 - y^2z^2)$$

= $(x^2 + z^2)(x^2 - z^2) + y^2(x^2 - z^2)$
= $(x^2 - z^2)\{(x^2 + z^2) + y^2\}$
= $(x + z)(x - z)(x^2 + y^2 + z^2)$.

উদা. 3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর : $x^3 + 7x^2 - 21x - 27$.

প্রাণি মালা =
$$(x^3 - 27) + (7x^2 - 21x)$$

= $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 7x(x - 3)$
= $(x - 3)\{(x^2 + 3x + 9) + 7x\}$
= $(x - 3)(x^2 + 10x + 9)$
= $(x - 3)(x + 9)(x + 1)$.

উদা. 4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $4a^2 + 12ab + 9b^2 - 8a - 12b$.
প্রদান রাশিমালা = $(4a^2 + 12ab + 9b^2) - (8a + 12b)$ $= (2a + 3b)^2 - 4(2a + 3b) = (2a + 3b)\{(2a + 3b) - 4\}$ = (2a + 3b)(2a + 3b - 4).

1. 5. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $2a^2 - 2bc + 6b^2 + ac - 7ab$.

এম্বলে দেখা যাইতেছে যে, প্রথম, তৃতীয় এবং পঞ্চম, এই পদ তিনটি a ও b অক্ষরন্বয়ে ছই মাত্রাবিশিষ্ট, এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থ পদ ছুইটি ঐ অক্ষরন্বয়ে এক মাত্রাবিশিষ্ট। কাজেই, প্রথমোক্ত পদ তিনটিকে একত্র, এবং শেষোক্ত পদ হুইটিকে একত্র, সঙ্ঘবদ্ধ করিয়া, প্রদত্ত রাশিমালা = $(2a^2 - 7ab + 6b^2) + c(a - 2b)$

$$= (a - 2b)(2a - 3b) + c(a - 2b)$$

$$= (a - 2b)\{(2a - 3b) + c\}$$

$$= (a - 2b)((2a - 3b) + c)$$

উদা. 6. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z$.

প্ৰদিভ রাশিশালা =
$$(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) + (x + y - z)$$

= $\{x^2 - (y - z)^2\} + (x + y - z)$
= $(x + y - z)(x - y + z) + (x + y - z)$
= $(x + y - z)\{(x - y + z) + 1\}$
= $(x + y - z)(x - y + z + 1)$.

উদা. 7. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর:

$$a^2x^3 + a^5 - 2abx^3 + b^2x^3 + a^3b^2 - 2a^4b$$
.

এক্ষেত্রে দেখা যায় যে, প্রথম, তৃতীয় ও চতুর্থ পদ তিনটিতে x^3 উৎপাদকটি সাধারণ (common) এবং অবশিষ্ট পদগুলিতে a^3 উৎপাদকটি সাধারণ।

কাজেই, প্রথমোক্ত পদ তিনটিকে একত্র, এবং অবশিষ্ট পদগুলিকে একত্র, সভ্যবদ্ধ করিয়া, প্রদত্ত রাশিমালা = $(a^2x^3 - 2abx^3 + b^2x^3) + (a^5 + a^3b^2 - 2a^4b)$ $=x^{3}(a^{2}-2ab+b^{2})+a^{3}(a^{2}+b^{2}-2ab)$

$$= (a^2 - 2ab + b^2)(x^3 + a^3)$$

= $(a - b)^2(x + a)(x^2 - xa + a^2)$.

প্রেমালা 79

खनेनीयरक विरक्षयन कराः

1.
$$x^3 + x^2 + x + 1$$
. 2. $x^3 + x^2 - x - 1$.

3.
$$x^3 - x^2 - x + 1$$
.

5.
$$x^4 - ab^3 + xb^3 - x^3a$$
.

$$7 \quad x^2 + xy - yz - z^2.$$

9.
$$(2x^2+3b^2)a-(2a^2+3x^2)$$
6. 10. $a(a+c)-b(b+c)$.

11.
$$4a^2 + 8ac - 12bc - 9b^2$$

2.
$$x^3 + x^2 - x - 1$$

4.
$$bc(a^2+1)+a(b^2+c^2)$$
.

5.
$$x^4 - ab^3 + xb^3 - x^3a$$
. 6. $ab(x^2 + y^2) + xy(a^2 + b^2)$.

$$xb - ac - xc + ab$$
.

11.
$$4a^2 + 8ac - 12bc - 9b^2$$
 12. $a^2x^2 + acxz - b^2y^2 - bcyz$.

13.
$$x^4 - y^3z + y^2x^2 - y^2z^2$$
.
14. $16x^2 - 15ab + 12bx - 25a^2$.
15. $a^2(a+2b) + b^2(2a+b)$.
17. $a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4$.
18. $x^3(x-2y) + y^3(2x-y)$.
19. $a^3 + 5a^2 + 10a + 8$.
20. $x^3 - 17x^2 + 85x - 125$.
21. $8a^3 + 18a^2b - 27ab^2 - 27b^3$.
22. $x^2 - 2xy + y^2 - x + y$.
23. $4a^2 - 4ab + b^2 - 6a + 3b$.
24. $x^4 - 2ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x + a^4$.
25. $a^4 - 3a^3b + 4a^2b^2 - 6ab^3 + 4b^4$.
26. $a^2 + 3ab + 2b^2 + ac + 2bc$.
27. $x^2 - 4xy + 3y^2 + xz - 3yz$.
28. $m^2 + 2pm - 5mn - 4pn + 6n^2$.
29. $a^2 - 10ab - 15bc + 21b^2 + 5ac$.
30. $2x^2 + 4a(4b - 3a) + x(4b + 5a)$.
31. $a^2 - 3a(2b - 1) + 4b(2b - 3)$.
32. $3x(x + 2) - 2y(4x - 1) - 3y^2$.
33. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + a - b - c$.
34. $\sqrt{x^2 - 4y^2 - 9z^2 + 12yz + 4x - 8y + 12z}$.
35. $9x^2 - 4z^2 - 24xy + 16y^2 + 20y - 15x + 10z$.
36. $2a^2x^4 - 5a^4x^2 + 3a^6 - 2b^2x^4 + 5a^2b^2x^2 - 3a^4b^2$.
37. $2x^3 + (2a - 3b)x^2 - (2b + 3ab)x + 3b^2$.
38. $(a^2 + b^2)x^2 - a^2b(2a + b) + a(2bx^2 - a^3)$.
39. $2a^4 - 5a^3 + 6a^2 - 5a + 2$. 40. $a^5 - 4a^4 - 13a^3 + 13a^2 + 4a - 1$.
41. $2x^2 + 6xy + 4y^2 + 5xz + 6yz + 2z^2$.
42. $2x^2 + xy - 3y^2 - xz - 4yz - z^2$. 43. $a^8 - 5a^6 - 12a^4 - 5a^2 + 1$.
44. $4x^2 - 4xy - 3y^2 + 12yz - 9z^2$.
45. $x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5$.

148. বিবিধ উদাহরণমালা :

উদা. 1. $a^3 + 7ab^2 - 22b^3$ এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

প্রদন্ত রাশিমালার পদসমূহকে নিম্নলিথিত তুই প্রকারের যে কোন এক প্রকারে, তুইভাগে ভাগ করিলে দেখা যায় যে, প্রত্যেকটি ভাগই a+2b দ্বারা বিভাজ্য।

(i)
$$(a^3-8b^3)+7b^2(a-2b)$$
; (ii) $a(a^2-4b^2)+11b^2(a-2t)$. প্রথমোক্তরূপে বিভাগ করিয়া,

$$a^{3} + 7ab^{2} - 22b^{3} = (a^{3} - 8b^{3}) + 7b^{2}(a - 2b)$$

$$= (a - 2b)\{(a^{2} + 2ab + 4b^{2}) + 7b^{2}\}$$

$$= (a - 2b)(a^{2} + 2ab + 11b^{2}).$$

উদ্পা. 2. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $x^2 + 2(a^2 + b^2) + 3ax - b(3x + 5a)$. x এর অধঃক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাইলে.

প্রাশিমালা =
$$x^2 + 3(a - b)x + (2a^2 - 5ab + 2b^2)$$

= $x^2 + 3(a - b)x + (2a - b)(a - 2b)$
= $x^2 + \{(2a - b) + (a - 2b)\}x + (2a - b)(a - 2b)$
= $x\{x + (2a - b)\} + (a - 2b)\{x + (2a - b)\}$
= $\{x + (2a - b)\}\{x + (a - 2b)\}$
= $\{x + (2a - b)\}(x + (a - 2b)\}$

উদা. 3. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $x^2 - 6xy + 8y^2 - z^2 + 2yz$.

প্রাদত্ত রাশিমালা =
$$(x^2 - 6xy + 9y^2) - (y^2 + z^2 - 2yz)$$

= $(x - 3y)^2 - (y - z)^2$
= $\{(x - 3y) + (y - z)\}\{(x - 3y) - (y - z)\}$
= $(x - 2y - z)(x - 4y + z)$.

উদা. 4. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$.

প্রাণিমালা =
$$a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 + b^2y^2 + 4abxy$$

= $(a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy) - (a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy)$
= $(ax + by)^2 - (ay - bx)^2$
= $\{(ax + by) + (ay - bx)\}\{(ax + by) - (ay - bx)\}$
= $\{(a - b)x + (a + b)y\}\{(a + b)x - (a - b)y\}$.

উদা. 5. ্গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 15x + 6$.

প্রাণিমালা =
$$(x^4 + 6x^3 + 9x^2) - (5x^2 + 15x) + 6$$

= $(x^2 + 3x)^2 - 5(x^2 + 3x) + 6$
= $\{(x^2 + 3x) - 2\}\{(x^2 + 3x) - 3\}$
= $(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x - 3)$.

উদা. 6. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর: $x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$.

প্রালিমালা =
$$(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^2y^2 + (2x^3y + 2xy^3)$$

= $(x^2 + y^2)^2 + (xy)^2 + 2(xy)(x^2 + y^2)$
= $\{(x^2 + y^2) + xy\}^2 = (x^2 + xy + y^2)^2$.

উপা. 7. গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর:
$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$$
. এখন, $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}$ $=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$.

কাজেই, $x^2 + 2x$ এর পরিবর্ত্তে z বসাইলে.

প্রাণিমালা =
$$(z-3)(z-8)+4$$

= $z^2-11z+28=(z-4)(z-7)$
= $(x^2+2x-4)(x^2+2x-7)$.

. **টীকা।** বিশেষরূপে লক্ষ্য করিবে যে, উপরিপ্রদর্শিত দ্বিপদরাশি (binomial)-শুলির শুণনকালে, x+3 কে x-1 এর সহিত এবং x+4 কে x-2 এর সহিত শুণ করা হইয়াছে।

উপা. 8. x+y=a এবং $xy=b^2$ হইলে,

(i)
$$x^4 + y^4$$
 এবং (ii) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ এর মান $a \otimes b$ তে প্রকাশ কর। (i) $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = \{(x+y)^2 - 2xy\}^2 - 2x^2y^2$, কাজেই, নির্ণের মান $= (a^2 - 2b^2)^2 - 2b^4 = a^4 - 4a^2b^2 + 2b^4$. (ii) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = x^2(x-y) - y^2(x-y)$

(ii)
$$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = x^2(x - y) - y^2(x - y)$$

 $= (x - y)(x^2 - y^2)$
 $= (x - y)^2(x + y)$
 $= \{(x + y)^2 - 4xy\}(x + y)$
 $= (a^2 - 4b^2)a$.

উপা. 9.
$$x^2+2=2x$$
 ইইলে, $x^4-x^3+x^2+2$ এর মান নির্ণয় কর। $x^4-x^3+x^2+2=(x^4+x^3+x^2)-2(x^3-1)$ $=x^2(x^2+x+1)-2(x-1)(x^2+x+1)$ $=(x^2+x+1)\{x^2-2(x-1)\}$ $=(x^2+x+1)(x^2-2x+2)$.

অতএব, নির্ণেয় মান = $(x^2 + x + 1) \times 0 = 0$.

छन।. 10. a+b=c इरेल,

 $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ এর মান নির্ণয় কর r প্রাদেশ্য নামালা = $-(2b^2c^2+2z^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)$ = $-(a\bar+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b+c-a)$ এবং =0, কারণ a+b=c.

প্রশালা 80

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর:

1.
$$x^3 + 8x^2 + 19x + 12$$
.

$$A = 3 x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

5.
$$x^3 - 4x^2 + x + 2$$
.

$$7 x^3 - 6x^2 + 13x - 10.$$

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10$$

$$x^{2} - 6x^{2} + 13x - 10$$
.

9.
$$x - 3x - x + 13x - 10$$
.

*11.
$$x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 30x + 36$$
.

13. $x^3 - 7x^2 + 13x - 15$.

15.
$$x^3 - 6x^2 + 32$$
.

17.
$$x^3 - 9xy^2 - 10y^3$$
.

19.
$$5a^3 - 3a^2b - 28b^3$$
.

21.
$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$$
.

23.
$$2a^3 - a^2b - b^3$$
.

$$x^3 - 6xy^2 + 9y^3$$
.

2.
$$x^3 + 9x^2 + 26x + 24$$
.

4.
$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$

$$6 x^3 + 5x^2 - 2x - 6.$$

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10$$
. 8. $x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 12x + 20$.
 $x^4 - 3x^3 - x^2 + 13x - 10$. 10. $x^4 - 5x^4 + x^2 + 13x + 6$.

10.
$$x^4 - 5x^4 + x^2 + 13x + 6$$
.

6. 12.
$$x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 26x - 56$$
.
14. $x^3 - 5x + 12$.

16.
$$2x^3 - 3x^2 - 4$$
.

18.
$$a^3 + 4a^2b - 9b^3$$
.

**
$$\mathbf{20}$$
. $8x^3 + 4x - 3$.

$$x^2 - 3x - 2$$

24.
$$3x^3 + 8x^2 - 8x - 3$$
.

26.
$$x^2 + bx - (a^2 - 3ab + 2b^2)$$
.

27.
$$x^4 + 4abx^2y^2 - (a^2 - b^2)^2y^4$$
.
28. $a^4 + 2(x^2 + y^2)a^2b^2 + (x^2 - y^2)^2b^4$.

29.
$$a^2 + (x+y)a - 2x^2 + 5xy - 2y^2$$
.

30.
$$x(x+a) - 2a^2 + 3b(a+x) + 2b^2$$
.

31.
$$x^2 + 4xy + 3y^2 + 2yz - z^2$$
. 32. $4a^2 - 4ab - 3b^2 + 12bc - 9c^2$.

31.
$$x^2 + 4xy + 3y^2 + 2yz - z^2$$
.

33.
$$x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$$
. 34. $a^2 - 4a^3b - 5a^2b^2 + 6ab^3 - b^4$.

35.
$$4x^{\frac{4}{5}} - 20x^3 + 24x^2 + 6x - 9$$
, **36.** $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

37.
$$a^4 - 9a^2 + 30a - 25$$
. 38. $a^2 - 2abx - (ac - b^2)x^2 + bcx^3$.

$$a - ga + 30a - 25$$
.

39.
$$x^4y^4 + x^2y^2 - z^2 + 2xyz + 1$$
. 40. $x^2(y^2 - z^2) + 4xyz - y^2 + z^2$.

41.
$$(a^2 - b^2)(x^2 + y^2) + 2(a^2 + b^2)xy$$
.

42.
$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x + 4$$
. 43. $a^4 - 6a^3 + 15a^2 - 18a + 5$.

44.
$$4x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 2 + x + 12$$
.

45.
$$x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 - 5xy^3 + y^4$$
.
46. $x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 20x + 16$.

47.
$$a^4 - 7a^3b + 14a^2b^2 - 14ab^3 + 4b^4$$
.

48.
$$x^4 + 4x^8 - 11x^2 + 20x + 25$$
.

49.
$$a^4 + 4a^3b - 10a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
.

50.
$$x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x - 20$$
.

51.
$$(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+13$$
.

52.
$$(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 360$$
.

53.
$$x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$$
.

54.
$$x = a(b-c), y = b(c-a), z = c(a-b)$$
 হইলে,
 $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) + 3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।

55.
$$x=a^2-b^2,\ y=b^2-c^2,\ z=a^2-c^2$$
 হইলে,
$$(y-z)(y^{5}-z^2)-x\{(y-z)^2+x(y+z)\}+x^3$$
 এর মান নির্ণয় কর।

56.
$$x+y=4$$
 হইলে, $x^2-2(y-2)x-3y^2+20y-32$ এর মান নির্ণয় কর।

57.
$$x+y=25$$
 এবং $x-y=6$ হইলে, $x^2-y^2+4x+14y-45$ এর মান নির্ণয় কর।

58. $x+y=\sqrt{3}$ এবং $x-y=\sqrt{2}$ হইলে, $8xy(x^2+y^2)$ এর মান নির্ণস কর।

II. অভেদাবলী (Identities)

149. পূর্ববর্ণিত হত্ত ও নিয়মাবলীর সাহায্যে, ত্রয়োদশ অধ্যায়ে প্রদন্ত অভেদাবলী হইতে অপেক্ষাকৃত জটিলতর অথচ অত্যাবশ্রকীয়, অভেদাবলীর বিষয় স্মালোচনা করা যাইতেছে।

অভেদের সত্যতা প্রতিপন্ন করিতে হইলে, নিম্নলিখিত সাধারণ নিয়ম কয়েকটি সর্বাদা মনে রাখা কর্ত্তব্য:

- (i) কোন অভেদে, যে পক্ষ অপেক্ষাকৃত জটিল, সেই পক্ষকে সরল ঝরিয়া অপর পক্ষের ভুল্য করিতে হয়।
- (ii) কোন অভেদে, উভয় পক্ষই জটিল হইলে, উভয় পক্ষকেই উহাদের লখিষ্ঠ আকারে পরিবভিত করিয়া উহাদের সমতা প্রতিপন্ন করিতে হয়।
- (iii) কোন কোন ক্ষেত্রে, অভেদস্থিত কোন পদের পক্ষাস্তরকরণ, বা উভয় পক্ষেই কতক পদ-সংযোগ, দ্বারা অভেদের সমতা প্রতিপন্ন করিতে হয়।
- (iv) কোন কোন ক্ষেত্রে, অভেদের অন্তর্গত কতকগুলি পদের পরিবর্ত্তে একটি অক্ষর বসাইয়া অভেদের সমতা অতি সহজেই প্রতিপন্ন হইয়া থাকে।

নিম্নলিথিত উদাহরণগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া পদ্ধতি দেখান যাইতেছে:

উপা. 1. প্রমাণ কর:
$$-(x-a)(x-b)(a-b) + (x-b)(x-c)(b-c) + (x-c)(x-a)(c-a) = -(b-c)(c-a)(a-b).$$

x-a এর পরিবর্ত্তে $p,\ x-b$ এর পরিবর্ত্তে $q,\$ এবং x-c এর পরিবর্ত্তে r বসাইলে, $q-p=a-b,\ r-q=b-c,\ p-r=c-a.$

ে বাম পক্ষ =
$$pq(q-p) + qr(r-q) + rp(p-r)$$

= $-(q-p)(r-q)(p-r)$
= $-(a-b)(b-c)(c-a)$.

[q-p, r-q, p-r এর মান বসাইয়া]

উদা. 2. প্রমাণ কর:
$$(y+z)^2(2x+y+z)+(z+x)^2(x+2y+z)$$

 $+(x+y)^2(x+y+2z)+2(y+z)(z+x)(x+y)$
 $=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$

 $^*y+z$ এর পরিবর্ত্তে a, z+x এর পরিবর্ত্তে b এবং x+y এর পরিবর্ত্তে c বসাইলে, b+c=2x+y+z, c+a=x+2y+z, a+b=x+y+2z.

. . বাম পক্ষ =
$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc$$

= $(b+c)(c+a)(a+b)$
= $(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$,

উদা. 3. প্রমাণ কর: $x^3 + 6(y+z)x^2 + 12(y+z)^2x + 8(y+z)^3$ • = $4(3x+2y+6z)y^2 + (x+6y+2z)(x+2z)^2$. [মাড়াজ, 1881.]

ে বাম পক্ষ =
$$x^3 + 3x^2 \cdot \{2(y+z)\} + 3 \cdot x \cdot \{2(y+z)\}^2 + \{2(y+z)\}^3$$

= $[x+2(y+z)]^3 = (x+2y+2z)^3 = \{2y+(x+2z)\}^3$
= $(2y)^3 + 3(2y)^2(x+2z) + 3(2y)(x+2z)^2 + (x+2z)^3$
= $8y^3 + 12y^2(x+2z) + 6y(x+2z)^2 + (x+2z)^3$
= $4y^2\{2y+3(x+2z)\} + \{6y+(x+2z)\}(x+2z)^2$
= $4(3x+2y+6z)y^2 + (x+6y+2z)(x+2z)^2$.

উদা. 4. প্রমাণ কর $x^3 + y^3 + z^3 + 24xyz = (x + y + z)^3 - 3\{x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2\}$.

পক্ষান্তরকরণ দ্বারা দেখা যায় যে, ইহা নিম্নিলিখিত অভেদের সমতুল্য :

$$3\{x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2\} + 24xyz$$

$$= (x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 \dots$$
 (1)

াহত XXII. XIV এবং XXIII, নিয়ম 133]

উদা. 6. প্রমাণ কর:

= -x(b-c)(c-a)(a-b).

$$\begin{split} (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) - (x+yz)(y+zx)(z+xy) \\ &= (1+xyz)(1-x^2-y^2-z^2-2xyz). \\ \forall \mathbf{w} = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) - \frac{(xyz+x^2)}{x} \cdot \frac{(xyz+y^2)}{y} \cdot \frac{(xyz+z^2)}{z} \\ &= \{1-(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-x^2y^2z^2\} - \frac{1}{xyz}\{(xyz)^3+(xyz)^2(x^2+y^2+z^2)+(xyz)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)+x^2y^2z^2\} \end{split}$$

$$= (1 - x^2 - y^2 - z^2) + (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) - x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 - xyz(x^2 + y^2 + z^2) - (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) - xyz$$

$$= (1 - x^2 - y^2 - z^2) - xyz - xyz(x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2 y^2 z^2$$

$$= 1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz + xyz - xyz(x^2 + y^2 + z^2) - 2x^2 y^2 z^2$$

$$= (1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz) + xyz(1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz)$$

$$= (1 + xyz)(1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz).$$

150. স্নাতশিক্ষ ভাতভাদ (Conditional Identities) ঃ এখন আমরা কতকগুলি আবশ্যকীয় সাপেক্ষ অভেদ প্রতিপন্ন করিয়া, উহা হইতে আরও কতকগুলি অভেদের সত্যত্যা সাব্যস্ত করিব।

$$151$$
 $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর থৈ,

• (1)
$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(bc + ca + ab)$$
.

এখন, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$.

$$0^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab).$$

... পক্ষাস্থার করিয়া, $a^2 + b^2 + c^2 = -2(bc + ca + ab)$.

(2)
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$
.

এখন,
$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

= $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) = 0$,
= $0 \times (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) = 0$.

পক্ষাস্তর করিয়া, $a^3+b^3+c^3=3abc$. [99 নিয়মের উদা. 10 দেখ ।]

(3)
$$(bc+ca+ab)^2 = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$$
.

এখন,
$$(bc+ca+ab)^2 = b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$$

 $=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc\times 0$
 $=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$.

আবার, উপরিপ্রদর্শিত (1) হইতে,
$$bc+ca+ab=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$
, $(bc+ca+ab)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$.

কাজেই,
$$(bc+ca+ab)^2 = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$$
.

(4)
$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$$

= $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$.

এখন,
$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

$$= (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

$$= 0 \times (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c), \qquad [নিয়ম 142]$$

$$= 0.$$

কাজেই, পক্ষান্তর করিয়া,

(5)
$$a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(bc + ca + ab)$$

= $\frac{5}{2}abc(a^2 + b^2 + c^2)$
= $\frac{5}{6}(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)$.

যেহেতৃ, a+b+c=0, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া a+b=-c

 $(a+b)^5 = (-c)^5$

অথবা, $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = -c^5$. [নিয়ম 127]

পক্ষান্তর করিয়া, $a^5 + b^5 + c^5$

$$= -5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4$$

$$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$$

$$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2),$$
 [গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া] $=-5ab(-c)\{(a+b)^2-ab\},$ ['.' $a+b=-c$]

$$=5abc\{(a+b)(-c)-ab\}=5abc(-ac-bc-ab)$$

=
$$-5abc(bc+ca+ab) = \frac{5abc}{2}(a^2+b^2+c^2)$$
 [(1) दोत्र]

$$=\frac{5}{8}(a^2+b^2+c^2).3abc$$

=
$$\frac{5}{6}(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)$$
, [ACT $(a^3+b^3+c^3=3abc)$]

 $\sqrt[4]{a^7+b^7+c^7}=7abc(bc+ca+ab)^2$

$$= \frac{7}{12}(a^2 + b^2 + c^2)^2(a^3 \div b^3 + c^3). \quad \neg$$

বেহেতু, a+b+c=0, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া a+b=-c.

$$(a+b)^7 = (-c)^7$$

 $993, \quad a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^8b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$ $r = -c^7$ [নিয়ম 127]

পক্ষান্তর করিয়া,
$$a^7+b^7+c^7$$

$$= -7a^6b - 21a^5b^2 - 35a^4b^3 - 35a^3b^4 - 21a^2b^5 - 7ab^6$$

$$= -7ab(a^5 + 3a^4b + 5a^3b^2 + 5a^2b^3 + 3ab^4 + b^5).$$

$$= -7ab(a+b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) [বিল্লেমণ করিয়া]$$

$$= -7ab(ab)^2 - 2ab^2 -$$

সহজ বীজগণিত

উদা. 3. x+y+z=0 ইইলে, প্রেমাণ কর যে, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3=3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz$.

y+z 'x এর পরিবর্ত্তে $a,\ z+x-y$ এর পরিবর্ত্তে $b,\ x+y-z$ এর পরিবর্ত্তে c বসাইয়া, a+b+c=(y+z-x)+(z+x-y)+(x+y-z)=x+y+z=0.

কাজেই. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

... a, b, c এর মান বসাইয়া, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$ = 3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).

আবার, যেহেতু a+b+c=0, অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$a = -(b+c) = -\{(z+x-y) + (x+y-z)\} = -2x,$$

$$b = -(c+a) = -\{(x+y-z) + (y+z-x)\} = -2y,$$

$$c = -(a+b) = -\{(y+z-x) + (z+x-y)\} = -2z.$$

$$3abc = 3(-2x)(-2y)(-2z) = -24xyz$$
;

অতএব, 3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = -24xyz.

কাজেই, $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3$ = 3(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-24xyz.

উদা. 4. $\sqrt{x} = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$, $z = c^2 - ab$ হইলে, দেখাও যে,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$$
.

এখন,
$$x + y + z = a^2 - bc + b^2 - ca + c^2 - ab$$

= $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$:

$$= a^{2} + b^{2} + c^{2} - bc - ca - ab$$

$$y - z = (b^{2} - ca) - (c^{2} - ab)$$

$$= b^{2} - c^{2} + ab - ca$$

$$= (b-c)(b+c) + a(b-c)$$

$$=(b-c)\{(b+c)+a\}$$

$$= (b-c)(a+b+c).$$

তজ্ঞাপ, z-x=(c-a)(a+b+c), এবং x-y=(a-b)(a+b+c).

এখন, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)\{(b - c)^2(a + b + c)^2 + (c - a)^2(a + b + c)^2 + (a - b)^2(a + b + c)^2\}$$

$$= (a^{2} + b^{2} + c^{2} - bc - ca - ab)$$

$$\times \frac{1}{2} \{ (b - c)^{2} + (c - a)^{2} + (a - b)^{2} \} (a + b + c)^{2} \}$$

$$= (a + b + c)^{2} (a^{2} + b^{2} + c^{2} - bc - ca - ab)^{2}$$

$$= \{ (a + b + c)(a^{2} + b^{2} + c^{2} - bc - ca - ab) \}^{2}$$

$$= (a^{3} + b^{3} + c^{3} - 3abc)^{2}$$

উদা. 5. s=a+b+c ইইলো, প্রমাণ কর যে,

$$s(s-2b)(s-2c) + s(s-2c)(s-2a) + s(s-2a)(s-2b)$$

= $(s-2a)(s-2b)(s-2c) + 8abc$.

বাম পক্ষের তুই পদের সমষ্টি =
$$s(s-2c)\{(s-2b)+(s-2a)\}$$

= $s(s-2c)\{2s-2(a+b)\}$
= $s(s-2c)\times 2c$;

এবং তৃতীয় পদ =
$$(s-2c+2c)(s-2a)(s-2b)$$

= $(s-2c)(s-2a)(s-2b)+2c(s-2a)(s-2b)$,

কাজেই, বাম পক্ষ = $s(s-2c)2c + \{(s-2c)(s-2a)(s-2b) + 2c(s-2a)(s-2b)\}$ = $(s-2a)(s-2b)(s-2c) + 2c\{s(s-2c) + (s-2a)(s-2b)\}$.

িকন্ত,
$$s(s-2c) + (s-2a)(s-2b) = (s^2 - 2cs) + \{s^2 - 2s(a+b) + 4ab\}$$

= $2s^2 - 2s(a+b+c) + 4ab$
= $2s^2 - 2s.s + 4ab$
= $4ab$.

বাম পক্ষ = (s-2a)(s-2b)(s-2c)+8abc.

6.
$$s = a + b + c$$
 ইইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(s - a)(s - b)(s - c) = (a + b + c)(bc + ca + ab) - abc.$$
 বাম প্রু = $s^3 - (a + b + c)s^2 + (bc + ca + ab)s - abc$ = $s^3 - s.s^2 + (bc + ca + ab)(a + b + c) - abc$ = $(bc + ca + ab)(a + b + c) - abc$.

উপা. 7.
$$a+b+c+d=0$$
 হইলো, প্রমাণ কর যে,
$$(a+b)(a+c)(a+d)=(b+a)(b+d)(b+c)$$
$$=(c+d)(c+a)(c+b)$$
$$=(d+c)(d+b)(d+a).$$

বৈহৈছ,
$$a+b+c+d=0$$
,

অভএব, $a+b=-(c+d)$,
 $a+c=-(b+d)$,
 $a+d=-(b+c)$;

($a+b$)($a+c$)($a+d$) = $(a+b)$ { - $(b+d)$ }{ - $(b+d)$ }{ - $(b+c)$ }
= $(a+b)(b+d)(b+c)$.

এইরূপে, $(a+b)(a+c)(a+d)=$ { - $(c+d)$ }($a+c$){ - $(b+c)$ }
= $(c+d)(a+c)(b+c)$;
 $=(c+d)(a+c)(b+c)$;
এবং, $(a+b)(a+c)(a+d)=-(c+d)$ { - $(b+d)$ }($a+d$)
= $(c+d)(b+d)(a+d)$.

উজা. 8. প্রমাণ কর:
$$(y+z-x)^3 + (z+x-y)^3 + (x+y-z)^3 + 24xyz$$

= $(2x+y-z)^3 + (y+z)^3 - (x+y-z)^3 - 6x(x-2z)(x+y)$.

2x+y-z এর পরিবর্ত্তে $a,\ y+z$ এর পরিবর্ত্তে b এবং -(x+y-z) এর পরিবর্ত্তে c বসাইলে, a+b+c=x+y+z,

$$b+c=2z-x,$$

 $c+a=x,$
 $a+b=2(x+y);$

.. ডা'ন পক্ষ (right side)

6

$$= (2x + y - z)^{3} + (y + z)^{3} + \{-(x + y - z)\}^{3} + 3.x(2z - x).2(x + y)$$

$$= a^{3} + b^{3} + c^{3} + 3(c + a)(b + c)(a + b)$$

$$= (a + b + c)^{3}$$

$$= (x + y + z)^{3}$$

$$= \{(y + z - x) + (z + x - y) + (x + y - z)\}^{3},$$

$$[(3(2)), (y + z - x) + (z + x - y) + (x + y - z) = x + y + z]$$

$$= (y + z - x)^{3} + (z + x - y)^{3} + (x + y - z)^{3} + 3\{(z + x - y) + (x + y - z)\}\{(x + y - z) + (y + z - x)\}\{(y + z - x) + (z + x - y)\}$$

$$= (y + z - x)^{3} + (z + x - y)^{3} + (x + y - z)^{3} + 3.2x.2y.2z$$

$$= (y + z - x)^{3} + (z + x - y)^{3} + (x + y - z)^{3} + 24xyz.$$

প্রথমালা 81

হামাণ কর:

1.
$$a^2x + b^2y + c^2z = (x + y + z)(a^2 + b^2 + c^2)$$
,

 $\sqrt[3]{4}$ $x^2 - yz = a^2$, $y^2 - zx = b^2$ এবং $z^2 - xy = c^2$ হয় । $\sqrt[3]{4}$ $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$ এবং $z = c^2 - ab$ হয় । $\sqrt[3]{4}$ $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$ এবং $z = c^2 - ab$ হয় । $\sqrt[3]{4}$ $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$ এবং $z = c^2 - ab$ হয় । $\sqrt[3]{4}$ $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$ এবং $z = c^2 - ab$ হয় । $\sqrt[3]{4}$ $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$ এবং $z = c^2 - ab$ হয় । $\sqrt[3]{4}$ $x = a^2 - bc$, $y = b^2 - ca$ এবং $z = c^2 - ab$ হয় । $\sqrt[3]{4}$ $x = a^2 - bc$, $\sqrt[3]{4}$ $x = a^2 - bc$,

15.
$$(x+y)(x+z)(x^2-yz) = (x+y+z)(x-z)(x^2+y^2)$$
,
যদি $x=a^3+a^2$, $y=a^2+a$ এবং $z=a+1$ হয়। [মা: 1909.]

16.
$$(y+z-2x)(z+x-2y)+(z+x-2y)(x+y-2z)+(x+y-2z) \times (y+z-2x) = 3\{(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)(y-z)\}.$$

17.
$$(y-z)^4 + (z-x)^4 + (x-y)^4 = 2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$$
.

18.
$$(b-c)(b+c-2a)^3+(c-a)(c+a-2b)^3+(a-b)(a+b-2c)^3=0.$$

19.
$$x^3(y-z)^3 - y^3(z-x)^3 + z^3(x-y)^3 = 3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$$
.

20.
$$a^{6}(b^{2}-c^{2})^{3}+b^{6}(c^{2}-a^{2})^{3}+c^{6}(a^{2}-b^{2})^{3}$$

= $3a^{2}b^{2}c^{2}(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.

21.
$$(b+c)(b-c)^3 + (c+a)(c-a)^3 + (a+b)(a-b)^3$$

= $2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

22.
$$x(y-z)^3 + y(z-x)^3 + z(x-y)^3 = (y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z).$$

23.
$$4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2=27a^2b^2(a+b)^2$$
.

24.
$$2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$$
, $\sqrt[4]{6}$ $2s = a + b + c$ $\sqrt[4]{3}$

25.
$$(s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3 + 3abc = s^3$$
, $\sqrt[3]{6}$ $2s = a + b + c$ $\sqrt[3]{3}$

26.
$$\frac{(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3}{3} \cdot \frac{(b-c)^7 + (c-a)^7 + (a-b)^7}{7} = \left\{ \frac{(b-c)^5 + (c-a)^5 + (a-b)^5}{5} \right\}^2.$$

27.
$$(ax + by + cz)^2 + (bx + cy + az)^2 + (cx + ay + bz)^2 - \{(ba + cy + az)\}$$

× $(cx + ay + bz) + (cx + ay + bz)(ax + by + cz) + (ax + by + cz)(bx + cy + az)\}$
= $(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$.

28.
$$(ax + by + cz)^3 + (bx + cy + az)^3 + (cx + ay + bz)^3 - 3(ax + by + cz)(bx + cy + az)(cx + ay + bz) = (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz).$$

a+b+c=0 হইলে, প্রমাণ কর যে,

29.
$$ca - b^2 = ab - c^2 = bc - a^2 = bc + ca + ab = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

30.
$$b^2 + bc + c^2 = c^2 + ca + a^2 = a^2 + ab + b^2 = -(bc + ca + ab)$$
.

31.
$$a(c+a)(a+b) = b(a+b)(b+c) = c(a+c)(b+c) = abc$$
.

-32.
$$\int a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 = 3abc$$
.

33.
$$a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(d-b)^3 = 0$$
.

- 34. X = ax + by + cz, Y = bx + cy + az এবং Z = cx + ay + bz হইলে, প্রমাণ কর যে, $X^3 + Y^3 + Z^3 = 3XYZ$.
 - 35. $(2a+b+c)^3 + (a+2b+c)^3 + (a+b+2c)^3$ = 3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c).
 - **36.** প্রমাণ কর যে, $(3x + y + z)^3 + (x + 3y + z)^3 + (x + y + 3z)^3 3(3x + y + z)(x + 3y + z)(x + y + 3z) = 20(x^3 + y^3 + z^3 3xyz).$
 - 37. a+b+c=1 হইলে, প্রমাণ কর যে, (a+bc)(b+c)=(b+ca)(c+a)=(c+ab)(a+b)=(1-a)(1-b)(1-c). প্রমাণ কর যে,
 - 38. $(x+y)^2(y+z-x)(z+x-y) + (x-y)^2(x+y+z)(x+y-z)$ = $4xyz^2 + (y^2-z^2)(y^4+y^2z^2+z^4) + (z^2-x^2)(z^4+z^2x^2+x^4)$ $+(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$.
 - 39. 2x(y+z-x) + (z+x-y)(x+y-z) = 2y(z+x-y) + (x+y-z)(y+z-x) = 2z(x+y-z) + (y+z-x)(z+x-y) = (y+z-x)(z+x-y) + (z+x-y)(x+y-z) + (x+y-z)(y+z-x).
 - 40. $x^3 + y^3 + z^3 = a^3 3ab + 3c$, $\sqrt[4]{6}$ x + y + z = a, yz + zx + xy = b, xyz = c $\sqrt[4]{3}$ |
 - 41. $yz(y+x) + zx(z+x) + xy(x+y) + 3xyz = \frac{1}{2}(p^3 pq^2)$, $\sqrt[3]{6}x + y + z = p \text{ eqs. } x^2 + y^2 + z^2 = q^2 \text{ eqs.}$
 - 42. $x^7 + ^9y^7 + z^7 = 7qr^2$, যদি x + y = -z, xyz = q এবং yz + zx + xy = r হয়।
 - 43. $x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{2}q^4$, $\sqrt[4]{\pi} x^2 + y^2 + z^2 = q^2$, x + y = 13, z = -13 হয়।
 - **44.** (x+y+z)(yz+zx+xy)-(y+z)(z+x)(x+y)=120, $\sqrt[3]{9}$ $\sqrt{9}$ $\sqrt{9}$

ত্ৰয়োবিংশ অথ্যায়

ভাগশেষ সম্বন্ধীয় প্ৰতিজ্ঞা (Remainder Theorem)

বিভাজ্যতা (Divisibility)

152. ভাগ বিষয়ক আবশ্যকীয় প্ৰতিজ্ঞা (Important Theorem in Division) :

• প্রাক্তিজ্ঞা 1. $px^2 + qx + r$ কে x - a দারা ভাগ করিলে, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি (অর্থাৎ যে ভাগশেষটিতে x থাকিবে না সেইটি) $pa^2 + qa + r$ হইবে !

এখন,
$$x-a \frac{px^2+qx+r}{px^2-apx} (px+(ap+q))$$

$$(ap+q)x+r$$

$$(ap+q)x-a(ap+q)$$

$$a(ap+q)+r$$

. . x-বৰ্জ্জিত ভাগশেষ = $a(ap+q)+r=pa^2+qa+r$.

টীকা। লক্ষ্য করিবে যে, উপরোক্ত ভাগশেষ এবং প্রদন্ত ভাঙ্গ্য উভয় একই আকারের ; এবং, ভাঙ্গ্যে x এর পরিবর্ত্তে α বসাইলেই ভাগশেষ পাওয়া যায়।

প্রতিজ্ঞা 2. px^3+qx^2+rx+s কে x-a দারা ভাগ করিলে, যে ভাগশেষটিতে x থাকিবে না, সেইটি pa^3+qa^2+ra+s হইবে।

. :. x-বৰ্জ্জিত ভাগশোষ = $pa^3 + qa^2 + ra + s$.

টীকা। এক্ষেত্রেও দেখা যায় যে, ভাজ্যে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই x-বজ্জিত ভাগশেষ প'রেয়া যায়।

উদা. 1. $x^3 - 5x^2 + 6x + 9$ কে x - 2 দারা ভাগ করিয়া x-বর্জ্জিত ভাগশেষ নির্ণয় কর।

প্রতিজ্ঞা 2 অনুসারে, নির্ণেয় ভাগশেষ = $2^3 - 5.2^2 + 6.2 + 9$ = 8 - 20 + 12 + 9 = 9.

উদা. 2. $x^3 - 216$ কে x - 6 দারা ভাগ করিয়া x-বর্জ্জিত ভাগশেষ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় ভাগশেষ = $6^3 - 216 = 216 - 216 = 0$.

টীকা। ভাগ-প্রক্রিয়া ছারা উপরোক্ত ফলগুলি প্রত্যক্ষ করা কর্ত্তব্য।

153. মূলদ (Rational) ও ভাখণ্ড বা পূর্ণ রান্ধিমালা (Integral Expressions) :

 p, q, r, \cdots া, m প্রত্যেকেই ধ্রুবক (constant) এবং n একটি অথগু ধনরাশি (positive integer) হইলে, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ রাশিমালাকে x এর মূলদ ও **অথগু রাশিমালা** (rational and integral expression) বলে। যথা, $x^2-3x+13$, x^3+px+r , প্রভৃতি রাশিমালাসমূহের প্রত্যেকেই x এর মূলদ ও অথগু রাশিমালা।

্র এক্ষণে, উপরোক্ত মূলদ ও অথগু রাশিমালার সাহায্যে ভাগশেষ সম্বন্ধীয় সাধারণ প্রতিজ্ঞাটি (General Remainder Theorem) প্রতিপন্ধ করা যাইতেছে।

154. ভাগশেষ সম্বন্ধীয় প্ৰভিত্তা (Remainder Theorem):

x এর কোন খুলদ ও অথও রাশিমালাকে x-a দারা ভাগ করিলে, প্রদন্ত রাশিমালাতে x এই পরিবর্ত্তে a বসাইলেই x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি (the remainder independent of x) পাওয়া যায়।

ধর, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ কে x-a ছারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে Q ছারা এবং x-বর্জিত ভাগশেষটিকে R ছারা স্থাচিত করা হইল। তাঁহা হইলে,

যেহেতু, সকল ক্ষেত্ৰেই, ভাজা ≡(ভাজক) × (ভাগফল) + ভাগশেষ,

অতএব, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m\equiv (x-a).Q+R$, একটি

এখন, যেহেতু ভাগশেষ, R, এর ভিতর x নাই, অতএব, x এর পরিবর্ত্তে যে কোন মানই দেওয়া যাউক না কেন, R এর কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, উপরোক্ত অভেদটিতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলে,

$$pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots\cdots+la+m=(a-a).Q'+R,$$

$$[x=a$$
 হইলে Q এর মান Q' দারা ব্ঝান যাইতেছে g' 0' g' 1' g' 2' g' 3' g' 4' g' 4'

. . x-বৰ্জ্জিত ভাগশেষ, অৰ্থাৎ R, = $pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \cdots + la + m$.

কাজেই দেখা যায় যে, প্রদন্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলেই নির্নেয় x-বর্জ্জিত ভাগশেষ পাওয়া যায়।

অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

অনুসি.। কোন মূলদ ও অথও রাশিমালাকে x+a দারা ভাগ করিলে, x-বর্জিত ভাগশেষটি, প্রদত্ত রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে '-a' বসাইলেই পাওয়া যায়।

[যেহেতু, x+a=x-(-a), কাজেই, এই সিদ্ধান্তের সত্যতা ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা হইতে সহজেই প্রমাণিত হইতে পারে।] \cdot

উদা. 1. $x^2 - 5x + 9$ কে x + 2 দারা ভাগ করিয়া, x-বর্জ্জিত ভাগশেষটি নির্ণয় কর।

উপরোক্ত অন্নসিদ্ধান্ত হইতে,

নির্ণেয়, ভাগশেষ =
$$(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 9 = 4 + 10 + 9 = 23$$
.

উদা. 2. x^2+px+q কে x+a দারা ভাগ করিয়া, x-বর্জিত ভাগশেষ নির্ণয় কর।

উপরোক্ত অমুসিদ্ধান্ত অমুসারে,

নির্ণেয় ভাগশেষ =
$$(-a)^2 + p(-a) + q$$

= $a^2 - pa + q$.

টীকা। ভাগ-প্রক্রিয়া দারা এই ফলগুলি প্রতাক্ষ্ করা উচিত।

• উপা. 3. x=15 হইলে, $x^6-19x^5+69x^4-151x^3+229x^2+166x^4+26$ এর মান কত ?

ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা অনুসারে,

নিৰ্লেয় মান = প্ৰদত্ত বাশিমালাকে x-15 দাবা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগদেব;

এখন, প্রদত্ত রাশিমালা

$$= x^{6} - 15x^{5} - (4x^{5} - 60x^{4}) + (9x^{4} - 135x^{3}) - (16x^{3} - 240x^{2})$$
$$- (11x^{2} - 165x) + (x - 15) + 41$$
$$= x^{5}(x - 15) - 4x^{4}(x - 15) + 9x^{3}(x - 15) - 16x^{2}(x - 15)$$
$$- 11x(x - 15) + (x - 15) + 41.$$

অতএব, প্রাদম লাকে x-15 দারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 41 হইবে। . . . নির্ণেয় মান =41.

155. বিভাক্যতা (Divisibility) ও প্রশাস্ত্রক সম্বন্ধীয়া প্রতিজ্ঞা (Factor Theorem) ঃ যদি x-যুক্ত কোন মূলদ ও অথগু রাশিমালারে x এর পরিবর্ত্তে a বসাইলে রাশিমালার মান a0 (শূস্তু) হয়, তবে a0 রাশিমালা a0 ক খুণনীয়ক।

ধর, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots\cdots+lx+m$ প্রদন্ত রাশিমালা। ইহাকে x-a দারা ভাগ করিলে,

ভাগশেষ = ঐ রাশিমালায় x-এর পরিবর্ত্তে a বসাইয়া লব্ধমান ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা ?

$$= pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \dots + la + m.$$

' অতএব, যদি এই ভাগশেষ, অর্থাৎ $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m=0$, হয়, তবে, প্রদন্ত রাশিমালা x-a হারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজা।

আবার যেহেতু, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ,

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(x-a) \times Q + (pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \dots + la + m) [Q \equiv$$
ভাগফল] $=(x-a).Q$, যদি $pa^n + qa^{n-1} + ra^{n-2} + \dots + la + m = 0$ হয় :

কাজেই, $pa^n+qa^{n-1}+ra^{n-2}+\cdots+la+m=0$ হইলে, প্রদন্ত রাশিমালার, অর্থাৎ $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m$ এর, এক গুণনীয়ক x-a হইবে 1

. অকুসি.। $p(-a)^n+q(-a)^{n-1}+r(-a)^{n-2}+\cdots\cdots+la+m=0$ হবলৈ, $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\cdots+lx+m$ এর, এক গুলনীয়ক x+a হইবে।

[যেহেতু, x+a=x-(-a), কাজেই মূল প্রতিজ্ঞা হইতে অন্থসিদ্ধান্তের সত্যতা সহজেই অন্থমেয়।]

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $3x^3 - 2x^2 + x - 18$ রাশিমালা x - 2 দারা বিভাজ্য এবং x - 2 প্রদত্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক হইবে।

x=2 বসাইয়া রাশিমালার মান $=3.2^3-2.2^2+2-18=24-8+2-18=0$. অতএব, উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অমুসারে দেখা যায় যে, $3x^3-2x^2+x-18$ রাশিমালা x-2 দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এবং x-2 প্রদন্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক।

উদা. 2. দেখাও যে, $3x^3 - 2x^2y - 13xy^2 + 10y^3$ রাশিমালা x - 2y দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

প্রদত্ত রাশিমালাতে x=2y বসাইলে,

উহার মান =
$$3(2y)^3 - 2(2y)^2 \cdot y - 13(2y) \cdot y^2 + 10y^3$$

= $24y'^3 - 8y^3 - 26y^3 + 10y^3 = 0$.

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা x - 2y দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এবং x - 2y উহার এক গুণনীয়ক।

উদা. 3. কোন্ সর্ভ সিদ্ধ হইলে, $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + lx + m$ রাশিমালা x-1 দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ?

প্রদত্ত রাশিমালাতে x=1 বসাইলে,

উহার মান
$$=a.1^n+b.1^{n-1}+c.1^{n-2}+\cdots+l.1+m$$
 $=a+b+c+\cdots+l+m$ [কারণ, $1^n=1\times 1\times 1\times \cdots n$ -সংখ্যক উৎপাদক প্যান্ত $=1$; তদ্ধপ, $1^{n-1}=1^{n-2}=\cdots=1$.]

 $... \quad \overline{a+b+c+\cdots+l+m} = 0 \quad \overline{z},$

অর্থাৎ, যদি প্রদন্ত রাশিমালার সহগগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টির' মান 0 হয়, তাহা হইলে, প্রদন্ত রাশিমালা x-1 দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

উদা. 4. দেখাও যে, $x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ এর এক শুণনীয়ক x + 3 হইবে। x + 3 = x - (-3).

$$x = -3$$
 হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার মান = $(-3)^3 + 4 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 6$
= $-27 + 36 - 15 + 6 = 0$.

কাজেই, উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অমুসারে, প্রদন্ত রাশিমালা x+3 দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য এনে x+3 উহার এক গুণনীয়ক হইবে।

উদা. 5. p এর মান কত হইলে, x^3+3x^2+4x+p এর এক গুণনীয়ক x+6 হইবে ?

$$x+6=x-(-6)$$
.

$$x = -6$$
 হইলে, প্রদন্ত রাশিমালার মান $= (-6)^3 + 3 \cdot (-6)^2 + 4 \cdot (-6) + p$

$$= -216 + 108 - 24 + p$$

$$= p - 132.$$

উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অমুসারে দেখা যায় যে, p-132=0 'হইলে, প্রদত্ত রাশিমালার এক গুণনীয়ক x+6 হইবে ;

p এর নির্ণেয় মান = 132.

উদা. 6. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, x^2+3x+p এবং x^2+4x+q , এই হুই রাশিমাল্মরই এক গুণনীয়ক সাধারণ থাকিবে ?

ধর, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের এক গুণনীয়ক সাধারণ আছে, এবং উহা x-a.

এখন,
$$x=a$$
 হইলে, x^2+3x+p এর মান $=a^2+3a+p=0$; \cdots (1) [কারণ, $x-a$ এই রাশিমালার এক গুণনীয়ক]

জাবার, x=a হইলে, x^2+4x+q এর মান = $a^2+4a+q=0$; ... (2) [কারণ, x-a এই রাশিমালার এক গুণনীয়ক]

অতএব, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$(a^2+4a+q)-(a^2+3a+p)=0$$
 ; অথবা, $a+q-p=0$; অথবা, $a=p-q$. [পক্ষান্তর করিয়া]

a এর এই লব্ধ মান (1) তে বসাইলে,

$$(p-q)^2 + 3(p-q) + p = 0$$
;

অথবা,
$$p^2 - 2pq + q^2 + 3p - 3q + p = 0$$
;

. : নির্ণেয় সর্প্ত এই যে, $p^2 - 2pq + q^2 + 4p - 3q = 0$ হইবে।

, 156. বিভাজ্যতা বিষয়ক কতিপয় আবশ্যকীয় প্ৰতিজ্ঞা (Some important Theorems on Divisibility) :

দশম অধ্যায়ে, a^n+b^n এবং a^n-b^n এর a+b ও a-b দারা বিভাজ্যতা সম্পর্কীয় কয়েকটি বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্র সম্বন্ধে উল্লেখ করা হইয়াছে। এক্ষণে, সাধারণভাবে ঐ সম্পর্কে আলোচনা করা যাইতেছে।

প্রতিজ্ঞা 1. n যে কোন অথও ধনরাশিই হউক না কেন, a^n-b^n সকল সময়েই a-b দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

ধর, a^n-b^n কে a-b দারা ভাগ করিয়া ভাগফল Q এবং a-বর্জ্জিত ভাগদেষ R পাওয়া গেল। তাহা হইলে,

যেহেতু, ভাজ্য
$$\equiv$$
 (ভাজক) $imes$ (ভাগফল) $+$ (ভাগশেষ),
অতএব, $a^n-b^n\equiv Q\times (a-b)+R$, একটি অভেদ।

এখন, R এর মধ্যে a অক্ষরটি না থাকায়, a এর যে কোন মানই দেওয়া যাউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না।

মনে কর, উপরোক্ত অভেদটিতে, a এর পরিবর্ত্তে b বদান হইল।

তাহা হইলে, $b^n-b^n=Q'\times(b-b)+R$, [a=b হইলে, Q এর মান Q' দারা ব্যান যাইতেছে]

অথবা,
$$0 = Q' \times 0 + R$$
;
 $\therefore R = 0$.

স্থতরাং, ভাগশেষ 0 হওয়ায়, $a^n - b^n$ রাশিটি a - b দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখা যাইবে যে,

$$a^{n}-b^{n}=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

উদা. । a^2-b^2 , a^3-b^3 , a^4-b^4 , a^5-b^5 প্রভৃতির প্রত্যেকেই a-b দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ।

প্রতিজ্ঞা 2. n একটি যুগা ধনরাশি হইলে, a^n-b^n রাশিমালা $\omega+b$ দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু, n অযুগা হইলে, ঐরপ হইবে না ।

ধর, a^n-b^n কে a+b দারা ভাগ করিয়া, ভাগফল Qন্দারা এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ R দারা স্থাচিত করা হইল। তাহা হইলে অবশ্রুই,

$$a^n - b^n \equiv Q \times (a+b) + R$$
, একটি সভেদ।

এখন, R এর ভিতর a না থাকায়, a এর যে কোন মানই দেওয়া যাউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। মনে কর, উপরোক্ত অভেদে a এর পরিবর্ত্তে a বসান হইল। তাহা হইলে,

$$(-b)^n - b^n = Q' \times (-b+b) + R,$$
 $[a = -b]$ হইলে, Q এর মান Q' দারা ব্ঝান যাইতেছে]

$$=Q'\times 0+R=R_{i};$$

এখন, n যুগা হইলে, $(-b)^n - b^n = b^n - b^n = 0$; এবং n অযুগা হইলে, $(-b)^n - b^n = -b^n - b^n = -2b^n$;

n যুগ্ম হইলে, ভাগশেষ, অর্থাৎ $R_1 = 0$;

এবং n অযুগ্ম হইলে, R, অর্থাৎ ভাগশেষ, $=-2b^n$; কাজেই শূন্স নয়।

স্থতরাং, n যুগ্ম হইলে, a^n-b^n রাশিটি a+b দারা বিভাজ্য, কিন্তু n অযুগ্ম হইলে, তজ্ঞপ হইবে না ।

n যুগা হইলে, প্রকৃত ভাগ করিয়া দেখা যায় যে, $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1}).$

উদা.। $a^2-b^2, a^4-b^4, a^6-b^6$ প্রভৃতির প্রত্যেকেই a+b দারা বিভাজ্য ; কিন্তু, $a^3-b^3, a^5-b^5, a^7-b^7$ প্রভৃতির কোশটিই a+b দারা বিভাজ্য নয়।

প্রাতিজ্ঞা 3. n একটি জ্মযুগ্ম অথণ্ড ধনরাশি হইলে, $a^n + b^n$ রাশিমালা a + b দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু n যুগ্ম হইলে, এরূপ হইবে না ।

ধর, a^n+b^n কে a+b দারা ভাগ করিয়া ভাগফল Q দারা এবং a-বর্জ্জিত ভাগশেষ B দারা স্থচিত করা হইল। তাহা হুইলে, অবশ্যুই

$$a^n + b^n = (a + b) \times Q + R$$
, একটি অভেদ।

যেহেতু R এর ভিতর α নাই, অতএব উপরোক্ত অভেদে α এর পরিবর্ত্তে যে কোন মানই বসান যাউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, α এর পরিবর্ত্তে – b বসাইয়া

 * . $(-b)^n + b^n = Q' \times (-b+b) + R = Q' \times 0 + R = R$. [a এর পরিবর্জে -b বসাইয়া Q এর মান Q' দ্বারা স্থচিত করা হইতেছে I]

এখন, n অযুগ্রা অথগু ধনরাশি হইলে, $(-b)^n+b^n=-b^n+b^n=0$;

কিন্ত n যুগা হইলে, $(-b)^n + b^n = b^n + b^n = 2b^n$, (শুস নয়)।

কাজেই, n অযুগ্ম হইলে R এর মান শৃক্ত হইবে; n যুগ্ম হইলে, R শৃক্ত হইবে না । স্তানাং m অয়গ্য হইলে $a^n + b^n$ বাজিমালা a + b দাবা বিভাজা হইবে \cdot কিন্তু

স্থতরাং, n অর্থা হইলে, a^n+b^n রাশিমালা a+b দারা বিভাজ্য হইবে ; কিন্তু n য্থা হইলে, ঐরণ হইবে না। n

বস্ততঃ, n অযুগ্ম হইলে, প্রকৃত ভাগ দারা,

$$a^{n} + b^{n} = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^{2} - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

উদা. a^3+b^3 , a^5+b^5 , a^7+b^7 প্রভৃতির প্রত্যেকেই a+b দারা বিভাজ্য ; কিন্তু, a^2+b^2 , a^4+b^4 , a^6+b^6 ,.... প্রভৃতির কোনটিই a+b দারা বিভাজ্য নয়।

প্রতিজ্ঞা 4. n যুগাই হউক, বা জ্বযুগাই হউক, $a^n + b^n$ কোন সময়ই a - b দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে না।

ধর, a^n+b^n কে a-b দ্বারা ভাগ করিয়া, ভাগফল Q দ্বারা এবং a-ভাগশেষ R দ্বারা স্থাচিত করা হইল। তাহা হইলে.

$$a^n + b^n = Q \times (a - b) + R$$
, একটি অভেদ।

যেহেতু R এর ভিতর a নাই, অতএব a এর যে কোন মানই দেওয়া যাউক না কেন, R এর মানের কোন পরিবর্ত্তন হইবে না। কাজেই, উপরোক্ত অভেদে a=b বসাইলে, $b^n+b^n=Q'\times(b-b)+R=Q'\times0+R=R$; [a এর পরিবর্ত্তে b বসাইয়া Q এর মান Q' দ্বারা স্থুচিত করা হইতেছে] অথবা, $R=2b^n$.

OUTS ... 103 CAST THOUS AND D. 103 THE STORE

যেহেতু, n এর কোন মানের জন্মই R এর মান শূন্ত হয় না, কাজেই, x^n+b^n কোন সময়ই a-b দ্বারা বিভাজ্য নয়।

উদা.। a^2+b^2 , a^3+b^3 , a^4+b^4 প্রভৃতির কোনটিই a-b দারা বিভাজ্য নয়।

উদা. 1. n যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, $3^{4n}-4^{3n}$ রাশিমালা 17 দারা বিভাজ্য হইবে।

এখন, $3^{4n}-4^{3n}=(3^4)^n-(4^3)^n=(81)^n-(64)^n$.

কাজেই প্রথম প্রতিজ্ঞা অনুসারে, প্রদত্ত রাশিটি 81-64 অর্থাৎ 17 দার বিভাজ্য হইবে ৷

উদা. 2. n একটি যুগা অথও ধনরাশি হইলে, $2^{8n}-6^{2n}$ রাশিটির শেষের সঙ্ক ছেইটির প্রত্যেকে 0 হইবে।

প্ৰদত্ত বাশি = $(2^6)^n - (6^2)^n = (64)^n - (36)^n$.

এখন, যেহেতু, n একটি যুগা অথগু ধনরাশি, অতএব, দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞা অন্তুসারে, প্রদত্ত রাশি. 64+36 অর্থাৎ 100 দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

যেহেতু, প্রদক্ত রাশিটির এক উৎপাদক 100 হইবে, অতএব, উহার শেষ অঙ্ক হুইটি ০ হইবে।

ভিন্ন 3. m অথও ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)^{2m+1}+(x^3-3ax^2+3a^2x-q^3)^{2m+1}$ এর একটি উৎপাদক 2x হইবে।

প্ৰদেশ বালি =
$$\{(x+a)^3\}^{2m+1} + \{((x-a)^3\}^{2m+1}$$

= $(x+a)^{3(2m+1)} + (x-a)^{3(2m+1)}$

ষেহেতু, 3(2m+1) একটি অযুগ্ম অথগু ধনরাশি, অতএব প্রদন্ত রাশি, (x+a)+(x-a), অর্থাৎ 2x, দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। স্থতরাং, 2x, প্রদন্ত রাশির একটি উৎপাদক।

छेना. 4. n य कोन अथ धनतानि इटेल,

দেখাও যে, $(b-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-b)^{2n+1}$ রাশিমালা (b-c)(c-a)(a-b) দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

প্রদন্ত রাশিমালা a, b, c অক্ষরবিশিষ্ট একটি মূলদ (rational) ও পূর্ণ রাশিমালা (integral expression); ইহাতে c এর পরিবর্ত্তে b বসাইলে,

রাশিমালার মান =
$$(c-c)^{2n+1} + (c-a)^{2n+1} + (a-c)^{2n+1}$$

= $(0)^{2n+1} + (c-a)^{2n+1} + \{-(c-a)\}^{2n+1}$.

এখন,
$$\{-(c-a)\}^{2n+1}$$
= $\{-1 \times (c-a)\} \times \{-1 \times (c-a)\} \times \dots$এরপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্যাস্ত
= $\{(-1) \times (-1) \times (-1) \times \dots$...এরপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্যাস্ত $\}$
 $\times \{(c-a) \times (c-a) \times (c-a) \times \dots$...এরপ $(2n+1)$ উৎপাদক পর্যাস্ত $\}$
= $-1 \times (c-a)^{2n+1} = -(c-a)^{2n+1}$.

. প্রদত্ত রাশিমালা = 0.

কাজেই, 155 নিয়ম অনুসারে, প্রদত্ত রাশিমালা b-c দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। এইরূপে, c এর পরিবর্ত্তে a বসাইয়া দেখান ঘাইবে যে, প্রদত্ত রাশিমালা c-a দ্বারা বিভাজ্য। এবং a এর পরিবর্ত্তে b বসাইয়া দেখান ঘাইবে যে, প্রান্ত রাশিমালা a-b দ্বারা বিভাজ্য।

কাজেই, প্রদত্ত রাশিমালা (b-c)(c-a)(a-b) এই গুণফল দারাও সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 5. n যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(ab)^n - (bc)^n + (cd)^n - (da)^n$ রাশিমালা ab - bc + cd - dx দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। [মাদ্রাজ, 1873.]

ম্পৃতিত:,
$$ab - bc + cd - da = b(a - c) + d(c - a) = (c - a)(d - b)$$
.

এখন, প্রদত্ত রাশিমালাতে c এর পরিবর্ত্তে a বসাইলে,

উহার মান =
$$(ab)^n - (ba)^n + (ad)^n - (da)^n$$

= $(ab)^n - (ab)^n + (ad)^n - (ad)^n = 0$.

কাজেই, নিয়ম 155 অমুসারে, প্রদত্ত রাশিমালা c-a দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য। তজ্ঞপ, d এর পরিবর্ত্তে b বসাইয়া দেখান যাইতে পারে যে, প্রদত্ত রাশিমালা d-b দারাও বিভাজ্য। স্থতরাং, প্রদত্ত রাশিমালা c-a এবং d-b এর গুণফল, অর্থাৎ $(c-a) \times (d-b)$, অর্থাৎ ab-bc+cd-da দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 6. n যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $x^{n+1}-x^n-x+1$ রাশিমালা $(x-1)^2$ দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

প্রদত্ত রাশিমালা = $x^{n+1}-x^n-x+1=x^n(x-1)-(x-1)=(x-1)(x^n-1)$; কাজেই, x-1 প্রদত্ত রাশিমালার একটি গুণনীয়ক।

এখন যেহেতু, 156 নিয়মের প্রথম প্রতিজ্ঞা অনুসারে, x^n-1 রাশিটিও x-1দারা বিভাজ্য, কাজেই প্রদত্ত রাশিমালা (x-1) imes (x-1) অর্থাৎ $(x-1)^2$ দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

উদা. 7. নিম্নলিখিত ধারাবাহিক গুণফলটি (continued product) নির্ণয় কর: $(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)$;

ধর, নির্নেয় ধারাবাহিক গুণফল A দারা স্থাচিত হইতেছে। তাহা হইলে, $A=(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)$;

উভয় পক্ষকে x-a দারা গুণ করিলে,

$$A.(x-a) = \{(x-a)(x+a)\}(x^2+a^2)(x^4+a^4)(x^8+a^8)$$

$$= \{(x^2-a^2)(x^2+a^2)\}(x^4+a^4)(x^8+a^8)$$

$$= \{(x^4-a^4)(x^4+a^4)\}(x^8+a^8)$$

$$= (x^8-a^8)(x^8+a^8) = x^{16}-a^{16}.$$

$$A = \frac{x^{16} - a^{16}}{x - a} = x^{15} + x^{14}a + x^{13}a^2 + x^{12}a^3 + \dots + x^{14} + a^{15}.$$

উদা. 8. x+a রাশিটি x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ রাশিমালান্বয়ের গ. সা. গু. হইলে, দেখাও যে, $a=\frac{q-q'}{p-p'}$.

ষেহেতু, x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ এর গ. সা. গু. x+a, অতএব উভয় রাশিমালাই x+a দারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইবে।

অতএব, 'বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা (Divisibility Theorem)' অহুসারে,

$$(-a)^2 + p(-a) + q = 0$$
, অগণিৎ, $a^2 - pa + q = 0$; এবং $(-a)^2 - p'(-a) + q' = 0$, অগণিৎ, $a^2 - p'a + q' = 0$;

অতএব,
$$(a^2-p'a+q')-(a^2-pa+q)=0$$
 ; অথবা, $a(p-p')+q'-q=0$; পক্ষাস্তর করিয়া, $a(p-p')=q-q'$; ... $a=\frac{q-q'}{n-n}$.

প্রশ্নালা 82

প্রকৃত ভাগ করিয়া ভাগশেষ নির্ণয় কর:

- 1. $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x 3)$.
- 2. $(3x^9 + 5x^7 + 11) \div (x+1)$. 3. $(3x^3 + 7x^2 + 11x + 2) \div (3x 1)$.
- 4. $(4x^3 + 5x^2 + 9x + 7) \div (2x + 3)$.
- 5. $(ax^3 + bx^2 + cx + d) \div (ax + b)$.

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে দেখাও যে, **প্রথমোক্ত** রাশিটি **শেষোক্ত** রাশিটি দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য :

- **6.** $6x^3 + 13x^2 + 17x + 6$; 2x + 1.
- 7. $apx^3 + (2p + aq)x^2 + (2q + ar)x + 2r$; ax + 2.
- 8. $6x^4 + 13x^3y + 18x^2y^2 + 23xy^3 + 10y^4$; 3x + 2y.
- 9. $a^{57} + b^{57}$; a + b.
- 10. $64x^6 729y^6$; 2x + 3y.
- 11. $x^{2n} y^{2n}$; x + y [n যে কোন অথও ধনরাশি]।
- 12. $x^{12}y^8 x^8y^{12}$; $x^2y^2(x-y)$.
- 13. $(3a+2b)^{2n+1}+b^{2n+1}$; a+b [n যে কোন অথও ধনরাশি]।
- 14. $x^{2n+1} ax^{2n} xa^{2n} + a^{2n+1}$; $(x-a)^2$.
- **15.** $64 + 32x + 2x^5 + x^6$; $x^2 + 4x + 4$.
- 16. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, $x^7 + 9x^4 7x^3 + 11ax + 5a^2$ এর এক গুণনীয়ক x+1 হুইবে ?
 - 17. a এর মান কত হইলে, $3x^5 + 9x^4 7x^3 5x^2 4ax + 3a^2$ এর এক গুণনীয়ক x 1 হইবে ?
 - 18. m এর মান কত হইলে, $a^n + x^n$ এবং $a^n x^n$ [n] যে কোন অথও ধনরাশি] উভয়েই $a^m x^m$ এর গুণনীয়ক হইবে ? [n] মাদ্রাজ, 1875.]

19. n যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(x^2 + 7x + 6)^n - (2 + x)^{2n}$ রাশিমালা 3x + 2 ছারা বিভাজ্য।

20. দেখাও যে, $3x^3 + x^2 - 11x + 7$ কে x - 1 দারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল x - 1 দারা বিভাজ্য।

দেখাও যে নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহ (a-b)(b-c)(c-a) দারা বিভাজ্য :

- **21.** $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$.
- 22. $a^3b^3(a-b)+b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)$.
- **23.** $a^2(b-c)^3 + b^2(c-a)^3 + c^2(a-b)^3$.
- **24.** $(a-b)^9 + (b-c)^9 + (c-a)^9$.
- **25.** $a^7b^7(a-b)^{69} + b^7c^7(b-c)^{69} + c^7a^7(c-a)^{69}$.
- 26. 'বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা (Divisibility Theorem)' সাহায্যে দেখাও যে, b+c, c+a এবং a+b এর প্রত্যেকেই (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc এর গুণনীয়ক।
- 27. দেখাও যে, x-y, a-b, b-c এবং c-a এর প্রত্যেকেই (ax+by)(bx+cy)(cx+ay)-(ay+bx)(by+cx)(cy+ax) এর গুণনীয়ক। [মাদ্রাজ, 1874.]
- 28. দেখাও যে, a-b, b-c এবং c-a এর প্রত্যেকেই $a^n(b-c)+b^n(c-a)$ $+c^n(a-b)$ এর গুণনীয়ক।
 - 29. বিভাজ্যতা-প্রতিজ্ঞা সাহায্যে $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।
 - **30.** দেখাও যে, $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$ রাশিমালা (b+c)(c+a)(a+b)(a-b)(b-c)(c-a) দারা বিভাজ্য।
 - 31. n যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(41)^n-1$ এর সর্ব্ব দক্ষিণের অঙ্কটি শুন্ত হইবে।
 - 32. m যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $7^{2m}-1$ রাশিটি 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 এবং 48 সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজা।
 - 33. দেখাও যে, $17^8 + 13^7 5^8 + 2^7$ রাশিমালা 3 দারা বিভাজ্য।
 - 34. দেখাও যে, x^3-x-6 এবং $x^3-11x+14$ রাশিমালা তুইটির, x-m এর আকারে েএক সাধারণ গুণনীয়ক আছে।

- **35.** *m* যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $(81)^m.(121)^m-1$ রাশিটি 100 দারা বিভাজ্য।
 - 36. নিম্নলিখিত ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর: $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}).$
 - 37. n যে কোন অথণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $13^n = 12(13^{n-4} + 13^{n-2} + \cdots + 1) + 1.$
 - 38. ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর: $11 \times 101 \times 10001$.
 - 39. দেখাও যে, $x^n nx + n 1$ রাশিমালা $(x 1)^2$ দারা বিভাজ্য।
- 40. m যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $a^m(a-1)+b^m(b-1)$ রাশিমালা a+b দারা বিভাজ্য নহে।

নিম্নলিখিত ভাগফলগুলি নির্ণয় কর:

41.
$$(x^5 + y^5) \div (x + y)$$
. **42.** $(x^6 - y^6) \div (x + y)$.

43.
$$(x^7 - y^7) \div (x - y)$$
. **44.** $(x^{16} - y^{16}) \div (x^2 + y^2)$.

- **45.** $(x^{16} y^{16}) \div (x y)$.
- 46. $ax^3 + 5x + 2p$ এবং $ax^3 + 3x + p + 6$ রাশি হুইটির গ. সা. শু. x + 3 হইলে, p এবং a এর মান নির্ণয় কর।
- 47. $bx^2 px + 5$ এবং $bx^2 2x 2p$ রাশি ছুইটির গ. সা. গু. x 5 হইলে, দেখাও যে, p = 5 এবং $b = \frac{4}{5}$.
- 48, • $qx^2 + 2x + p$ এবং $qx^2 + x + r$ বাশি ভুইটির গ. সা. শু. x a হইলে, দেখাও বে, a = r p এবং $q(r p)^2 + 2r p = 0$.
- 49. x=3 >হইলে, $x^0-3x^8+5x^7-15x^6+13x^5-39x^4+7x^3-21x^2+17x-51$ রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে 3 না বসাইয়া, অন্ত উপায়ে উহার মান নির্ণয় কর।
- $50. \cdot x = 1.5$ হইলে, $32x^5 48x^4 + 40x^3 60x^2 + 26x 38$ রাশিমালার মান কত ?

্শ অথ্যায়

জটিলতর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.

(Harder H. C. F. and L. C. M.)

157. সহজে গুণনীয়ক নিরূপণ করা যায়, এরূপ রাশিমালাসমূহের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিবার প্রণালী পূর্বে চতুর্দ্দশ ও পঞ্চদশ অধ্যায়ে বিবৃত করা হইয়াছে। এক্ষণে, উহা হইতে জটিলতর ক্ষেত্র সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

I. জটিলভর গ. সা. গু. (Harder H. C. F.)

- 158. ছই বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু. ও এক মিশ্র রাশিমালা (compound expression) হইলে, এই গ. সা. গু. সাধারণতঃ পর্য্যবেক্ষণ দারা নির্ণয় করা যায় না। এইরূপ ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত পদ্ধতি অবলম্বন করিতে হয়।
- 159. যে রাশিমালাতে একশদ গুণনীয়ক (monomial factor) নাই, সেইরূপ রাশিমালাসমূহের গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়মঃ

নিয়ন ঃ হইটি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, উভয়কেই উহাদের অন্তর্গত কোন সাধারণ অক্ষর (common letter) এর শক্তির অধঃক্রম সমুসারে সাজাইয়া উহাদের মধ্যে উচ্চতর মানের রাশিমালাকে (expression of nigher degree) অপরটি দ্বারা [উভয়ের মান (degree) সমান হইলে, যে অপরটি দ্বারা] ভাগ কর; যদি কোন ভাগশেষ থাকে, তবে সেই ভাগশেষকে নৃতন ভাজক এবং পূর্বব ভাজককে নৃতন ভাজারূপে গণ্য করিয়া পুনরায় ভাগ কর; এবং যে পর্যান্ত ভাগ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া না যায়, সেই পর্যান্ত অমুরূপ প্রণালীতে ভাগ করিয়া যাও। শেষ ভাজকটিই প্রদন্ত রাশিমালাদ্বয়ের নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। এই প্রক্রিয়ার যে কোন অবস্থাতেই, ভাজ্য এবং তৎসংশ্লিষ্ট ভাজকের যে কোনটিকে, অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ যে কোন-রাশিদ্বারা আবশ্রক্ষত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

উপরোক্ত নিয়মের যৌক্তিকতা নিম্নলিথিতরূপে প্রতিপন্ন করা যায়:

ধর, A ও B উপরোক্তরূপ ছই রাশিমালা স্থাচিত করিতেছে, এবং A উহাদের মধ্যে উচ্চতর মানের রাশিমালা।

A কে নিয়মোল্লিখিত প্রণালীতে B দারা ভাগ কর ; মনে কর, Q ভাগফল এবং C ভাগশেষ হইল । তাহা হইলে অবশ্রুই,

$$C = A - BQ \qquad \dots \tag{1}$$

অথবা,
$$A = BQ + C$$
 ... (2)

(1) হইতে দেখা যায় যে, $A \otimes B$ এর প্রত্যেকটি সাধারণ গুণনীয়কই C এরও গুণনীয়ক হইবে [কারণ, A=pa এবং B=pb হইলে, C=p(a-bQ) হইবে]। স্থতরাং, $A \otimes B$ এর গ. সা. গু. যদি H দারা স্থচিত হয়, তবে H, C এরও গুণনীয়ক, এবং কাজেই, $B \otimes C$ এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। •

•তাহা হইলে, স্পষ্টই বুঝা যায় যে, $B \otimes C$ এর গ. সা. গু., হয় H, নতুবা H হইতে উচ্চতর মানের, কোন রাশিমালা হইবে। \cdots \cdots (ক)

এখন, (2) হইতে দেখা যায় যে, $B \otimes C$ এর প্রত্যেকটি সাধারণ গুণনীয়কই A এরও গুণনীয়ক, এবং কাজেই, উহা $A \otimes B$ এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। স্কুতরাং, B এবং C এর গ. সা. গু. ও A এবং B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে; অতএব, উহা (অর্থাৎ B গ. সা. গু.) B হইতে উচ্চতর মানের রাশিমালা হইতে পারে না।

স্থতরাং, (ক) হইতে দেখা যায় যে, B ও C এর গ. সা. গু.ও H হইবে। অতএব, B ও C এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু.।

এইরূপে, B কে C দারা ভাগ করিলে, D যদি ভাগশেষ হয়, তবে দৈখান যাইতে পারে থৈ, C ও D এর গ. সা. গু.ই B ও C এর গঁ. সা. গু. এর সমান, এবং কাজেই, নির্দেষ গ. সা. গু. হইবে।

এখন, C কে D দারা ভাগ কর, এবং মনে কর, কিছুই ভাগশেষ থাকিল না (অর্থাৎ ভাগ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া গেল); তাহা হইলে, D ই, C ও D এর গ. সা. গু. এবং কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

- অসুসি. 1. যেহেত্, যে কোন ভাজ্য ও তৎসংশ্লিষ্ট আজকের গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু., অতএব স্থবিধার জন্ম উহাদের যে কোনটিকে, অপরটির গুণনীয়ক নিহে, এরূপ যে কোন সরল রাশি (monomial expression) দ্বারা আবশ্রকমত গুণ্ণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।
- আকুসি. 2. A কে B দ্বারা ভাগ করিবার কালে, যদি সম্পূর্ণ ভাগের পূর্বেই ভাগ-প্রক্রিয়া বন্ধ করা হয় এবং Q' যদি আংশিক ভাগফল (partial quotient) এবং

C' যদি তৎসংশ্লিষ্ট ভাগশেষ বুঝায়, তবে $B \otimes C'$ এর গ. সা. গু.ও, $B \otimes C$ এর গ. সা. গু. এর স্থায়, নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে। কাজেই, অনুসি. 1 হইতে বুঝা যায় যে, C' কে B দারা (অথবা, C', B হইতে নিম্নতর মানের হইলে, B কে C' দারা) ভাগ করার সময় উহাদের যে কোনটিকে অপরটির গুণনীয়ক নহে, এরূপ যে কোন সরল রাশি দারা আবশ্যকমত গুণ বা ভাগ করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দারা প্রক্রিয়া-প্রণাদনী স্পষ্টরূপে বুঝান যাইতেছে:

উদা. 1. $3x^3 - 7x^2 - 18x - 8$ এবং $2x^3 - 3x^2 - 17x - 12$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গ. সা. গু. অবশুই $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $3(2x^3-3x^2-17x-12)$ এর গ. সা. গু. এর সমান [অঞ্সি. 1]। অতএব, দ্বিতীয় রাশিমালাকে 3 দারা গুণ করিয়া ঐ গুণফলকে প্রথম রাশিদারা ভাগ করা যাউক:

$$3x^{3} - 7x^{2} - 18x - 8 \begin{vmatrix} 3 & 3x^{2} - 17x - 12 \\ 3 & -7x^{2} - 18x - 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6x^{3} - 9x^{2} - 51x - 36 \\ 6x^{3} - 14x^{2} - 36x - 16 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -36x - 16 \\ 5x^{2} - 15x - 20 \end{pmatrix}$$

কাজেই নির্ণের গ. সা. গু., $3x^3 - 7x^2 - 18x - 8$ এবং $5x^2 - 15x - 20$ অর্থাৎ $5(x^2 - 3x - 4)$ এর গ. সা. গু. এর সমান ; স্থতরাং, উহা $3x^3 - 7x^2 - 18x - 8$ এবং, $x^2 - 3x - 4$ এর গ. সা. গু. এরও সমান [অন্তুসি. 1]।

অতএব, নিম্নলিখিত প্রণালী অনুসারে কার্য্য করিতে হইবে:

$$5) \frac{5x^{2} - 15x - 20}{x^{2} - 3x - 4} \underbrace{3x^{3} - 7x^{2} - 18x - 8}_{3x^{3} - 9x^{2} - 12x} \left(3x + 2\right), \\ \underbrace{2x^{2} - 6x - 8}_{2x^{2} - 6x - 8}$$

'স্থতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. = $x^2 - 3x - 4$.

• উদা. 2. $22x^6-78x^5-16x^2$ এবং $2x^5-78x^2-44x$ এর গ. সা. ওঁ. নির্ণয় কর।

প্ৰথম বাশিমালা =
$$2x^2(11x^4 - 39x^3 - 8)$$
;

স্থতরাং, 100 নিয়মের টীকা 7 অনুসারে,

নির্ণেয় গ. সা. গু. = $(2x^2$ এবং 2x এর গ. সা. গু.) × $(11x^4 - 39x^3 - 8$ এবং $x^4 - 39x - 22$ এর গ. সা. গু.)

 $=2x \times X$, যদি X শেষোক্ত রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু.

निर्द्भन करत्।

এখন, X কে পূর্ব্ব নিয়ম অন্তুসারে নির্ণয় করা যাউক:

$$x^{3} - 11x - 6 x^{4} - 39x - 22 (x - x^{2} - 3x - 2) x^{3} - 11x - 6 (x + 3) x^{4} - 11x^{2} - 6x (x + 3) x^{3} - 3x^{2} - 2x (x + 3) x^{2} - 3x - 22$$

$$x^{2} - 3x - 2$$

$$3x^{2} - 9x - 6$$

$$3x^{2} - 9x - 6$$

স্তরাং, $X = x^2 - 3x - 2$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. = $2x(x^2 - 3x - 2)$.

উদা. 3. $12x^4a^2+54x^3a^3+6x^2a^4-72xa^5$ এবং $8x,^6a+60x^5a^2+160x^4a^3+180x^3a^4+72x^2a^5$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম ,রাশি = $6xa^2(2x^3 + 9x^2a + xa^2 - 12a^3)$.

দ্বিতীয় বাশি = $4x^2a(2x^4 + 15x^3a + 40x^2a^2 + 45xa^3 + 18a^4)$.

অতএব, উপরোক্ত বহুপদ গুণনীয়ক(multinomial factor)-দয়ের গ. সা. গু. X দারা হচিত করিলে, অবশ্রুই প্রদন্ত রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. $=(6xa^2$ এবং $4x^2a$ এর গ. সা. গু.) $\times X$ হইবে।

এখন, X নির্ণয় করা যাউক:

$$\begin{array}{c} \cdot 2x^{3} + 9x^{2}a + xa^{2} - 12a^{3} \\ 2x^{4} + 15x^{3}a + 40x^{2}a^{2} + 45xa^{3} + 18a^{4} \\ 2x^{4} + 9x^{3}a + x^{2}a^{2} - 12xa^{3} \\ \hline 3a)6x^{3}a + 39x^{2}a^{2} + 57xa^{3} + 18a^{4} \\ \hline 2x^{3} + 13x^{2}a + 19xa^{2} + 6a^{3} \end{array}$$

কাজেই, X, $2x^3+9x^2a+xa^2-12a^3$ এবং $2x^3+13x^2a+19xa^2+6a^3$ এর গ. সা. শু. হইবে; যেহেতু, এতছভয়ই সমান মানের (of the same degree) রাশিমালা, অতএব উহাদের যে কোনটিকে অপরটি দ্বারা ভাগ করা যাইতে পারে।

$$2x^{3} + 9x^{2}a + xa^{2} - 12a^{3} \underbrace{)2x^{3} + 13x^{2}a + 19xa^{2} + 6a^{3}}_{2x^{3} + 9x^{2}a + xa^{2} - 12a^{3}} (1$$

$$2a)4x^{2}a + 18xa^{2} + 18a^{3}$$

$$2x^{2} + 9xa + 9a^{2}$$

$$2x^{2} + 9xa + 9a^{2} \underbrace{)2x^{3} + 9x^{5}a + xa^{2} - 12a^{3}}_{2x^{3} + 9x^{2}a + 9xa^{2}} \underbrace{(x^{2} + 9xa^{2} - 12a^{3})}_{2x + 3a}$$

$$\begin{array}{c}
2x + 3a \\
2x^{2} + 9xa + 9a^{2} \\
2x^{2} + 3xa \\
6xa + 9a^{2} \\
6xa + 9a^{2}
\end{array}$$

মুতরাং, X = 2x + 3a.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. = 2xa(2x + 3a).

উদো. 4. $4x^4 + 11x^3 + 27x^2 + 17x + 5$ এবং $6x^4 + 14x^3 + 36x^2 + 14x + 10$ এর গ. সা. শু. নির্ণয় কর।

দিতীয় রাশি = $2(3x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 7x + 5)$; কিন্তু, যেহেতু, 2 প্রথম রাশির গুণনীয়ক নহে, অতএব, প্রথম রাশি এবং $3x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 7x + 5$ এর গ. সা. গু. ই নির্ণেয় গ. সা. গু. ইইবে।

$$4x^{4} + 11x^{3} + 27x^{2} + 17x + 5$$

$$\frac{3}{12x^{4} + 33x^{3} + 81x^{2} + 51x + 15/4}$$

$$\frac{1}{12x^{4} + 28x^{3} + 72x^{2} + 28x + 20/4}$$

$$5x^{3} + 9x^{2} + 23x - 5$$

$$3x^{4} + 7x^{3} + 18x^{2} + 7x + 5$$

$$5$$

$$5x^{3} + 9x^{2} + 23x - 5$$

$$15x^{4} + 35x^{3} + 90x^{2} + 35x + 25$$

$$15x^{4} + 27x^{3} + 69x^{2} - 15x$$

$$8x^{3} + 21x^{2} + 50x + 25$$

$$5$$

$$40x^{3} + 105x^{2} + 250x + 125$$

$$40x^{3} + 72x^{2} + 184x - 40$$

$$33)33x^{2} + 66x + 165$$

$$x^{2} + 2x + 5$$

$$x^{2} + 2x + 5 \underbrace{)5x^{3} + 9x^{2} + 23x - 5}_{5x^{3} + 10x^{2} + 25x^{2}} \underbrace{-x^{2} - 2x - 5}_{-x^{2} - 2x - 5}$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. = $x^2 + 2x + 5$.

উদা. 5. গ. সা. গু. নির্ণয় কর:

$$4x^4 - 16x^3 + 108$$
 এবং $6x^5 - 14x^3 - 40x^2 + 36$.
প্রথম রাশি = $4(x^4 - 4x^3 + 27)$.
বিতীয় রাশি = $2(3x^5 - 7x^3 - 20x^2 + 18)$.

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের বহুপদ-গুণনীয়ক (multinomial factors) তুইটির গ. সা. গু.কে X দারা স্থচিত করিলে, নির্ণেয় গ. সা. গু.=2X.

এখন, X, কে নির্ণয় করিতে হইবে:

$$4 - 4x^{3} + 27 \begin{vmatrix} 3x^{5} - 7x^{3} - 20x^{2} + 18 (3x + 12) \\ 3x^{5} - 12x^{4} + 81x \end{vmatrix}$$

$$12x^{4} - 7x^{3} - 20x^{2} - 81x + 18$$

$$12x^{4} - 48x^{3} + 324$$

$$41x^{3} - 20x^{2} - 81x - 306$$

$$x^{4} - 4x^{3} + 27$$

$$41$$

$$41x^{3} - 20x^{2} - 81x - 306$$

$$141x^{4} - 164x^{3} + 1107$$

$$16x^{3} - 9x^{2} - 36x + 1107$$

$$16x^{3} - 9x^{2} - 34x - 123$$

সহজ বীজগণিত

$$\begin{array}{r}
 16x^3 - 9x^2 - 34x - 123 \\
 41 \\
 656x^3 - 369x^2 - 1394x - 5043 \\
 656x^3 - 320x^2 - 1296x - 4896 \\
 \hline
 -49) - 49x^2 - 98x - 147 \\
 \hline
 x^2 + 2x + 3
 \end{array}$$

$$x^{2} + 2x + 3 \underbrace{)41x^{3} - 20x^{2} - 81x - 306}_{41x - 102} \underbrace{)41x^{3} + 82x^{2} + 123x}_{-102x^{2} - 204x - 306}$$
$$\underbrace{-102x^{2} - 204x - 306}_{-102x^{2} - 204x - 306}$$

স্থতরাং, নির্ণেয় গ. সা. গু. = $2(x^2 + 2x + 3)$.

প্রথমালা 83

```
গ সা গু নির্ণয় কর:
   2x^2 + 5x - 3 93 2x^3 + 3x^2 - 32x + 15 93
 1.
    2.
   2x^2 - 3ax - 20a^2 এবং 2x^3 + 3ax^2 - 45a^2x - 100a^3 এর ।
 3.
    3x^4 + 7x^3 - 14x^2 - 24x এবং 6x^4 - 10x^3 - 24x^2 এব
 4.
    5.
    6a^3 - 25a^2b + 32ab^2 - 12b^3 and 4a^3 + 12a^2b - 7ab^2 - 30b^3 and 1
 ß.
    3x^3 + 5x^2 + 5x + 2   93^{\circ}   2x^3 + 5x^2 + 5x + 3   93^{\circ}
7.
   4x^3-7x^2y+7xy^2-3y^3 এবং 3x^3-7x^2y+7xy^2-4y^3 এর।
8.
    6x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x 93: 4x^5 - 18x^4 - 8x^3 - 10x^2 931
9.
11.
    12a^3 + 11a^2x + 6ax^2 + x^3 93. 21a^3 + 17a^2x + 9ax^2 + x^3 93.
12.
    35a^3 + 31a^2x + 13ax^2 + 2x^3 93: 65a^3 + 54a^2x + 22ax^2 + 3x^3 931
18.
   70x^3 - 9ax^2 + 11a^2x + 6a^3 and 91x^3 - 25ax^2 + 20a^2x + 4a^3 and
14.
   75x^3 - 35x^2 + 24x + 4 93^{\circ} 85x^3 - 36x^2 + 25x + 6 93
15.
    35x^{3} - 34x^{2} + 3x + 2 93^{3} - 90x^{2} + 5x + 3 93
16.
17. 2x^6 + 2ax^5 + 14a^2x^4 + 10a^3x^3 + 24a^4x^2 এবং
```

 $6x^6 + 21ax^5 + 30a^2x^4 + 24a^3x^3$

18.
$$4a^4 + 32a^3 + 72a^2 + 44a + 8$$
 এবং

$$6a^4 + 54a^3 + 138a^2 + 78a + 12$$

19.
$$2x^4 - 19x^2 + 21x - 6$$
 এবং $6x^4 + 21x^3 + 3x - 6$ এব।

$$20. \quad 12x^4 - 30x^2 + 126x + 90 \quad \text{ar} \quad 15x^4 - 25x^3 + 145x - 75 \quad \text{ag}$$

21.
$$18x^4 + 117x^3 + 162x^2 + 72x + 9$$
 এবং

$$12x^4 + 68x^3 + 72x^2 + 108x + 20$$
 এর ১

•22.
$$x^5 - 5x^2 + 6x + 12$$
 এবং $x^4 - 8x^2 - 24x - 32$ এব।

24.
$$4x^5 - 8x^3a^2 + 28x^2a^3 - 24xa^4 + 24a^5$$
 এবং

$$6x^4 + 24x^3a - 12x^2a^2 - 24xa^3 + 96a^4$$
 (43)

25.
$$9x^4 - 18x^3y - 13x^2y^2 - 38xy^3 - 12y^4$$
 এবং

$$6x^5 + 4x^4y + 5x^3y^2 + 4x^2y^3 + 8y^5$$
 এর \mathbf{P}

26:
$$2x^5 - 11x^2 - 9$$
 এবং $4x^5 + 11x^4 + 81$ এর ।

27.
$$32a^4 + 104a^3 - 20a^2 - 122a + 30$$
 এবং

$$60a^5 + 10a^4 - 45a^3 + 45a^2 - 50a$$
 এব \triangleright

28.
$$x^5 + 2x^4 - 5x^2 - 7x + 3$$
 এবং $3x^6 - 3x^4 - 18x^3 + x^2 + 2x + 3$ এর 1

160. অনেকস্থলে নিম্নলিখিভ উপপত্তি সাহায্যে 'অভি সহজে গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায় :

উপপত্তিঃ $A \otimes B$ তুইটি একপদ-গুণনীয়ক-বর্জ্জিত রাশিমালা হইলে, যদি m, n, p, q, এরূপ চারিটি অন্ধ-সংখ্যা (numerical quantity) বুঝায় যে, mq - np এর সাংখ্যমনুন, শৃষ্ট নহে, তাহা হইলে $B \otimes A$ এর গ. সা. গু.-এবং $mA + nB \otimes pA + qB$ এর গ. সা. গু., উভয়ই এক। (শেষোক্ত প্রত্যেক রাশিমালাতেই সাধারণ সাংখ্য-গুণনীয়ক বর্জনীয়। λ

ধর, $A \otimes B$ এর গ. সা. গু. H দারা এবং (সাধারণ সাংখ্য-গুণনীয়ক বর্জিত) $mA + nB \otimes pA + qB$ এর গ. সা. গু. H' দারা স্থচিত করা হইল।

এখন, যেহেতু A ও B এর **প্রান্ত্যেক** সাধারণ গুণনীয়কই mA+nB এর গুণনীয়ক, আবার pA+qB এরও গুণনীয়ক, স্মৃতরাং H নিশ্চয়ই mA+nB ও pA+qB এর সাধারণ গুণনীয়ক ইইবে।

কাজেই, H', হয় H এর সমান, নতুবা H হইতে উচ্চতর মানের, কোন রাশিমাশা হইবে। ... h. (ক)

জাবার, থেছেতু
$$q(mA+nB)-n(pA+qB)=(mq-np)A$$
, এবং $m(pA+qB)-p(mA+nB)=(mq-np)B$,

অতএব, mA+nB ও pA+qB এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই (mq-np)A এর, এবং (mq-np)B এরও, গুণনীয়ক হইবে। এথন, যেহেতু প্রদত্ত সর্জাহুসারে, mq-np একটি অঙ্ক-সংখ্যামাত্র, অতএব, mA+nB ও pA+qB এর অঙ্ক-গুণনীয়ক ব্যতীত অপর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই A এর, এবং B এরও গুণনীয়ক হইবে। কাজেই, H' স্পষ্টতঃ A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

অতএব, H', H হইতে উচ্চতর মানের রাশিমালা হইতে পারে না। অতএব, (ক) হইতে, H'=H;

অর্থাৎ, 'উপপত্তিটি প্রতিষ্ঠিত হইল।

জামুসি. 1. A ও B এর গ. সা. গু. এবং A+B ও A-B এর গ. সা. গু. উভয়ই এক। [এস্থলে, $m=1,\,n=1,\,p=1$ এবং q=-1 ধরিতে হইবে।]

ভাসুসি. 2. A ও B এর গ. সা. ও. এবং $A\pm B$ ও B এর গ. সা. ও. উভয়ই এক ৷ [এস্থলে, $m=1,\,n=\pm 1,\,p=0$ এবং q=1.]

তজ্ঞপ, A ও B এর গ. সা. ও. এবং $A\pm B$ ও A এর গ. সা. ও.ও এক।

EV. 1. $x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 2$

এবং $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

ধ্ব, $A = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 2$,
এবং $B = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$.

তাহা হইলে, $A+B=2x^4-2x^3-4x^2=2x^2(x^2-x-2)$, এবং $A-B=4x^3-6x^2-6x+4=2(2x^3-3x^2-3x+2)$.

অতএব, অহসি. 1 হইতে বুঝা যায় যে, নির্ণেয় গ. সা. গু., $x^2(x^2-x-2)$ এবং $2x^3-3x^2-3x+2$ এর গ. সা. গু. এর সমান ; কাজেই, উহা x^2-x-2 এবং $2x^3-3x^2-3x+2$ এর সমান হইবে।

 $\forall \vec{\mathbf{A}}, \qquad A' = x^2 - x - 2,$

 $B' = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2.$

তাহা হইলে, $A' + B' = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 2x(x^2 - x - 2)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. শু. = A' এবং (A' + B') এর গ. সা. শু. [অমুসি. 2] $= x^2 - x - 2$.

GF1. 2. $4x^4 + 11x^3 + 27x^2 + 17x + 5$

এবং $3x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 7x + 5$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

 $A = 4x^4 + 11x^3 + 27x^2 + 17x + 5,$

এবং $B = 3x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 7x + 5$.

তাহা হইলে,
$$A - B = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 10x = x(x^3 + 4x^2 + 9x + 10)$$
, এবং $3A - 4B = 5x^3 + 9x^2 + 23x - 5$.

অতএব, $x^3+4x^2+9x+10$ এবং $5x^3+9x^2+23x-5$ এর গ. সা. গু.ই নির্নেয় গ. সা. গু. ইইবে।

ধর,
$$A' = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$$
,
এবং $B' = 5x^3 + 9x^2 + 23x - 5$.

তাহা হইলে,
$$A' + 2B' = 11x^3 + 22x^2 + 55x = 11x(x^2 + 2x + 5)$$
, এবং $5A' - B' = 11x^2 + 22x + 55 = 11(x^2 + 2x + 5)$.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. শু. $=x(x^2+2x+5)$ এবং x^2+2x+5 এর গ. সা. শু. $=x^2+2x+5$.

উদা. 3. $2x^5 - 11x^2 - 9$ এবং $4x^5 + 11x^4 + 81$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1865.]

ধর,
$$A = 4x^5 + 11x^4 + 81$$
,
এবং $B = 2x^5 - 11x^2 - 9$.

তাহা ইইলে,
$$A-2B=11x^4+22x^2+99=11(x^4+2x^2+9)$$
.
এবং $A+9B=22x^5+11x^4-99x^2=11x^2(2x^3+x^2-9)$.

্ অতএব, নির্ণেয় গ. সা. শু. $=x^4+2x^2+9$ এবং $x^2(2x^3+x^2-9)$ এর গ. সা. শু. । ,

স্থতরাং, উহুা
$$x^4 + 2x^2 + 9$$
 এবং $2x^3 + x^2 - 9$ এর গ. সা. গু. \mathbf{I} ধ্রু, $A' = x^4 + 2x^2 + 9$, এবং $B' = 2x^3 + x^2 - 9$.

তাহা হইলে, $A' + B' = x^4 + 2x^3 + 3x^2 = x^2(x^2 + 2x + 3)$.

অতএব, $2x^3 + x^2 - 9(=B')$ এর গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে এবং $x^2 + 2x + 3(=C')$

ে এখন, বেছেডু
$$B' + 3C' = 2x^3 + 4x^2 + 6x$$

$$= 2x(x^2 + 2x + 3);$$

... নির্ণেয় গ. সা. গু. = $x^2 + 2x + 3$.

প্রথমালা 84

নিম্নলিখিত রাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর:

1.
$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$
 এবং $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ এব।

2.
$$2x^3 - 17x + 12$$
 এবং $4x^4 - 2x^3 - 34x^2 + 41x - 12$ এব ।

3.
$$4x^3 + 13x^2 + 19x + 4$$
 and $2x^3 + 5x^2 + 5x - 4$ and

4.
$$3x^3 - 5x^2 + 7$$
 এবং $6x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 14x + 7$ এব।

5.
$$6x^4 - 11x^5 + 16x^2 - 22x + 8$$
 এবং $6x^4 - 11x^3 - 8x^2 + 22x - 8$ এর।

6.
$$2x^4 + 19x^3 + 20x^2 - 31x + 8$$

এবং
$$2x^4 + 7x^3 - 64x^2 + 62x - 16$$
 এর)

7.
$$3x^4 - 7x^3 - 27x^2 - 6x + 2$$
 এবং $3x^4 - 13x^3 - 40x^2 - 9x + 3$ এর।

8.
$$5x^4 - 18x^3 - 7x^2 + 12x + 3$$
 93 ? $5x^4 - 23x^3 - 9x^2 + 16x + 4$ 93

9.
$$2x^4 - 5x^3 - 17x^2 - 2x + 2$$

এবং
$$6x^5 + 23x^4 + 34x^3 + 21x^2 - 2x - 2$$
 এর)

10.
$$6x^5 + 9x^4 - 13x^3 - 4x^2 + 9x - 3$$

$$9x^5 + 12x^4 - 18x^3 - 5x^2 + 12x - 4$$

11.
$$x^5 - x^3 + 8$$
 এবং $x^5 - x^2 + 4$ এর।

12.
$$3x^5 + 139x^2 - 44$$
 এবং $39x^5 + 139x^4 - 16$ এব ৷

161. সহজে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায় না, এই প্রকার তিন বা তদ্ধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয়:

ধর, A, B, C দারা হৃচিত রাশিমালাত্রয়ের গ. সা. গু. নির্ণয় ফরিতে হইবে।

মনে কর, A ও B এর গ. সা. গু. G ছারা, G ও C এর া. সা. গু. H ছারা স্থাচিত করা হইল।

এখন G, A ও B এর সকল সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কের গুণফল বলিয়া, G এর প্রত্যেক গুণনীয়কই A ও B এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে। স্থতরাং, G ও C এর সকল সাধারণ গুণনীয়কই A, B ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

ু অতএব, A, B ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক H হইবে। কাজেই, নির্ণেয় গ. সা. গু., হয় H, নতুবা H হইতে উচ্চতর মানের, কোন রাশিমালা হইবে। \cdots (ক)

্রিল্ক, যেহেতু A ও B এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই Gএর উৎপাদক, অতএব, A, B ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়কই G ও C এরও সাধারণ গুণনীয়ক হইবে।

স্থতরাং, নির্ণেয় গ. সা. শু. ও অবশ্যই G ও C এর সাধারণ গুণনীয়ক হইবে; কাজেই, উহা H হইতে উচ্চতর মানের কোন রাশিমালা হইতে পারে না।

অতএব, (ক) হইতে, নির্ণেয গ. সা. গু. = H.

অমুরূপ যুক্তি দারা দেখান যাইতে পারে যে, D যদি চতুর্থ এক রাশিমালা বুঝায়, তাহা হইলে, H ও D এর গ. সা. গু.ই A, B, C ও D এর গ. সা. গু. ইইবে।

অতএব, তিন বা তদধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার নিম্নলিখিত নিয়ম পাওয়া গেলঃ

A, B, C, D,... প্রভৃতি রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে A ও B এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর ; তৎপরে, লন্ধ গ. সা. গু. ও C এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর ; তৎপরে এই গ. সা. গু. ও D এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর ; ইত্যাদি। সর্বশেষ গ. সা. গু.ই নির্ণেয় গ. সা. গু.ই হিরে।

উদা. ৷ গ. সা. শু. নির্ণয় কর : $2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - 24$, $3x^4 + 14x^3 - 11x^2 - 70x + 24$ এবং $5x^4 + 9x^3 - 47x^2 - 81x + 18$.

প্রথমে, প্রথম তুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করা ঘাউক ঃ

ধর,
$$A = 2x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - 24,$$
এবং
$$B = 3x^4 + 14x^3 - 11x^2 - 70x + 24.$$

তাহা হইলে,
$$A + B = 5x^4 + 7x^3 - 28x^2 - 12x$$

= $x(5x^3 + 7x^2 - 28x - 12)$,

এবং
$$-3A + 2B = 49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$$
.

্মত্বার, A ও B এর গ. সা. ও., $5x^3 + 7x^2 - 28x - 12$ এবং $49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$ এত হভরের গ. সা. ও. এর সমান।

এখন, মনে কর
$$A' = 5x^3 + 7x^2 - 28x - 12$$
,
এখন, $B' = 49x^3 + 29x^2 - 314x + 120$.

তাহা হইলে,
$$10A' + B' = 99x^3 + 99x^2 - 594x$$

= $99x(x^2 + x - 6)$.

অতএব, A ও B এর গ. সা. গু,

$$5x^3$$
 + $7x^2 - 28x - 12(=A')$ এর গ. সা. গু. এর সমান। এবং $x^2 + x - 6(=C')$

$$=x^2+x-6$$
.

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. শু., x^2+x-6 এবং $5x^4+9x^3-47x^2-81x+18$ এতত্ত্তরের গ. সা. শু.এর সমান। এই শেষোক্ত গ. সা. শু. নিম্নিবিতিরূপে নির্ণয় করা যায়। যথান

$$x^{2} + x - 6 \int \frac{5x^{4} + 9x^{3} - 47x^{2} - 81x + 18}{5x^{4} + 5x^{3} - 30x^{2}} \frac{4x^{3} - 17x^{2} - 81x + 18}{4x^{3} + 4x^{2} - 24x} \frac{4x^{3} + 4x^{2} - 24x}{-3) - 21x^{2} - 57x + 18} \frac{7x^{2} + 19x - 6}{7x^{2} + 7x - 42} \binom{7}{12} \frac{12x + 36}{x + 3}$$

$$\begin{array}{c}
x+3 \\
x^2 + 3x \\
-2x - 6 \\
-2x - 6
\end{array}$$

স্থতরাং, নির্দেশ গ্. সা. গু. = x + 3.

প্রশালা 85

গ সাং ও নির্ণয় কর:

1.
$$2x^3 + 7x^2 - 5x - 4$$
, $x^3 + 8x^2 + 11x - 20$ এবং $2x^3 + 19x^2 + 49x + 20$ এব ৷

2.
$$2x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 15x - 10$$
, $2x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 25x + 10$
এবং $2x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 8$ এর ৷

3.
$$2x^4+7x^3-19x^2-14x+30$$
, $2x^4+5x^3-16x^2-10x+24$ এবং $2x^4+5x^3-10x^2+5x-12$ এর ৷

4.
$$2x^4 - 4x^3 - 69x^2 - 2x - 35$$
, $2x^4 - 6x^3 - 55x^2 - 3x - 28$

$$43^2 \cdot 2x^4 + 18x^3 + 41x^2 + 9x + 20$$

6.
$$6a^3 + 5a^2b - 34ab^2 + 15b^3$$
, $6a^3 - 37a^2b + 57ab^2 - 20b^3$
• $93^3 - 8a^2b - 31ab^2 + 60b^3$

8.
$$6x^5+14x^4-53x^3-37x^2+66x+24$$
, $6x^5-28x^4+17x^3+54x^2-39x-18$, $6x^5+8x^4-79x^3-36x^2+105x+36$ এবং $2x^5-2x^4-31x^3+51x^2+42x-72$ এর ।

II. जिंव न. मा. छ.

162. পর্য্যবেক্ষণ দারা গুণনীয়ক নির্ণয় করা যায় না, এইরূপ নুই রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় :

ধর, A ও B উপরোক্তরূপ তুই রাশিমালা এবং H উহাদের গ. সা. গু. বুঝাই-তেছে। $^{\circ}A$ ও B কে H দারা ভাগ কর, এবং মনে ফর, ভাগফলদ্ম যথাক্রমে a ও b নারা স্থচিত হইতেছে। তাহা চইলে,

$$A = aH$$
এবং $B = bH$

এখন, যেহেতু a ও b এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই, অতএব, A ও B এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেরই (common multiple এর) একটি গুণনীয়ক $a \times H \times b$ হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু = aHb.

কিন্ত,
$$aHb = \frac{A}{H} \times B$$

অথবা,
$$A \times \frac{B}{H}$$

. কাজেই, নির্ণেয় ল. সা. গু. $= \frac{A}{H} \times B$, অথবা $= A \times \frac{B}{H}$.

স্থতরাং, তুইটি রাশিমালার ল. মা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, একটিকে উহাদের পা. শু. দারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকে অপরটি দারা গুণ করিতে হয়।

ভাকুসি.। যদি $A \otimes B$ এর ল. সা. গু. L দারা স্থাচিত হয়, তবে অবশ্রুই, $L \times H = A \times B$; অর্থাৎ, তুই রাশিমালার ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. এর গুণফল, ঐ রাশিমালারয়ের গুণফলের সমান।

টীকা। তুই রাশিমালার ভিতর কোন গুণনীয়ক সাধারণ না থাকিলে, উহাদের গুণফলই রাশিমালাদ্বয়ের ল. সা. গু. হইবে।

উদা. 1. $6x^3 + 25x^2 + 16x + 7$ এবং $6x^3 - 11x^2 - 8x - 5$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$\begin{array}{c} 6x^3 - 11x^2 - 8x - 5 \\ \underline{)} \begin{array}{c} 6x^3 + 25x^2 + 16x + 7 \\ \underline{6x^3 - 1} & 1x^2 - 8x - 5 \\ \underline{12} & \underline{)} \begin{array}{c} 36x^2 + 24x + 12 \\ \underline{3x^2 + 2x + 1} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ \end{array}$$

$$3x^{2} + 2x + 1 \underbrace{) \begin{array}{c} 6x^{3} - 11x^{2} - 8x - 5 \\ 6x^{3} + 4x^{2} + 2x \end{array}}_{\begin{array}{c} -15x^{2} - 10x - 5 \\ -15x^{2} - 10x - 5 \end{array}} \left(\begin{array}{c} 2x - 5 \end{array} \right.$$

অতএব, প্রদন্ত রাশিসমূহের গ. সা. গু. $=3x^2+2x+1$. স্থতরাং, নির্ণেয় ল. সা. গু.

$$6x^{3} - 11x^{2} - 8x - 5
3x^{2} + 2x + 1$$

$$= (2x - 5)(6x^{3} + 25x^{2} + 16x + 7)$$

$$= 12x^{4} + 20x^{3} - 93x^{2} - 66x - 35.$$

প্রশালা 86

ল. সা. গু. নির্ণয় করঃ'

1.
$$3x^3 + 2x^2 - 11x + 4$$
 এবং $3x^3 + 14x^2 + 13x - 8$ এর।

2.
$$6x^3 + 17x^2 + 9x - 4$$
 এবং $6x^3 - 7x^2 - 27x + 8$ এর।

3.
$$12x^3 - 4x^2 - 25x + 12$$
 এবং $12x^3 - 28x^2 + 7x + 12$ এর।

5.
$$4x^3 - 10x^2 - 18x + 45$$
 এবং $6x^3 + 8x^2 - 27x - 36$ এর'।

8.
$$4x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 18x + 27$$

, এবং
$$3x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 16x + 24$$
 এর ৷

9. তুইটি সংখ্যা x ও, y এর গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l; এবং h+l = x+y হইলো, প্রমাণ কর যে, $h^3+l^3=x^3+y^3$. [পাঞ্জাব প্রবেশিকা, 1891.]

163. তিন বা তদপ্রেক রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয়ঃ

মনে কর, A, B, C দারা স্থচিত রাশিমালাত্রয়ের ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন ধর, A ও B এর ল. সা. গু. L দ্বারা, এবং L ও C এর ল. সা. গু. M দ্বারা, স্টতিত করা হইল। •

তাহা হইলে, স্পষ্টই L ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকই (common multiple) A , B ও C এর সাধারণ গুণিতক হইবে ; \cdots \cdots (1)

আবার, A, B ও C এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকই স্পষ্টতঃ C এরও গুণিতক। \cdots \cdots \cdots \cdots (2°)

অতএব, (1) হইতে, A, B ও C এর সাধারণ গুণিতক M হইবে। কা A, B ও C এর ল. শা. গু., হয M, নতুবা M হইতে নিম্নতর মানের কোন রাশিমালা হইবে।

কিন্তু, A, B, C এর ল. সা. গু. M হইতে নিম্নতর মানের কোন বাশিমালা হইতে পারে না ; কারণ, (2) হইতে দেখা যায় যে, A, B, C এর ল. সা. গু. অবশ্যই L ও C এর গুণিতক হইবে।

অতএব, নির্ণেয় ল. সা. গু.=M.

স্থতরাং, A, B, C, D ইত্যাদি দারা স্থাচিত রাশিমালাসমূহের ল. দা. গু. নির্ণয় করিতে ইইলে, প্রথমে A ও B এর ল. দা. গু.; তৎপরে এই লব্ধ ল. দা. গু. ও C এর ল. দা. গু., তৎপরে এই শেষোক্ত ল. দা. গু. ও D এর ল. দা. গু., ইত্যাদিক্রমে ল. দা. গু.-সমূহ নির্পুয় করিয়া যাইতে হয়। এইরূপ প্রক্রিয়ালব্ধ সর্ক্ষণেষ ল. দা. গু.ই নির্ণেয় ল. দা. গু. ইইবে।

छिका.। न. मा. अ. निर्भय कतः

$$6x^2 - 11x + 3$$
, $4x^2 - 4x - 3$ এবং $6x^2 + 25x - 9$ এর ৷

$$6x^{2}-11x+3 = 6x^{2}+25x-9 = (1 - 3x-1) = 6x^{2}-11x+3 = (2x-3) = 6x^{2}-11x+3 = (2x-3) = 6x^{2}-11x+3 = (2x-3) = 6x^{2}-11x+3 = (2x-3) = (2x-3)$$

অতএব, $6x^2 - 11x + 3$ এবং $6x^2 + 25x - 9$ এর গ. সা. গু. = 3x - 1.

স্কুতরাং, এই রাশিমালা চুইটির ল. সা. গু.

$$= \frac{6x^2 - 11x + 3}{3x - 1}(6x^2 + 25x - 9)$$
$$= (2x - 3)(6x^2 + 25x - 9)$$
$$= 12x^3 + 32x^2 - 93x + 27.$$

এখন, $4x^2-4x-3$ এবং $12x^3+32x^2-93x+27$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\begin{array}{c}
4x^{2} - 4x - 3 \\
12x^{3} + 32x^{2} - 93x + 27 \\
12x^{3} - 12x^{2} - 9x \\
44x^{2} - 84x + 27 \\
44x^{2} - 44x - 33 \\
-20) - 40x + 60 \\
2x - 3
\end{array}$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিসমূহের গ. সা. গু. =2x-3.

স্থানাং, তাহাদের ল. সা. গু.
$$=\frac{4x^2-4x-3}{2x-3}(12x^3+32x^2-93x+27)$$
 $=(2x+1)(12x^3+32x^2-93x+27)$ $=24x^4+76x^3-154x^2-39x+27$:

প্রগ্রমালা 87

ল, সা. গু. নির্ণয় কর:

ল. সা. গু. নিণয় কর:
1.
$$3x^2 - 10x - 8$$
, $4x^2 - 20x + 9$ এবং $6x^2 + x - 2$ এর।

2.
$$3x^2-23x-8$$
, $6x^2-7x-3$ 43 ? $2x^2-11x+12$ 43 !

3.
$$6x^2 - 19x + 10$$
, $12x^2 - 11x + 2$ এবং $8x^2 + 10x - 3$ এর।

4.
$$2x^4 + 4x^3 + x^2 + 6x - 3$$
, $4x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 6x + 3$

$$4x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 6x + 3$$

$$4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 3x - 3$$

প্ৰাধাৰণ অধ্যায় জটিল ভগ্নাংশ (Harder Fractions)

164. যোড়শ অধ্যায়ে বর্ণিত ভগ্নাংশ হইতে জটিলতর ভগ্নাংশ সম্বন্ধে এক্ষণে আলোচনা করা যাইতেছে।

I. ভগ্নাংশের লখিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন

(Reductions of Fractions to lowest terms)

165. কোন ভগ্নাংশের হর ও লবে, যদি কোন গুণনীয়ক সাধারণ না থাকে, তবে সেই ভগ্নাংশকে লখিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ (fractions reduced to its lowest terms) বলা হয়। যে সকল ক্ষেত্রে, হর ও লবকে পর্য্যবেক্ষণ দ্বারাই গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়, সেই সকল ক্ষেত্রে হর ও লব হইতে সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিয়াই ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত করিতে হয়। অন্তথায়, হর ও লবের প্রত্যেককে উহাদের গ. সা. গু. দ্বারা ভাগ করিয়া লঘিষ্ঠ আকার নির্ণয় করিতে হয়।

উলা, 1. লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc}.$$

প্ৰদত্ত ভগ্নাংশ =
$$\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{(a+b+c)(bc+ca+ab)}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$$

$$bc + ca + ab$$

উদা. 2. "স্বল কর:
$$\frac{8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}$$
.

প্ৰাণ
$$= \frac{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)}{3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)} = 1.$$

[উদা. 1, নিয়ম 132.]

উলা. 3. লখিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর:

$$\frac{3x^3 - 27ax^2 + 78a^2x - 72a^3}{2x^3 + 10ax^2 - 4a^2x - 48a^3}$$
. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889.]

লব =
$$3(x^3 - 9ax^2 + 26a^2x - 24a^3)$$
.
হব = $9(x^3 + 5ax^2 - 2a^2x - 24a^3)$.

এখন, ইহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\begin{array}{r} x^3 + 5ax^2 - 2a^2x - 24a^3 \\ x^3 - 9ax^2 + 26a^2x - 24a^3 \\ 14ax) 14ax^2 - 28a^2x \\ \hline x - 2a \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x-2a \\ x^3-9ax^2+26a^2x-24a^3 \\ \hline x^3-2ax^2 \\ \hline -7ax^2+26a^2x-24a^3 \\ -7ax^2+14a^2x \\ \hline 12a^2x-24a^3 \\ 12a^2x-24a^3 \end{array}$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. =x-2a.

স্থতরাং, নির্ণেয় ফল =
$$\frac{3(x^3 - 9ax^2 + 26a^2x - 24a^3) \div (x - 2a)}{2(x^3 + 5ax^2 - 2a^2x - 24a^3) \div (x - 2a)}$$
$$= \frac{3(x^2 - 7ax + 12a^2)}{2(x^2 + 7ax + 12a^2)}$$

উদা. 4.
$$\frac{2x^4-x^3-9x^2+13x-5}{7x^3-19x^2+17x-5}$$
 কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর। $[$ কলিঃ প্রবেশিকা, $1870.]$ e

প্রদত্ত ভগ্নাংশটির লব ও হরের গ. সা. গু. নিম্নোক্ত প্রকারে নির্ণয় করা যায় ;

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. = $x^2 - 2x + 1$.

স্থতরাং, নির্ণেয় ফল

$$\frac{(2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5) + (x^2 - 2x + 1)}{(7x^3 - 19x^2 + 17x - 5) + (x^2 - 2x + 1)} = \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x - 5}$$

প্রমাল 88

লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর:

1.
$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2}$$

3.
$$\frac{a^3 + 2a^2b - 2ab^2 + 3b^3}{a^3 - 5a^2b + 5ab^2 - 4b^3}$$
.

9.
$$\frac{2x^3 + 3ax^2 + 5a^2x - 21a^3}{4x^3 - 12ax^2 + 19a^2x - 15a^3}$$

11.
$$\frac{9x^3 - 7a^2x - 2a^3}{9x^3 + 6ax^2 - 5a^2x - 2a^3}.$$

13.
$$9x^4 + 30x^3 + 12x^2 - 6x - 45 \\ 8x^4 + 28x^3 + 16x^2 - 4x - 48$$

$$44. \quad \begin{array}{ll} 6a^6 - 9a^5b + a^4b^2 + 3a^3b^3 - a^2b^4 \\ 4a^5 - 6a^4b + \overline{3}a^2b^3 - \overline{a}b^4 \end{array}.$$

$$4a^{3} - 6a^{2}b + 3a^{2}b^{3} - ab^{2}$$
15.
$$\frac{24x^{6} + 16x^{4}y - 28x^{3}y^{2} - 24x^{2}y^{3} - 12xy^{4}}{45x^{4}y + 30x^{3}y^{2} - 15x^{2}y^{3} - 20xy^{4} - 10y^{5}}.$$

16.
$$\frac{(b+c)^3(b-c)+(c+a)^3(c-a)+(a+b)^3(a-b)}{(b+c)^2(b-c)+(c+a)^2(c-a)+(a+b)^2(a-b)}$$

17.
$$\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)-(yz+x)(zx+y)(xy+z)}{1-x^2-y^2-z^2-2xyz}$$

18.
$$\frac{(x+y-2z)^3+(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3}{12(x+y-2z)(y+z)(y+z-2x)}$$

19.
$$\frac{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x-z) + (y-z)(y-x) + (z-x)(z-y)}$$

20.
$$\frac{7x^3 - 2x^2y - 63xy^2 - 18y^3}{5x^4 - 3x^3y - 43x^2y^2 + 27xy^3 - 18y^4}.$$

2. $\frac{x^3-7x+6}{x^3+2x^2-13x+10}$

4.
$$\frac{x^4 + (2b^2 - a^2)x^2 + b^4}{x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 - b^4}$$

6.
$$1 + 3x - x^3 - 3x^4 - x + 2x^2 + x^3 + 3x^4$$

$$8. \quad \frac{x^4 + x^2 + 25}{x^4 - 9x^2 + 30x - 25}.$$

12.
$$\frac{2a^3 - 16a^2b + 44ab^2 - 42b^3}{3a^3 + 6a^2b - 24ab^2 - 63b^3}.$$

$$\frac{2a^3 - 16a^2b + 44ab^2 - 42b^3}{3a^3 + 6a^2b - 24ab^2 - 63b^3}$$

পিশ্বাব, 1912.]

II. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ

166. যেহেতু, $\frac{p}{a} + \frac{q}{a} + \frac{r}{a} + \cdots = \frac{p+q+r+\cdots}{a}$, অতএব, দেখা যায় যে, সাধারণ হরবিশিষ্ঠ ভগ্নাংশসমূহের যোগফল নির্ণয় করিতে হইলে, ভগ্নাংশসমূহের সাধারণ হরটিকে যোগফলের হর এবং লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে যোগফলের লবরূপে লইলেই, নির্ণেয় যোগফল পাওয়া যায়।

ভগ্নাংশসমূহ সাধারণ হরবিশিষ্ট না হইলে, 108 নিয়মে প্রদত্ত পদ্ধতি অমুসারে উহাদিগের প্রত্যেককে তুল্য সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্ত্তিত করিয়া উপরোক্ত। প্রণালী অমুসারে কার্য্য করিতে হয়।

উপা. 1. সরল কর ঃ
$$(x-a)^n + \frac{2a}{(x-a)^{n-1}} + \frac{2a}{(x-a)^{n-2}}.$$
প্রদত্ত রাশি = $\frac{a^2}{(x-a)^n} + \frac{2a(x-a)}{(x-a)^n} + \frac{(x-a)^2}{(x-a)^n} = \frac{a^2+2a(x-a)+(x-a)^2}{(x-a)^n} = \frac{\{a+(x-a)\}^2}{(x-a)^n} = \frac{x^2}{(x-a)^n}.$

উন্না. 2. সরল কর :
$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x^2+4} + \frac{32}{x^4+16}$$

এইপ্রকার রাশিসমূহকে সরল করিতে হইলে, প্রথমে স্থাবিধামত যে কোন তুইটি পদকে যোগ করিয়া, লব্ধ যোগফলের সহিত যে কোন অপর একটি তৃতীয় প্দ, ইত্যাদিরূপে, ক্রমশঃ যোগ করিয়া যাইতে হয়।

এখন,
$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x+2) - (x-2)}{x^2 - 4} = \frac{4}{x^2 - 4} \; ;$$

$$\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{4}{x^2 + 4} = \frac{4(x^2 + 4) - 4(x^2 - 4)}{x^4 - 16} = \frac{32}{x^4 - 16} \; ;$$
 এবং,
$$\frac{32}{x^4 - 16} + \frac{32}{x^4 + 16} = \frac{32(x^4 + 16) + 32(x^4 - 16)}{x^8 - 256} = \frac{64x^4}{x^8 - 256} .$$
 [নির্নেয় ফল]

|. 3. সরল কর:
$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{a+4b}$$

় সকল পদগুলিকে একত্র লইয়া সরল না করিয়া উহাদিগকে কয়েকটি বিভাগে ভাগ করিয়া লওয়াই স্থবিধাজনক। -

প্রাপ্ত রাশি
$$= \left\{ \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} \right\} - \left\{ \frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b} \right\}.$$
এখন,
$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+2b} = \frac{(a+2b) - (a+b)}{(a+b)(a+2b)} = \frac{b}{(a+b)(a+2b)};$$
এবং
$$\frac{1}{a+3b} - \frac{1}{a+4b} = \frac{(a+4b) - (a+3b)}{(a+3b)(a+4b)} = \frac{b}{(a+3b)(a+4b)}$$
whats,
$$\frac{b}{(a+b)(a+2b)} - \frac{b}{(a+3b)(a+4b)}$$

$$= \frac{b(a+3b)(a+4b) - b(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)};$$
এখন, ইহার লব =
$$b(a^2+7ab+12b^2) - b(a^2+3ab+2b^2)$$

$$= b(4ab+10b^2) = 2b^2(2a+5b).$$
প্রতরাং, নির্মে ফল =
$$\frac{2b^2(2a+5b)}{(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)};$$

উদা. 4. সরল কর:
$$\frac{x+3}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{x^2-4x+3} + \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

পিঞ্জাব, 1904.]

প্রথম হর =
$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$
.

দিতীয় হর = $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$.

তৃতীয় হর = $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

হরগুলির ল. সা. গু. = $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

মতরাং, প্রান্ত রাশি =
$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)} + \frac{x+2}{(x-3)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(x+3)(x-3) + (x+2)(x-2) + (x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{x-9+x^2-4+x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{3x^2-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

উদা. 5., সরল কর:

$$\frac{x-y}{(a+x)(a+y)} + \frac{y-z}{(a+y)(a+z)} + \frac{z-x}{(a+z)(a+x)}$$
. [এলাহাবাদ, 1915.]
হরগুলির ল. সা. গু. = $(a+\omega)(a+y)(a+z)$.
∴ প্রদত্ত রাশি = $\frac{(a+z)(x-y)+(a+x)(y-z)+(a+y)(z-x)}{(a+x)(a+y)(a+z)}$.

ইহার লব =
$$a\{(x-y)+(y-z)+(z-x)\}+z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)$$

= 0. [সরল করিয়া]

'. প্রদান্ত রাশি =
$$\frac{0}{(a+x)(a+y)(a+z)} = 0$$
.

অশুপ্রকারে ঃ থেছে
$$\frac{1}{a+y} - \frac{1}{a+x} = \frac{(a+x)-(a+y)}{(a+x)(a+y)} = \frac{x-y}{(a+x)(a+y)}$$
, $\frac{1}{a+z} - \frac{1}{a+y} = \frac{(a+y)-(a+z)}{(a+y)(a+z)} = \frac{y-z}{(a+y)(a+z)}$, প্রং $\frac{1}{a+x} - \frac{1}{a+z} = \frac{(a+z)-(a+x)}{(a+z)(a+x)} = \frac{z-x}{(a+z)(a+x)}$,

অতএব, প্রদত্ত রাশি = $\frac{1}{a+y}$, $\frac{1}{a+x}$ + $\frac{1}{a+z}$ - $\frac{1}{a+y}$ + $\frac{1}{a+x}$ - $\frac{1}{a+z}$ = 0.

উদা. 6. স্বল কর:
$$\frac{a}{a+b} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$$
.

এইপ্রকার রাশিমালার সহিত স্থবিধামত অন্ত একটি ভগ্নাংশ যোগ ও বিয়োগ করিয়া রাশিমালাকে অতি সহজে সরল করা যায়। যথা, বর্ত্তমান ক্ষেত্রে, $\frac{a}{a-b}$ ভগ্নাংশটিকে প্রদন্ত রাশিমালার সহিত যোগ ও বিযোগ করিয়া,

প্রদান বিশালা =
$$\frac{a}{a-b} + \frac{a}{a+b} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4} - \frac{a}{a-b}$$
.

এখন, $\frac{a}{a-b} + \frac{a}{a+b} = \frac{a(a+b)+(a-b)a}{a^2-b^2} = \frac{2a^2}{a^2-b^2}$.

সাবার, $\frac{2a^2}{a^2-b^2} + \frac{2a^2}{a^2+b^2} = \frac{2a^2(a^2+b^2)+2a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4} = \frac{4a^4}{a^4-b^4}$;

এবং $\frac{4a^4}{a^4-b^4} + \frac{4a^2b^2}{a^4-b^4} = \frac{4a^4+4a^2b^2}{a^4-b^4} = \frac{4a^2(a^2+b^2)}{a^4-b^4} = \frac{4a^2}{a^2-b^2}$;

... প্রদান বালি = $\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{a-b} = \frac{4a^2-a(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{3a^2-ab}{a^2-b^2} = \frac{a(3a-b)}{a^2-b^2}$.

প্রথমালা 89

সরল কর:

1.
$$\int \frac{x}{3x-y} + \frac{x}{3x+y} + \frac{6x^2}{9x^2 + y^2}.$$
2.
$$\frac{1}{x-3a} - \frac{1}{2x+6a} - \frac{x-9a}{2x^2 + 18a^2}.$$
3.
$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{ab(a-b)^2} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} - 2.$$

4.
$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$
. 5. $\frac{1}{x-a} - \frac{2}{2x+a} + \frac{1}{x+a} - \frac{2}{2x-a}$.

6.
$$\frac{3}{a-x} - \frac{1}{x+3a} + \frac{3}{a+x} + \frac{1}{x-3a}$$
.

7.
$$\frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{1-x^2}$$
 8. $(a-\frac{a-c}{b)(x-a)} + (b-\frac{b-c}{a)(x-b)}$

9.
$$\bar{x}^2 - \frac{1}{3x + 2} + \bar{x}^2 - \frac{1}{5x + 6} + \bar{x}^2 - \frac{2}{8x + 15}$$

10.
$$x^2 + \frac{1}{5ax + 4a^2} + \frac{1}{x^2 + 11ax + 28a^2} + \frac{2}{x^2 + 20ax + 91a^2}$$

11.
$$\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+5x+6}$$

$$x 12.$$
 $\frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{2x}{1+x^2+x^4}$.

$$\frac{1}{1+x+x^2} - \frac{1}{1-x+x^2} + \frac{2x}{1-x^2+x^4}.$$

14.
$$\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x^2+2x+4} + \frac{6x}{x^3+8}$$

$$\frac{1}{2x^2 - 6ax + 9a^2} - \frac{1}{2x^2 + 6ax + 9a^2} + \frac{12ax}{4x^4 - 81a^4}.$$

16.
$$(x+a)(x+2a) + (x+2a)(x+3a) + (x+3a)(x+4a)$$
.

17/
$$(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+d)$$

18.
$$a^2 - \frac{1}{3a + 2} + \frac{2}{a^2 - 5a + 6} + \frac{3}{a^2 - 4a + 3}$$

19.
$$\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+2}$$
. [এলাহাবাদ, 1912.]

$$20.\sqrt{\frac{2(x-3)}{(x-4)(x-5)} - \frac{x-1}{(x-3)(x-4)} - \frac{x-2}{(x-5)(x-3)}}$$
. [এলাহাবাদ, 1911.]

21.
$$\frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} - \frac{16}{1-a^{16}}$$

• 22.
$$\sqrt{\frac{a+x}{x}} - \sqrt{\frac{x}{a+x}}^2 - (\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}})^2 + \frac{x^2}{a(a+x)}$$
.

23.
$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

24.
$$x^{2} - \frac{1}{5x+6} - \frac{2}{x^{2}-4x+3} + \frac{1}{x^{2}-3x+2}.$$
25.
$$1 + \frac{a}{x-a} + \frac{bx}{(x-a)(x-b)} + \frac{cx^{2}}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$+ \frac{dx^{3}}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$$

III. তুরুহ (Complex), এবং ধারাবাহিক বা ক্রমিক (Continued) ভগ্নাংশ

167. দুক্রহ বা জ্ঞাতিল ভগ্নাংশ (Complex Fractions)ঃ যে ভগ্নাংশের হর ও লবের একটি বা উভয়ই ভগ্নাংশ, তাহাকে **তুরুহ** বা **জটিল** ভগ্নাংশ বলে। যথা,

$$\frac{x}{y}$$
, $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{a}$ ইত্যাদির প্রত্যেকটি তুরুহ বা জটিল ভগ্নংশ। স্পষ্টতঃ, ইহারা z b

ভগ্নাংশের ভাগবিশেষ।

এই প্রকার ভগ্নাংশের সরলীকরণ-প্রণালী 111 নিরমে ব্যাখ্যা করা হইযাছে।

168. প্রাবাহিক বা ক্রমিক ভগ্লাংশ (Continued Fractions) ঃ

$$x+\frac{a}{b+-\frac{c}{c}}$$
 বা $\frac{x}{y+-\frac{z}{c}}$, এই জাতীয় ভগ্নাংশকে $x+\frac{c}{b}$ $x+\frac{c}{c}$ $x+\frac{c}{c}$

ধারাবাছিক বা ক্রমিক ভগাংশ বলে।

এইরূপ ভগ্নাংশকে সরল করিতে হইলে, পাটীগণিতের স্থায়, সর্ব্ধনিম্ন অংশ হইতে সরলীকরণ-প্রক্রিয়া আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ উপরের দিকে অগ্রসর হইতে হয়।

উদা. 1. শ্রল কর: -1+

$$2(a+b) - \frac{a+b}{1-\frac{b}{a+b}}$$

বেহেজু, $1-\frac{b}{a+b}=\frac{a+b-b}{a+b}=\frac{a}{a+b}$, অতএব, সর্বানিয় রাশি হইতে সরল করিতে আরম্ভ করিয়া,

প্রাশি =
$$-1+$$

$$2(a+b) - \frac{a+b}{a} \qquad -1 + \frac{a}{2(a+b) - \frac{(a+b)^2}{a}}$$

$$= -1 + \frac{a}{2a^2 + 2ab - (a^2 + 2ab + b^2)}$$

$$= -1 + \frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{-a^2 + b^2 + a^2}{a^2 - b^2} - \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

উদা. 2. गतन कत ः

প্রথম উদাহরণে প্রদর্শিত নিয়ম অনুসারে,

প্রদন্ত রাশি =
$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} - \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} - \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} - \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}+x}$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2x}+1+x} = \frac{1+2x}{2+3x}.$$

উদা. 3. সমাধান করঃ

উদা. 2 এ नक्त फन नरेग़ा,

বাম পক্ষ
$$\frac{1+2x}{2+3x} = \frac{3}{4}$$
 ,

অথবা,
$$3(2+3x)=4(1+2x)$$
; অথবা, $6+9x=4+8x$; অথবা, $9x-8x=4-6$, [পক্ষান্তর করিয়া] অথবা, $x=-2$.

প্রথমালা 90

সরল কর:

1.
$$\frac{\left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x} - \frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2}\right)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)}.$$

[বোম্বাই প্রবেশিকা, 1926.]

2.
$$\frac{\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}}{\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} + \frac{c+a}{c-a} + 3}$$
 3.
$$\frac{\frac{a^2}{x-a} + \frac{b^2}{x-b} + \frac{c^2}{a-c}}{\frac{ax}{x-a} + \frac{bx}{x-b} + \frac{cx}{x-c} - (a+b+c)}$$

4.
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \times \left\{1 \cdot \cdot \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right\}$$
. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1921.]

5.
$$\frac{5 \cdot 1}{1 + \dots + \frac{a}{1 + a + \frac{2a^2}{1 - a}}$$
6. $1 + \frac{1}{a \div x} + 1 - \frac{1}{a \div x} + 1 + \frac{1}{a^2 \div x^2}$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1870.]

7.
$$\frac{\frac{a}{a-x} + \frac{b}{b-x} + \frac{c}{c-x}}{\frac{3}{x} - \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-c}}$$

8.
$$\frac{\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}}{\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right)} \times \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab}}.$$

9.
$$\frac{\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2(x-3)}}{\frac{1}{(x-2)(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x-3)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}}.$$

10.
$$\frac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}{\frac{x-y}{x+y} - \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}}$$
. 11.
$$b + \frac{c}{d+\frac{\epsilon}{x}}$$
 12.
$$\frac{x-\frac{x-1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}}$$

13.
$$a^2 + \frac{a^3 + b^3}{a^2 - \frac{a^3 + b^3}{a + \frac{b^2}{a - b}}}$$

14.
$$m^2 - \frac{m}{m^3 - 1}$$
. $m + m + 1$

15.
$$\frac{\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x + y}}{x + y - \frac{(x - y)^2}{x + y}} - 1$$

16.
$$\frac{x^2(x+2)}{4x+8+\frac{2x^4-32}{x+2+\frac{(x-2)(x-2)}{x+2}}}$$

সমাধান কর:

17.
$$-1$$
 4 3 $x + \frac{1}{2-x}$

18.
$$2x = 1$$
. $1 + \frac{1}{1 + \frac$

19.
$$1 + \frac{13}{3 + \frac{1}{x}}$$

$$1 + \frac{13}{2 + \frac{1}{3 + 1}}$$
 $\frac{13}{9}$ 20. $\frac{2}{3}$ $a + \frac{2}{3}$

169. চক্র-ক্রম (Cyclic order)-বিশিষ্ট ভগ্নাংশ্য অন্তর্গত অক্ষরসমূহ চক্র-ক্রমে (in cyclic order) থাকিলে, উহাদিগকে সহজে সরল করা যায়।

. সরল কর:
$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}$$
.

প্রথম পদের হরে (denominator এ) দেখা যায় যে, a-c এর অক্ষরদ্বয় চক্র-ক্রমে নাই। কিন্তু,

বেহেন্ত্ৰ,
$$a-c=-(c-a)$$
, অতএব, $(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)$.

অতএব, প্ৰথম ভগ্নাংশ = $-\frac{bc}{(a-b)(c-a)}$;

এইরূপে, দ্বিতীয় ভগ্নাংশ = $-\frac{ca}{(b-c)(a-b)}$;

এবং তৃতীয় ভগ্নাংশ = $-\frac{ab}{(c-a)(b-c)}$;

হর তিনটির ল. সা. শু. = $(b-c)(c-a)(a-b)$.

বী---২২

:. প্রদন্ত রাশিমালা =
$$-\left[\frac{bc}{(a-b)(c-a)} + \frac{ca}{(b-c)(a-b)} + \frac{ab}{(c-a)(b-c)}\right]$$

$$= -\frac{bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$= \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 1.$$

170. চক্র-ক্রমবিশিষ্ট ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয় ক্রেক্তি বিশেষ ফল: চক্র-ক্রমবিশিষ্ট ভগ্নাংশ সবল কবিতে নিম্নলিখিত সহজসিদ্ধ ফলগুলি অত্যস্ত উপযোগী।

यिन
$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} = X$$
, $\frac{1}{(b-c)(b-a)} = Y$ ध्वर $\frac{1}{(c-a)(c-b)} = Z$ ह्य,
তবে, (i) $X+Y+Z=0$, (ii) $aX+bY+cZ=0$; (iv) $bcX+caY+abZ=1$;

(iii)
$$a X + b Y + c^3 Z = a + b + c$$
:

(vi)
$$a^{4}X + b^{4}Y + c^{4}Z = a^{2} + b^{2} + c^{2} + bc + ca + ab$$
.

উদা. 1. সবল কব ঃ
$$a^2-bc$$
 b^2-ca c^2-ab $(a-b)(a-c)^+(b-c)(b-a)^+(c-a)(c-b)^+$ প্রদেও বাশি = $(a^2-bc)X+(b^2-ca)Y+(c^2-ab)Z$, [উপরোক্ত সঙ্গেত অনুসারে] • $a^2X+b^2Y+c^2Z-(bcX+caY+abZ)$, $[1ii]$ এবং (iv) এব ফল হইতে

উদা. 2. স্বল কব:

$$\frac{pa^{3} + qa^{2}bc + ra}{(a - b)(a - c)} + \frac{pb^{3} + qab^{2}c + rb}{(b - c)(b - a)} + \frac{pc^{3} + qabc^{2} + rc}{(c - a)(c - b)}.$$

প্রদত্ত রাশি

=
$$(pa^3 + qa^2bc + ra)X + (pb^3 + qab^2c + rb)Y + (pc^3 + qabc^2 + rc)Z$$
,
[উপরোক্ত সঙ্কেত অমুসারে]

$$= p(a^3X + b^3Y + c^3Z) + qabc(aX + bY + cZ) + r(aX + bY + cZ)$$

= $p(a + b + c) + qabc.0 + r.0 = p(a + b + c)$.

উলা. 3. দেখাও যে,

$$\frac{1}{(l-m)(l-n)(x+l)} + (m-n)(m-l)(x+m) + \frac{1}{(n-l)(n-m)(x+n)} \cdot = \frac{1}{(x+l)(x+m)(x+n)}.$$

x+l এর পরিবর্ত্তে a, x+m এর পরিবর্ত্তে b, x+n এর পরিবর্ত্তে c বসাইয়া, a-b=l-m, a-c=l-n, b-c=m-n, প্রভৃতি,

171. ভগ্লাংশ সম্বনীয় অভেদাবলী (Fractional Identities):

বিবিধ উদাহরণঃ

উন্ধা. 1. দেখাও যে, $\frac{x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{x} - \frac{a^2}{x^3} + \frac{a^4}{x^5} - \frac{a^6}{x^7} + \frac{a^8}{x^7(x^2 + a^2)}$. x কে $x^2 + a^2$ ছারা ভাগ করা যাউক:

$$x^{2} + a^{2} x + \frac{a^{2}}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{a^{2}}{x^{3}} + \frac{a^{4}}{x^{5}} - \frac{a^{6}}{x^{7}} - \frac{a^{2}}{x^{7}} \right)$$

$$-\frac{a^{2}}{x} - \frac{a^{4}}{x^{3}}$$

$$-\frac{a^{2}}{x} - \frac{a^{4}}{x^{3}}$$

$$\frac{a^{4}}{x^{3}} + \frac{a^{6}}{x^{5}}$$

$$-\frac{a^{6}}{x^{5}} - \frac{a^{8}}{x^{7}}$$

$$-\frac{a^{6}}{x^{5}} - \frac{a^{8}}{x^{7}}$$

অতএব, ভাগ-কার্য্যে আব অগ্রসব না হইযা, এখন,

$$x^{2} + a^{2} = \frac{1}{x} - \frac{a^{2}}{x^{3}} + \frac{a^{4}}{x^{5}} - \frac{a^{6}}{x^{7}} + \frac{\binom{a^{8}}{x^{7}}}{x^{2} + a^{2}}$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{a^{2}}{x^{3}} + \frac{a^{4}}{x^{5}} - \frac{a^{6}}{x^{7}} + \frac{a^{8}}{x^{7}(x^{2} + a^{2})}$$

উদা. 2. $x = \frac{4ab}{a+b}$ হইলে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b}$ এব মান নির্ণয কব। কিল:, 1865]

প্ৰাপত্ত বাণি =
$$\binom{x+2a}{x-2a} - 1$$
 + $\binom{x+2b}{x-2b} - 1$ + 2
$$= \frac{4a}{x-2a} + \frac{4b}{x-2b} + 2$$

$$= \frac{4}{(x-2a)(x-2b)} \{a(x-2b) + b(x-2a)\} + 2$$

$$= \frac{4}{(x-2a)(x-2b)} \{(a+b)x - 4ab\} + 2$$

$$= 0 + 2$$

$$= 0 + 2$$

$$= 0 + 2$$

$$= 0 + 2$$

$$= 0 + 2$$

উপা. 3. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ হুইলে, দেখাও যে,

,
$$a^7 + b^7 + c^7 = \frac{1}{(a+b+c)^7} = a^7 + b^7 + c^7$$

 $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc+ca+ab}{abc}$ যেহেত্

$$\therefore (a+b+c)(bc+ca+ab)=abc,$$

অথবা,
$$(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$$

অথবা $(b+c)(c+a)(a+b)=0$.

ে উৎপাদকগুলিব যে কোন একটি, ধব, b+c=0

অতএব, b=-c. ... $b^7=(-c)^7=-c^7$. অথবা. $b^7+c^7=0$.

$$^{\prime}$$
 whats, carego $b=-c, \ \frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$, $\ \therefore \ \frac{1}{b^7}=\left(-\frac{1}{c}\right)^7=-\frac{1}{c^7}$, "

$$\frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{a^7} - \frac{1}{c^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{a^7} = \frac{1}{(a+b+c)^7} ,$$
['.' $b+c=0$.]

এইরপে,
$$\frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{a^7} = \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7}$$
. ['.' $b^7 + c^7 = 0$.]

অতএব, অভেদটি প্রতিপন্ন হইল।

উলা. 4. লখিঠ আকারে পরিবর্ত্তন কর:

$$\frac{x^2 - (y - z)^2}{(x + z)^2 - y^2} + \frac{y^2 - (x - z)^2}{(x + y)^2 - z^2} + \frac{z^2 - (x - y)^2}{(y + z)^2 - x^2}$$
 [क्रि:, 1866.]

এখন, প্রথম ভগ্নাংশ =
$$\frac{\{x + (y - z)\}\{x - (y - z)\}}{\{(x + z) + y\}\{(x + z) - y\}}$$

$$= \frac{(x + y - z)(x - y + z)}{(x + z + y)(x + z - y)} = \frac{x + y - z}{x + y + z} .$$

এইকুপে, দিতীয় ভগ্নাংশ = $\frac{(y+x-z)(y-x+z)}{(x+y+z)(x+y-z)} = \frac{y-x+z}{x+y+z}$

এবং তৃতীয় ভগ্নাংশ =
$$\frac{(z+x-y)(z-x+y)}{(y_++z+x)(y+z-x)} = \frac{z+x-y}{x+y+z} \, .$$

অতএব, প্রান্থ রাশি = $\frac{(x+y-z)+(y-x+z)+(z+x-y)}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$.

উদা. 5. x+y+z=xyz হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{y+z}{1-yz} + \frac{z+x}{1-zx} + \frac{x+y}{1-xy} = \frac{y+z}{1-yz} \cdot \frac{z+x}{1-zx} \cdot \frac{x+y}{1-xy}.$$

থেছেছু, x + y + z = xyz, অতএব, y + z = xyz - x = x(yz - 1).

মূত্রাং,
$$\frac{y+z}{1-yz} = \frac{x(yz-1)}{1-yz} = -x.$$

এইরূপে,
$$\frac{z+x}{1-zx} = -y$$
 এবং $\frac{x+y}{1-xy} = -z$.

지지 위한 :
$$\frac{y+z}{1-yz} + \frac{z+x}{1-zx} + \frac{x+y}{1-xy}$$

: $-x-y-z = -(x+y+z) = -xyz$
: $\frac{y+z}{1-yz} \cdot \frac{z+x}{1-xx} \cdot \frac{x+y}{1-xy}$

উপা. 6. দেখাও বে,
$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right).$$
[কলিঃ, 1867.]

$$\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c^2}{a^2} + 2 + \frac{a^2}{c^2}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$= 4 + a^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{1}{a^2} \left(b^2 + c^2\right)$$

$$= 4 + \frac{a^2}{bc} \left(\frac{bc}{b^2} + \frac{bc}{c^2}\right) + \frac{bc}{a^2} \left(\frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{bc}\right)$$

$$= 4 + \frac{a^2}{bc} \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \frac{bc}{a^2} \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

$$= 4 + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{bc}{a^2}\right);$$

$$\therefore \text{ ATTERS ATTERS$$

. 7.
$$2s = a + b + c$$
 ইইলে, দেখাও যে,
$$\frac{1}{a-a} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} - \frac{1}{a} = \frac{abc}{a(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

এখন,
$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} = \frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$
এখন,
$$\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s} = \frac{s-(s-c)}{s(s-c)} = \frac{c}{s(s-c)}$$

অতএব, প্রদন্ত রাশি =
$$\frac{c}{(s-a)(s-b)} + \frac{c}{s(s-c)} = c \cdot \frac{s(s-c) + (s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= c \cdot \frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdot \frac{2s^2 - s(a+b+c)}{= 2s^2 - 2s^2 = 0.}$$

৷ ৪. দেখাও যে,

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)$$
=2(a+b+c).

$$a^2 + b^2 + c^2$$
 এর পরিবর্তে $2s^2$ বসাইয়া,
$$a^2 + b^2 - c^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - 2c^2 = 2(s^2 - c^2),$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - 2a^2 = 2(s^2 - a^2),$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = (a^2 + b^2 + c^2) - 2b^2 = 2(s^2 - b^2).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$= 2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)\left(s^2 - c^2\right) + 2\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)\left(s^2 - a^2\right) + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)\left(s^2 - b^2\right)$$

$$= 2\left\{\frac{1}{a}\left(2s^2 - b^2 - c^2\right) + \frac{1}{b}\left(2s^2 - c^2 - a^2\right) + \frac{1}{c}\left(2s^2 - a^2 - b^2\right)\right\}$$

$$= 2\left\{\frac{1}{a}\cdot a^2 + \frac{1}{b}\cdot b^2 + \frac{1}{c}\cdot c^2\right\} = 2(a+b+c).$$

THY. 9. CASTS CV,
$$\frac{a}{a^2-1} + \frac{a^2}{a^4-1} + \frac{a^4}{a^8-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+1}{a-1} - \frac{a^8+1}{a^8-1}\right)$$
.

$$\frac{a}{a^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{a^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+1)^2 - (a^2 + 1)}{a^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+1}{a-1} - \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}\right);$$

$$\frac{a^2}{a^4 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{a^4 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2 + 1)^2 - (a^4 + 1)}{a^4 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} - \frac{a^4 + 1}{a^4 - 1}\right);$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{a+1}{a-1} - \frac{a^2+1}{a^2-1} \right) + \left(\frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{a^4+1}{a^4-1} \right) + \left(\frac{a^4+1}{a^4-1} - \frac{a^8+1}{a^8-1} \right) \right\};$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \frac{a+1}{a-1} - \frac{a^8+1}{a^8-1} \right\}.$$

উদা. 10. দেখাও যে,

$$bc.\frac{a+d}{(a-b)(a-c)}+ac.\frac{b+d}{(b-a)(b-c)}+ab.\frac{c+d}{(c-a)(c-b)}=d.$$
 থেছেড়, $b-a=-(a-b),$ এবং $(c-a)(c-b)=[-(a-c)]\times[-(b-c)]=(a-c)(b-c);$

ে প্রাণি =
$$bc \cdot \frac{a+d}{(a-b)(a-c)} + ac \cdot \frac{-(b+d)}{(a-b)(b-c)} + ab \cdot \frac{c+d}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{bc(a+d)(b-c) - ac(b+d)(a-c) + ab(c+d)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$
এখন, লব = $abc\{(b-c) - (a-c) + (a-b)\}$

$$+ d\{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)\}$$

$$= d\{bc(b-c) - ac(a-c) + ab(a-b)\}$$

$$= d\{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)\}$$

$$= d(a-b)(a-c)(b-c).$$

স্থতরাং, প্রদত্ত রাশি = d.

উদা. 11. সরল কর:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}'^+ \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(x+b)}^+ (c-a)(\frac{c^2}{c-b)(x+c)}.$$

প্রদত্ত রাশি

স্থতরাং, প্রদত্ত রাশি = $\frac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

উদা. 12. সরল কর: $\frac{c^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

প্রদত্ত র
$$f^{[*]} = \frac{-b^3}{(a-b)(a-c)} \div \frac{-b^3}{(b-c)(a-b)} \div \frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$
$$= \frac{a^3(b-c) - b^3(a-c) + c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

এখন, লব =
$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$$

= $(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$.

মুতরাং, প্রদত্ত রাশি = a + b + c.

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative Method) 3*

বৈহেতু,
$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

.. প্রদত্ত রাশি

$$= \left\{ \frac{a^3}{(a-b)(b-c)} - \frac{a^3}{(a-c)(b-c)} \right\} + \frac{b^3}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^3 - b^3}{(a-b)(b-c)} - \frac{a^3 - c^3}{(a-c)(b-c)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{b-c} - \frac{a^2 + ac + c^2}{b-c}$$

$$= \frac{a(b-c) + (b^2 - c^2)}{b-c} = a + b + c.$$

. উপা. 13.
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ca} - \frac{1}{ab} = 0$$
 হইলো,
প্রমাণ কর যে, $a = b = c$.
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ca} - \frac{1}{ab} = 0.$$

অথবা.
$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 \right\} = 0.$$
 [হত XXIV, নিয়ম 133]

এখন, যেহেতু বামদিকের পদগুলির কোনটিই ঋণরাশি নহে, অতএব, উহাদের প্রত্যেকটিরই মান শৃন্ত না হইলে উহাদের যোগফল শৃন্ত হইতে পারে না।

সতএব,
$$\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$$
; $\therefore b = c$, $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = 0$; $\therefore c = a$, এবং $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$; $\therefore a = b$.

^{*} এই পদ্ধতি আমার বন্ধু এবং প্রিয় ছাত্র বাব্ বিমলাচরণ সোম (হেড, এসিষ্টাণ্ট, ফরেষ্ট, সার্জে, দেরাছন) এর সৌকক্তে প্রাপ্ত।

সহজ বীজগণিত

প্রথমালা 91

1. প্রমাণ কর:
$$\frac{a}{ax+x^2} + \frac{b}{bx+x^2} + \frac{c}{cx+x^2}$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{1}{a+x} - \frac{1}{b+x} - \frac{1}{c+x}.$$
 [বোধাই, 1920.]

2. yz + zx + xy = 1 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)} = 3.$$

abc=1 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=1+(b+c)(c+a)(a+b).$$

4. bc + ca + ab = 0 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^2 - bc} + b^2 - ca + c^2 - ab = 0.$$

5. x+y+z=1 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x+yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{y+zx}{(y+z)(y+x)} + \frac{z+xy}{(z+x)(z+y)} = 3.$$

6. x+y+z=xyz হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

7. x+y+z=0 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}\right) = 9.$$

8. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ হইলে, প্ৰমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3} = \frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

প্রমাণ কর:

9.
$$\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)} = 3.$$

10.
$$\frac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3}=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}.$$

11.
$$\frac{x^6}{x^2+y^2} = x^4 - x^2y^2 + y^4 - \frac{y^6}{x^2+y^2}$$
.

12.
$$\frac{x^6}{x^2-y^2} = x^4 + x^2y^2 + y^4 + \frac{y^6}{x^2-y^2}$$
.

13.
$$\frac{x^2yz + xy^2z + xyz^2}{x^2y^2z^2} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}.$$

14.
$$\frac{xy^2z^2 + yz^2x^2 + zx^2y^2}{x^2y^2z^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

15. •
$$\frac{3a-6}{(a-1)(a-2)(a-3)} = \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{1}{(a-3)(a-1)} + \frac{1}{(a-1)(a-2)}$$

16.
$$\frac{3x^2-14}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x-1}{(x+2)(x+3)} + \frac{x-2}{(x+3)(x+1)} + \frac{x-3}{(x+1)(x+2)}$$

17.
$$\frac{1-x}{1+x} = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \frac{2x^4}{1+x}$$
.

18.
$$x^2 - a^2 = \frac{a}{x^2} + \frac{a^3}{x^4} + \frac{a^5}{x^6} + \frac{a^7}{x^6(x^2 - a^2)}$$

19.
$$\frac{a^3}{x^3 + a^3} = \frac{a^3}{x^3} - \frac{a^6}{x^6} + \frac{a^9}{x^9} - \frac{a^{12}}{x^9(x^3 + a^3)}$$

$$=1-\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^6}{a^6}-\frac{x^9}{a^9}+\frac{x^{12}}{a^9(x^3+a^3)}$$

20.
$$\frac{x^4-1}{x+a} = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3 + \frac{a^4-1}{x+a}$$
.

21.
$$x = \frac{ab}{a+b}$$
 হইলে, $\frac{x+2a}{2b-x} + \frac{x-2a}{2b+x} + \frac{4ab}{x^2-4b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

22.
$$x = \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$
 হহলে, দেখাও বে, $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x+c}{x-c} - 3 = \frac{6abc}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

23.
$$x = \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$
 হৈলে, দেখাও যে,
$$\frac{a + 2x}{a - 2x} + \frac{b + 2x}{b - 2x} + \frac{c + 2x}{c - 2x} + 3 = \frac{6abc}{(a - 2x)(b - 2x)(c - 2x)}$$

সহজ বীজগণিত

24.
$$x = \frac{3abc}{ab+bc+ca}$$
 ইইলে, $\frac{x^2-(b+c)x}{(x-b)(x-c)} + \frac{x^2-(c+a)x}{(x-c)(x-a)} + \frac{x^2-(a+b)x}{(x-a)(x-b)}$ এর মান নির্ণয় কর।

25.
$$x = \frac{a-b}{a+b}$$
 এবং $y = \frac{a+b}{a-b}$ হইলে, $\frac{x^2-y^2+x}{y^2-x^2+y}$ এর মান নির্ণয় কর। $\left[$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{x(x+1)-y^2}{y(y+1)-x^2} =$ প্রভৃতি। $\left[$ কলিঃ প্রবেশিকা, 1883 . $\right]$

26.
$$x^2=a^2+b^2$$
 হইলে,
$$\frac{x^4+3abx^2-10a^2b^2}{x^4+7abx^2+10a^2b^2} \times \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$$
 এর মান নির্ণয় কর।

27.
$$x=a+b$$
 এবং $y=a-b$ হইলে,
$$\frac{x^2y^2+3(2x^2-y^2)ab-18a^2b^2}{y^4+9aby^2+18a^2b^2}\times\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$$
 এর মান নির্ণয় কর।

28.
$$x=a+b$$
 এবং $y=a-b$ হইলে,
$$\frac{x^4+abx^2-2a^2b^2}{x^2y^2+(x^2+2y^2)ab+2a^2b^2}-\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$$
 এর মান নির্ণয় কর।

সরল কর :

$$|9. \quad \frac{x^9}{x^3+1} + \frac{x^6}{x^3-1} + \frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{x^3-1}$$

30.
$$\frac{x^2 - (a - b)^2}{(x + b)^2 - a^2} + \frac{a^2 - (x - b)^2}{(x + a)^2 - b^2} + \frac{b^2 - (x - a)^2}{(a + b)^2 - x^2}.$$

31.
$$\frac{(a+2b)^2-b^2}{(a+b)^2-4b^2} + \frac{(a-b)^2-4b^2}{(a-2b)^2-b^2} + \frac{(2a+3b)^2-b^2}{(2a+b)^2-9b}$$

32.
$$\frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}.$$

33.
$$2s = a + b + c$$
 হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2(s-a)(s-b)}{ab}.$$

সরল কর:

34.
$$\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2} + \frac{c-a}{b^2-(c-a)^2} + \frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}.$$

35.
$$\frac{a+b}{2ab}(a+b-c) + \frac{b+c}{2bc}(b+c-a) + \frac{c+a}{2ca}(c+a-b)$$
.

36.
$$\frac{x+y}{2xy}(x^2+y^2-z^2)+\frac{y+z}{2yz}(y^2+z^2-x^2)+\frac{z+x}{2zx}(z^2+x^2-y^2).$$

37.
$$\frac{a+b}{2ab}(a^3+b^3-c^3)+\frac{b+c}{2bc}(b^3+c^3-a^3)+\frac{c+a}{2ca}(c^3+a^3-b^3).$$

38.
$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
, $y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ca}$ এবং $z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ হইলে, $(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z$ এর মান লুখিছ আকারে নির্ণয় কর ম

39.
$$p = \frac{a-b}{x-c}$$
, $q = \frac{b-c}{x-a}$, $r = \frac{c-a}{x-b}$ হইলে, $p+q+r+pqr$ এর মান

40. CFRYS CT,
$$\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right)^2 = \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}$$

41. (FING (I),
$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} = \frac{1}{1-x} - \frac{16x^{15}}{1-x^{16}}$$
.

সরল কর :

42.
$$(a-b)(a-c) + (b-a)(b-c) + (c-a)(c-b)$$

43.
$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$
 [এলাহাবাদ, 1925.]

44.
$$(\frac{x^2+yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2+zx}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2+xy}{(z-x)(z-y)}$$
.

45.
$$\frac{2a^2-bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{2b^2-ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{2c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$$

46.
$$\frac{x^2-yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2+zx}{(y+z)(y-x)} + \frac{z^2+xy}{(z-x)(z+y)}$$
 [কলিঃ প্রবেশিকা,1865.]

47.
$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)} + \frac{1}{z(z-y)}$$

48.
$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

49.
$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

50.
$$(a-b)(a-c)(x-a) + (b-a)(b-c)(x-b) + (c-a)(c-b)(x-c)$$

51.
$$\frac{a^2 + ha + k}{(a - b)(a - c)(x - a)} + \frac{b^2 + hb + k}{(b - a)(b - c)(x - b)} + \frac{c^2 + hc + k}{(c - a)(c - b)(x - c)}$$

52. CFINS CT,
$$\frac{a^2 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}{a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) + b \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = a + b + c.$$

53. CFRIS CT,
$$\frac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}=ab+bc+ca.$$

54. দেখাও যে,

$$\frac{a(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{c(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} = a+b+c.$$

55. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{bc}{a(a^2-b^2)(a^2-c^2)} + \frac{ac}{b(b^2-a^2)(b^2-c^2)} + \frac{ab}{c(c^2-b^2)(c^2-a^2)} = \frac{ab}{abc}$$

56. স্বল কর:
$$\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca(x-b)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)^2}$$

विविध প্রশ্নমালা V

I

- নিয়লিখিত রাশিগুলিকে তুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর:
 - (i) (x+7)(x+9)(x+11)(x+13);
 - (ii) (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-15.
- 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $7(z+x)^3 (x-y)^3 (y+z)^3$.
- 3. সরল কর : $(a-b)^2(a+b-2c)^2+(b-c)^2(b+c-2a)^2+(c-a)^2(c+a-2b)^2$, যথন a+b+c=0.
- 4. x + y + z = 4xyz হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{x}{1-4x^2} + \frac{y}{1-4y^2} + \frac{z}{1-4z^2} = \frac{16xyz}{(1-4x^2)(1-4y^2)(1-4z^2)}$$

5.
$$2s = a + b + c$$
 হইলে, দেখাও যে,
$$1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 - \frac{4s(s - a)(s - b)(s - c)}{b^2c^2}$$

6. Find
$$\sqrt{3}$$
, $\frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2bc} + \frac{(c+a)(c^2+a^2-b^2)}{2ca} + \frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{2ab} = a+b+c.$

7.
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \right)$$
 হইলে,
$$\frac{qr}{(a-q)(a-r)} + \frac{rp}{(a-r)(a-p)} + \frac{pq}{(a-p)(a-q)}$$
 এর মান নির্ণয় কর।

§. দেখাও যে, $(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3$ কে x^2-y^2 , y^2-z^2 এবং z^2-x^2 এর প্রত্যেকটি দ্বারাই ভাগ করা যায় \

П

- 1. x+y+z=15 এবং xy+yz+zx=75 হইলে, $x^3+y^3+z^3-3xyz$ এর মান নির্ণয় কর।
 - 2. (7419 (4, $(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$ = 3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b).
 - 3. দেখাও যে, $(b-c)(b+c-2a)^2+(c-a)(c+a-2b)^2+(a-b)(a+b-2c)^2=9(a-b)(b-c)(a-c).$
 - 4. সরল কর: $\frac{1}{bc(b-a)(c-a)} + \frac{1}{ca(c-b)(a-b)} + \frac{1}{ab(a-c)(b-c)}$.
 - 5. $x = \frac{b}{a-b}$ এবং $y = \frac{a}{a+b}$ হইলে, $\frac{y}{x} + \frac{y-1}{x+1}$ এর মান নির্ণয় কর।
- 6. $ab + 2a^2 3b^2 4bc ac c^2$ এবং $9ac + 2a^2 5ab + 4c^2 + 8bc$ ≥ 12b² এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।
- ি 7. $6x^3 11x^2 + 5x 3$ এবং $9x^3 9x^2 + 5x 2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
 - 8. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: (a-b)(b+c)(c+a)+(b-c)(c+a)(a+b)+(c-a)(a+b)(b+c).

m

1.
$$\left(x+rac{2}{x}
ight)^5$$
 কে x এর অধ্যক্রমিক শক্তিতে বিস্তার কর।

2. (74)
$$a + b + c^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$
.

অতএব, প্রমাণ কর যে,

$$(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3 = 24xyz$$
.

- 3. a=4278, b=12345 এবং c=8067 ছইলে, $a^3-b^3+c^3+3abc$ এর মান নির্ণয় কর।
 - 4. (FINTS CN, $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$ = (a-b)(a-c)(b-c).
- 5. $6x^3 25x^2 + 23x 6$, $2x^2 7x + 3$ এবং $6x^2 7x + 2$ এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
 - 6. $x^5 + 11x 12$ এবং $x^5 + 11x^3 + 54$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।
 - 7. স্বল কর: $\frac{a^3(b+c)}{(c-a)(b-a)} + \frac{b^3(c+a)}{(a-b)(c-b)} + \frac{c^3(a+b)}{(a-c)(b-c)}$
- 8. দেখাও যে, $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ কে b-c, c-a এবং a-b এর প্রত্যেকটি দ্বারা যথাযথক্তপে ভাগ করা যায়।

IV

- 1. a+b=2 এবং ab=7 হট্লে, a^5+b^5 এর মান নির্ণয় কর।
- 2. $2(a^6+b^6)-ab(a^2+b^2)(2ab-3a^2+3b^2)$ কে পাঁচটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
- 3. a=2658, b=2664 এবং c=2678 হইলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$ এক মান নির্ণয় কর।
- 4. x=b+c-a, y=c+a-b এবং z=a+b-c হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.
 - 5. $x = \frac{a}{a+b}$ এবং $y = \frac{b}{a-b}$ হইলে, $\frac{2x^2 + 5xy + 3y^2}{2x^2 + xy 3y^2}$ এর মান নির্ণয় করে।
 - 6. (FINE CT) $8(a+b+c)^3 (a+b)^3 (b+c)^3 (c+a)^3$ = 3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c).

- 7. $x^2-3xy-10y^2$, $x^2+2xy-35y^2$ এবং $x^2-8xy+15y^2$ এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর; এবং নির্ণীত ল. সা. গু. কে, উক্ত রাশিগুলির গ. সা. গু. দারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফলকৈ উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
- 8. x=15 হইলে, x এর মান সোজাস্থজি না বসাইয়া, অন্য উপায়ে, $x^5-18x^4+47x^3-31x^2+19x-60$ এর মান নির্ণয় কর।
 - 1. $x = \frac{a-b}{m-c}$, $y = \frac{b-c}{m-a}$ and $z = \frac{c-a}{m-b}$ except, converge x + y + z + xyz = 0.
 - 2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{b}{a} + \frac{d}{a}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a^3}{13} + \frac{c^3}{73} = \frac{b^3}{63} + \frac{d^3}{33}$.
 - 3. $x = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$ হইলে, $\frac{(x a)(x b)}{(x a b)^2}$ এর মান নির্ণয় কর।
- 4. $x=\frac{2ac}{a+c}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{(x-a)^2+(x-c)^2}{a^2+c^2}+\frac{4ac}{(a+c)^2}$ এর মান, a ও c এর যে কোন মানের জন্ম সর্বাদা একই থাকিবে।
 - 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
 - (i) $6a^4 + 43a^3b 56a^2b^2 + 43ab^3 + 6b^4$;
 - (ii) $12x^4 37x^3 + 45x^2 37x + 12$;
 - (iii) $abx^4 + (ac + b^2)x^3 + (2ab + bc)x^2 + (ac + b^2)x + ab$.
 - 6. CFRISC, $(x+y)^3 (y+z)^3 + (z-x)^3 = 3(x+y)(y+z)(x-z)$.
 - 7, গুসা, গুনির্ণয় কর:
 - (i) $x^3 (a+p)x^2 + (q+ap)x aq$ and $x^3 + ax^2 3a^2x + a^3$;
 - . (ii) $x^3 y^3 z^3 3xyz$ and $x^2 2xy + y^2 2xz + 2yz + z^2$.
- 8. x-যুক্ত কোন মূলদ ও অথও রাশিমালাতে x এর পরিবর্ত্তে 'a' বসাইলে যদি উহার মান শূক্ত হয়, তবে দেখাও যে, x-a উক্ত রাশিমালাটির একটি গুণনীয়ক।

VI

1. দেখাও যে,

$$(a^2 - a + 1)(b - c) + (b^2 - b + 1)(c - a) + (c^2 - c + 1)(a - b)$$

$$= (a^2 - a + 1)(b^2 - c^2) + (b^2 - b' + 1)(c^2 - a^2) + (c^2 - c + 1)(a^2 - b^2).$$

$$\boxed{1 - 3}$$

2.
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$
 হইলে, দেখাও বে,
$$\frac{ab}{(x-a)(x-b)} + \frac{bc}{(x-b)(x-c)} + \frac{ca}{(x-c)(x-a)} = 0.$$

3. a+b+c=0 হইলে, প্রমাণ কর যে, $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$.

4. $(x^2+y^2+z^2+2xy)^2-2(x+y)^2z^2$ কে তুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ

কর 5. সরল কর:

$$\frac{y^2 - yz + z^2}{x} + \frac{x^2}{y + z} - \frac{3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \left| \frac{\frac{2}{y} + \frac{2}{z}}{\frac{1}{yz} + \frac{1}{zy} + (x + y + z)^2} \right|.$$

6. গ. সা. গু. নির্ণয় কর:

(i)
$$x^3 + (5m-3)x^2 + 3m(2m-5)x - 18m^2$$
 (43°) $x^3 + (m-3)x^2 - m(2m+3)x + 6m^2$.

- 7. $2x^4 + x^3 9x^2 + 8x 2$ এবং $2x^4 7x^3 + 11x^2 8x + 2$ এর গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
- 8. প্রকৃত ভাগ না করিয়া দেখাও যে, $x^{5\,5}-y^{5\,5}$, x-y দারা বিভাজ্য ; এবং উহাকে x+y দারা ভাগ করিলে, ভাগশেষ $-2y^{5\,5}$ হইবে।

VII

1. 1+x+y, 1-x+y, 1+x-y এবং x+y-1 এর ক্রমিক শুণ্দলকে $1+2xy-x^2-y^2$ হারা ভাগ কর।

2. সরল কর:
$$\frac{bc(x-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca(x-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab(x-c)}{(c-a)(c-b)}$$
. [কলি:, 1896.]

3. প্রমাণ কর যে,
$$2\{(b+c-2a)^4+(c+a-2b)^4+(a+b-2c)^4\}$$

= $\{(b+c-2a)^c+(c+a-2b)^2+(a+b-2c)^2\}^2$.

4. 'নিম্নলিখিত রাশিসমূহকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্ত্তিত কর:

(i)
$$\frac{a^2}{a^2+b^2} - b + \frac{b^2}{a^2+b^2} - a$$
; (ii) $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2} + \frac{1-x}{1+x} + \frac{1-x}{1-x} + \frac{1-x}{1$

- 5. p এবং q এর সাংখ্যমান নির্ণয় করিয়া, $41x^2 60xy + 104y^2$ কে $(px+qy)^2 + 4(qx-py)^2$ এর আকারে প্রকাশ কর।
- 6. $6x^3 17x^2 + 11x 2$ এবং $12x^3 4x^2 3x + 1$ এর ল. সা. গু. ও গ. সা. গু. নির্ণয় কর।
- 7. দেখাও যে, $(a+b)(m^2+n^2)+am(n-3m)+bn(m-3n)$ এর একটি খণনীয়ক m-n. a এর মান কত হইলো, x^3+5x+a , x-3 ছারা বিভাজ্য হইবে ?
- 8. n একটি অথণ্ড ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $3^{2n+1}+2^{2n+1}$ এর সাংখ্য-মানের এককস্থানীয় অঙ্কটি 5 হইবে।

VIII

- 1. দেখাও বে, (a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)=(a-b)(b-c)(a-c).
- 2. দেখাও যে, $4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2$ $=27a^2b^2(a+b)^2.$
- 3. 2s = a + b + c ইইলে, দেখাও যে, 16s(s a)(s b)(s c) $= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 a^4 b^4 c^4.$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1867.]
- 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2-(a+b)^2(c-d)^2-(a-b)^2(c+d)^2.$
- 5.° সরল কর : $\frac{(y-z)(y+z)^3 + (z-x)(z+x)^3 + (x-y)(x+y)^3}{(y+z)(y-z)^3 + (z+x)(z-x)^3 + (x+y)(x-y)^3}.$
- 6. সরল কুর: $\frac{x^2 yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2 + zx}{(y+z)(y-x)} + \frac{z^2 + xy}{(z-x)(z+y)}$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1865.]
- 7. \cdot n একটি অথগু ধনরাশি হইলে, দেখাও যে, $2^{4n}-1$, 15 দারা বিভাজ্য।
- 8. x^4+2x^2+1 , $x^6+x^4-x^2-1$ এবং x^4-1 এর গ. সা. শু. ও লু সা. শু. নির্ণয় করে।

ষ্ডৃবিংশ অধ্যায়

'tt.'

সরল সমীকরণ ও তৎসম্বন্ধীয় প্রশাবলী

(Simple Equations and Problems)

- I. সরল সমীকরণ (Simple Equations)
- 172. সহজ 'সরল সমীকরণ' সমাধান করিবার প্রণালী পূর্ব্বে পঞ্চম ও সপ্তদশ অধ্যায়ে বর্ণিত হইয়াছে। বর্ত্তমানে ঐ বিষয় বিস্তৃতরূপে আলোচনা করা ঘাইবে।
- 173. স্থবিধাজনকভাবে শদসংযোগ ও শক্ষান্তর-করণ দারা সমীকরণ সমাধান :

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দৃষ্টান্তস্বরূপ সন্নিবেশিত হইল।

উপা. 1. সমাধান কর: $4(x+1)^2 + 9(x+2)^2 = 13(x+3)^2$.

উভয় পক্ষকে সরল করিয়া,

$$4(x^2+2x+1)+9(x^2+4x+4)=13(x^2+6x+9),$$
 অথবা, $13x^2+44x+40=13x^2+78x+117$; অথবা, $13x^2+44x-13x^2-78x=117-40$, [পক্ষান্তর করিয়া] অথবি, $-34x=77$; . . . $x=-\frac{7}{3}\frac{7}{4}=-2\frac{9}{34}$.

উদা. 2. সমাধান কর:
$$(x-2)^3 + (x-6)^3 + (x-10)^3 = 3(x-2)(x-6)(x-10)$$
.

এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

(x-2)³ + (x-6)³ + (x-10)³ - 3(x-2)(x-6)(x-10) = 0;
অথবা,
$$\frac{1}{2}$$
{(x-2) + (x-6) + (x-10)}[{(x-6) - (x-10)}² + {(x-10) - (x-2)}² + {(x-2) - (x-6)}²] = 0;
[বাম পক্ষকে, নিয়ম 134 দ্বারা, উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া]

অথবা,
$$\frac{1}{2}(3x-18)\{(10-6)^2+(-10+2)^2+(-2+6)^2\}=0$$
;
অথবা, $\frac{1}{6}(3x-18).96=0$; ে. $3x-18=0$; অথবা, $x=6$.

174. ভগ্নাংশ-সমন্মিভ সমীকরণঃ

উপা. 3. সমাধান কর:
$$\frac{7x-11}{6} = \frac{31x-41}{24} - \frac{7x^2-4}{56x-47}$$
 এখন, পক্ষান্তর করিয়া,
$$\frac{7x^2-4}{56x-47} = \frac{31x-41}{24} - \frac{7x-11}{6}$$

$$= \frac{(31x-41)-(28x-44)}{24} = \frac{3(x+1)}{24} = \frac{x+1}{8}.$$

উভয় পক্ষকে 8(56x-47) দারা গুণ করিয়া,

$$8(7x^2-4)=(x+1)(56x-47),$$

অথবা, $56x^2 - 32 = 56x^2 + 9x - 47$; ... -32 = 9x - 47. স্থতবাং, 9x = -32 + 47 = 15 ় ... $x = \frac{1.5}{9} = 1\frac{2}{3}$.

উলা. 4. সমাধান কর: $\frac{25 - \frac{1}{3}x}{x+1} + \frac{16x + 4\frac{1}{6}}{3x+2} = \frac{23}{x+1} + 5.$

পক্ষান্তর করিয়া;

$$\frac{16x+4\frac{1}{6}}{3x+2}-5=\frac{23}{x+1}-\frac{25-\frac{1}{8}x}{x+1},$$
 অথবা, $\frac{x-5\frac{4}{6}}{3x+2}=\frac{\frac{1}{3}x-2}{x+1}.$ অতথ্য, $(x-5\frac{4}{6})(x^2+1)=(\frac{1}{3}x-2)(3x+2),$ অথবা, $x^2-(4\frac{4}{6})x-5\frac{4}{6}=x^2-(5\frac{1}{3})x-4.$ স্থবা, $(5\frac{1}{3}-4\frac{4}{6})x=5\frac{4}{6}-4,$ অথবা, $\frac{8}{6}x=1\frac{4}{6}=\frac{9}{6}$; $\therefore x=\frac{9}{6}\times\frac{18}{8}=\frac{27}{8}=3\frac{8}{8}.$

উন্ধা. 5. সমাধান কর: $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-6} = \frac{8}{x+3}$

যেহেভূ,
$$\frac{8}{x+3} - \frac{3}{x+3} + \frac{5}{x+3}$$
,

• অতথ্ৰ,
$$\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-6} = \frac{3}{x+3} + \frac{5}{x+3}$$
.

স্থতিরাং, পক্ষান্তর করিয়া, $\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+3} = \frac{5}{x+3} - \frac{5}{x-6}$

অথবী,
$$\frac{15}{(x-2)(x+3)} = \frac{-45}{(x+3)(x-6)}$$

উভয় পক্ষকেই x+3 দারা গুণ এবং 15 দারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{x-2} = \frac{-3}{x-6}.$$

স্ত্রাং, x-6=-3(x-2); ... 4x=12, অথবা, x=3.

সহজ বীজগণিত

|. 6. সমাধান কর:
$$\frac{8}{2x-1} + \frac{9}{3x-1} = \frac{7}{x+1}$$
.

এখন,
$$\frac{8}{2x-1} + \frac{9}{3x-1} = \frac{4}{x+1} + \frac{3}{x+1}$$
.

অতএব,
$$\left\{\frac{8}{2x-1} - \frac{4}{x+1}\right\} + \left\{\frac{9}{3x-1} - \frac{3}{x+1}\right\} = 0.$$
 পিক্ষাস্তর করিয়া

অথবা,
$$\frac{6}{(2x-1)(x+1)} + \frac{12}{(3x-1)(x+1)} = 0.$$

মৃতরাং,
$$\frac{1}{2x-1} + \frac{1}{3x-1} = 0.$$

উভয় পক্ষকেই (2x-1)(3x-1) দ্বারা গুণ করিয়া,

$$(3x-1)+(2x-1)=0.$$

$$5x=2$$
, অথবা, $x=\frac{2}{F}$.

উপা. 7. সমাধান কর: $\frac{a-c}{2b+x} + \frac{b-c}{2a+x} = \frac{a+b-2c}{a+b+x}$

এখন,
$$\frac{a-c}{2b+x} + \frac{b-c}{2a+x} = \frac{(a-c)+(b-c)}{a+b+x} = \frac{a-c}{a+b+x} + \frac{b-c}{a+b+x}$$

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,

$$(a-c)\left\{\frac{1}{2b+x} - \frac{1}{a+b+x}\right\} = (b-c)\left\{\frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{2a-x}\right\}.$$

অথবা,
$$(a-c)\cdot\frac{a-b}{(2b+x)(a+b+x)} = (b-c)\cdot\frac{a-b}{(a+b+x)(2a+x)}$$

মুত্রাং,
$$\frac{a-c}{2b+x} = \frac{b-c}{2a+x} \; ;$$

$$(a-c)(2a+x)=(b-c)(2b+x)$$
;

$$x\{(a-c)-(b-c)\}=2b(b-c)-2a(a-c),$$

অথবা,
$$x(a-b) = 2(b^2 - a^2) - 2c(b-a)$$
$$= 2(b-a)(b+a-c)$$
$$= 2(a-b)(c-a-b);$$

:
$$x = 2(c - a - b)$$
.

প্রথমালা 92

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$3(x+1)^2 + 4(x+3)^2 = 7(x+2)^2$$
.

2.
$$(x-a)(x-b)=(x-a-b)^2$$
.

3.
$$(x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 = 3(x-a)(x-b)(x-c)$$
.

4.
$$(x+a)^2 + (x+b)^2 + (x+c)^2 = (x-2a)^2 + (x-2b)^2 + (x-2c)^2$$
.

5.
$$\frac{98x-73}{21} = \frac{14x-9}{3} - \frac{13x-16}{15x-9}$$
.

6.
$$\frac{95x - 159}{35} = \frac{19x - 29}{7} - \frac{17x - 47}{23x - 59}$$

7.
$$\frac{91x-21}{56} + \frac{24x-93}{35x-138} = \frac{13x+9}{8}$$
.

8.
$$\frac{117x - 26}{135} + \frac{16x - 77}{23x - 110} = \frac{13x + 4}{15} + \frac{3\frac{4}{5}}{27}$$

9.
$$\frac{6x - 7\frac{1}{8}}{13 - 2x} + 2x + \frac{1 + 16x}{24} = 4\frac{5}{12} - \frac{12\frac{5}{8} - 8x}{2}$$

10.
$$\frac{2x+8\frac{1}{2}}{9}$$
 $\frac{13x-2}{17x-32}$ + $\frac{x}{3}$ = $\frac{7x}{12}$ - $\frac{x+16}{36}$.

11.
$$\frac{41-35x}{105} - \frac{7-2x^2}{14(x-1)} = \frac{1+3x}{21} - \frac{2x-2\frac{1}{5}}{6}$$
.

12.
$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+7} = \frac{1}{7(x-1)}$$
. 13. $\frac{2}{5(3x+4)} + \frac{4}{2x+3} = \frac{6}{3x+4}$.

14.
$$\frac{6}{3x-5} - \frac{6}{7(4x-7)} = \frac{7}{9(3x-5)} + \frac{7}{4x-7}$$

15.
$$\frac{11}{12(14x-19)} + \frac{1}{12(14x-19)} = \frac{1}{14x-19} - \frac{1}{13x-14}$$

16.
$$\frac{50}{3x-1} + \frac{37 - \frac{1}{3}x}{12x-1} = \frac{35}{12x-1} + \frac{49 - \frac{1}{12}x}{3x-1}$$
.

17.
$$\frac{(1\frac{8}{7})x+19\frac{1}{17}}{2x+5}-\frac{7}{9}x+8=\frac{20\frac{1}{17}-(1\frac{4}{7})x}{2x+5}+\frac{(1\frac{4}{9})x-9}{2(x+8)}.$$

18.
$$\frac{(9\frac{12}{8})x - 32}{4x + 7} + \frac{65x + 4\frac{14}{23}}{8x + 29} = \frac{75x + 5\frac{14}{23}}{8x + 29} + \frac{(4\frac{12}{23})x - 29}{4x + 7}.$$

19.
$$\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-3}$$
 20. $\frac{3}{4x+1} + \frac{3}{4x+5} - \frac{3}{4x+3}$

21.
$$\frac{15}{3x+11} - \frac{8}{3x+17} = \frac{7}{3x+5}$$
.

22.
$$\frac{6}{5x+7} - \frac{4}{5x+13} = \frac{9}{5x+13} - \frac{7}{5x+19}$$

23.
$$\frac{8}{2x+17} - \frac{12}{2x+25} = \frac{5}{2x+25} - \frac{9}{2x+33}$$

24.
$$\frac{5}{3-4x} + \frac{9}{4x+13} - \frac{4}{4x+5} = 0.$$

25.
$$\frac{6}{5-6x} + \frac{13}{6x+19} = \frac{7}{6x+7}$$
. **26.** $\frac{1}{3-7x} + \frac{1}{7x+15} = \frac{8}{12-7x}$.

27.
$$\frac{10}{2x-5} + \frac{1}{x+5} = \frac{18}{3x-5}$$
 28. $\frac{9}{3x-4} + \frac{20}{4x+1} - \frac{8}{x+7}$

29.
$$\frac{12}{3x-8} = \frac{20}{4x-13} - \frac{1}{x+9}$$
. **30.** $\frac{a+b}{x-c} = \frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b}$.

31.
$$\frac{a^2}{ax-b} + \frac{b^2}{bx-a} = \frac{a+b}{x+c}$$
. **32.** $\frac{m(x+a)}{x+b} + \frac{n(x+b)}{x+a} = m+n$.

33.
$$\frac{b-c}{x+a} + \frac{a-b}{x+b} = \frac{a-c}{x+c}$$
. **34.** $\frac{2a-3b}{x-a+b} - \frac{2b-3a}{x+a-b} = \frac{5(a-b)}{x+a+b}$.

35.
$$x = 6a^{-1}x + 3a^{-1}x - 2a^{-1}x - a^{-1}$$

175. ভশ্নাংশবিশিষ্ট সমীকরণে প্রত্যেক পদের লবকে উহার হর দ্বারা ভাগ করিয়া, অতি সহজে সমীকরণের সমাধান করা ঘাইতে পারে।

উপা. 1. সমাধান কর:
$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{22x+30}{11x-18}$$
.

এখন, $\frac{(x-1)+2}{x-1} + \frac{(x-2)+4}{x-2} = \frac{2(11x-18)+60}{11x-18}$,

ভাধবা, $\left\{1 + \frac{2}{x-1}\right\} + \left\{1 + \frac{4}{x-2}\right\} = 2 + \frac{66}{11x-18}$,

ভাধবা, $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{66}{11x-18}$

পরবর্ত্তী অংশের জন্ম ছাত্রগণকে 174 নিয়মের উদা 6 দেখিতে নির্দ্দেশ দেওয়া যাইতেছে।

মুতরাং, $\frac{8}{2x-1} + \frac{9}{3x-1} = \frac{7}{x+1}$.

উপা. 3. সমাধান কর:
$$7x - 55 \cdot 2x - 17 - 6x - 71 + 3x - 14$$

$$x - 8 \cdot x - 9 \cdot x - 12 + \frac{3x - 14}{x - 5}.$$
এগন,
$$7(x - 8) + 1 + \frac{2(x - 9) + 1}{x - 9} = \frac{6(x - 12) + 1}{x - 12} + \frac{3(x - 5) + 1}{x - 5},$$
অথবা,
$$\left\{7 + \frac{1}{x - 8}\right\} + \left\{2 + \frac{1}{x - 9}\right\} = \left\{6 + \frac{1}{x - 12}\right\} + \left\{3 + \frac{1}{x - 5}\right\};$$

$$\therefore \frac{1}{x - 8} + \frac{1}{x - 9} = \frac{1}{x - 12} + \frac{1}{x - 5};$$
অতএব, পক্ষান্তর করিয়া,
$$x - 8 \cdot x - 5 = \frac{3}{x - 12(x - 9)};$$

$$(x - 8)(x - 5) = (x - 12)(x - 9);$$

$$(x - 8)(x - 5) = (x - 12)(x - 9),$$
অথবা,
$$x^2 - 13x + 40 = x^2 - 21x + 108;$$

$$8x = 68,$$
 অথবা,
$$x = 8\frac{1}{3}.$$

ટહર

প্রখ্নালা 93

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$\frac{2x-1}{x-1} + \frac{3x-4}{x-2} = \frac{5x-12}{x-3}$$
. 2. $\frac{2x+7}{x+2} + \frac{4x+29}{x+6} - \frac{6x-10}{x-3} = 0$.

3.
$$\frac{25x-40}{5x-6} - \frac{7x+9}{x+2} + \frac{6x-1}{3x+4} = 0.$$

4.
$$2 + \frac{1}{2 + \frac{3}{2 + x}} = \frac{7}{3}$$
. 5. $8 + \frac{2}{3 + \frac{4}{5 + \frac{6}{x + 2}}} = \frac{214}{25}$.

[নিয়ম 168 এর উদা. 3 দেখ]

6.
$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + x}} = \frac{2x + 7}{2 + x}$$
. 7. $\frac{15x - 7}{5x - 4} + \frac{4x + 3}{4x - 3} = \frac{8x + 1}{2x - 1}$.

8.
$$\frac{4x-7}{4x+5} + \frac{15x+11}{5x+7} = \frac{12x+1}{3x+4}.$$

9.
$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 8x + 1}{2x^2 + 2x + 3} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x + 1}.$$

10.
$$\frac{12x^3 + 16x^2 + 29x - 1}{3x^2 + 4x + 8} = \frac{4x^2 + 20x + 1}{x + 5}.$$

11.
$$\frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2-2x+1}{x-2} = 2x + \frac{2}{x-3}.$$

12.
$$\frac{x^2+3}{x-1} + \frac{x^2-x+1}{x-2} = \frac{2x^2-4x+1}{x-3}$$
.

13.
$$\frac{2x^2 - 3x + 7}{2x - 1} + \frac{6x^2 + 2x + 21}{3x + 1} = \frac{3x^2 + 8x + 7}{x + 3}.$$

14.
$$\frac{3+2x}{1+2x} - \frac{5+2x}{7+2x} = 1 - \frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$$
.

15.
$$\frac{2x-3}{x-2} + \frac{3x-20}{x-7} = \frac{x-3}{x-4} + \frac{4x-19}{x-5}$$
.

16.
$$\frac{3x-8}{x-3} + \frac{4x-35}{x-9} = \frac{2x-9}{x-5} + \frac{5x-34}{x-7}$$
.

17.
$$\frac{3x-13}{x-4} + \frac{4x-41}{x-10} = \frac{2x-13}{x-6} + \frac{5x-41}{x-8}$$
.

18.
$$\frac{4x+21}{x+5} + \frac{5x-69}{x-14} = \frac{3x-5}{x-2} + \frac{6x-41}{x-7}$$
.

19.
$$\frac{5-6x}{3x-1} + \frac{2x+7}{x+3} = \frac{31-12x}{3x-7} + \frac{4x+21}{x+5}$$

20.
$$\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} + \frac{x^2 - 15}{x - 4} = \frac{x^2 + 7x + 11}{x + 5} + \frac{x^2 - 4x - 20}{x - 7}$$

21.
$$\frac{2x+11}{x+5} - \frac{9x-9}{3x-4} = \frac{4x+13}{x+3} - \frac{15x-47}{3x-10}$$
. [क्लि: প্ৰবেশিকা, 1860.]

22.
$$\frac{x-2}{x-3} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-4}{x-5}$$
.

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

176. বিবিধ প্রশ্নমালার স্মাধান:

. 1. সমাধান কর: $\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}$. এখন, পক্ষান্তর করিয়া,

$$\frac{ab}{a+b} \left\{ 3c + \frac{ab}{(a+b)^2} \right\} = x \left\{ 3c + \frac{b}{a} - \frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2} \right\}$$

$$= x \left\{ 3c + \frac{b}{a} \left[1 - \frac{(2a+b)b}{(a+b)^2} \right] \right\}$$

$$= x \left\{ 3c + \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{(a+b)^2} \right\}$$

$$= x \left\{ 3c + \frac{ab}{(a+b)^2} \right\}$$

$$= \frac{ab}{a+b}.$$

উদা. 2. স্মাধান কর: $\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} - \frac{ax + b}{px + q}$

এখন,
$$\frac{x(ax+b)+c}{x(px+q)+r} = \frac{ax+b}{px+q}.$$

অতএব, ax+b এর পরিবর্ত্তে m এবং px+q এর পরিবর্ত্তে n বসাইয়া,

$$\frac{mx+c}{nx+r} = \frac{m}{n};$$

mnx + cn = mnx + rm; cn = rm,

অথবা, c(px+q)=r(ax+b); x(cp-ar)=br-cq;

$$\therefore x = \frac{br - cq}{cp - ar}.$$

উন্ধা. 3. সমাধান কর:
$$(x-2a)^3 + (x-2b)^3 = 2(x-a-b)^3$$
. এখন, পক্ষাস্তর করিয়া.

$$(x-2a)^3 - (x-a-b)^3 = (x-a-b)^3 - (x-2b)^3$$
.

x-2a এর পরিবর্ত্তে X, x-2b এর পরিবর্তে Y এবং x-a-b এর পরিবর্তে Z বসাইয়া, $X^3-Z^3=Z^3-Y^3,$

$$(X-Z)(X^2+XZ+Z^2)=(Z-Y)(Z^2+ZY+Y^2).$$

 $X-Z=Z-Y$; কারণ, উহাদের প্রত্যেকেই = $b-a$;

$$X^2 + XZ + Z^2 = Z^2 + ZY + Y^2$$
.

অতএব, পক্ষান্তর করিয়া, $X^2 - Y^2 = Z(Y - X)$.

সাধারণ গুণনীয়ক X-Y (যাহা = 2b-2a) কে অপসারণ করিয়া,

$$X+Y=-Z$$

অর্থাৎ,
$$(x-2a)+(x-2b)=-(x-a-b)$$
.

স্থতরাং,
$$3x=3(a-b)$$
; এবং $x=a+b$.

উলা. 4. সমাধান কর:
$$\frac{x+a}{x+b} = \left(\frac{2x+a+c}{2x+b+c}\right)^2$$
.

$$\frac{x+a}{x+b} = \frac{(x+b) + (a-b)}{x+b} = 1 + \frac{a-b}{x+b},$$

এবং
$$\frac{2x+a+c}{2x+b+c} - \frac{(2x+b+c)+(a-b)}{2x+b+c} = 1 + \frac{a-b}{2x+b+c}$$

অতএব,
$$1 + \frac{a-b}{x+b} = \left\{ 1 + \frac{a-b}{2x+b+c} \right\}^2$$
$$\cdot 1 + \frac{2(a-b)}{2x+b+c} + \frac{(a-b)^2}{(2x+b+c)^2}.$$

স্থুতরাং, পক্ষান্তর করিয়া এবং a – b দারা ভাগ করিয়া,

ચલવા,
$$\frac{1}{x+b} - \frac{2}{2x+b+c} = \frac{a-b}{(2x+b+c)^2},$$

$$\frac{c-b}{(x+b)(2x+b+c)} = \frac{a-b}{(2x+b+c)^2};$$

$$\frac{c-b}{x+b} - \frac{a-b}{2x+b+c}.$$

$$2x(c-b) + (c^{2} - b^{2}) = x(a-b) + b(a-b);$$

$$x(a+b-2c) = c^{2} - ab;$$

$$x = c^{2} - ab;$$

$$x = a+b-2c.$$

উলা. 5. সমাধান কর:

$$\frac{4x}{3} - \frac{125x^2 - 5}{(5x - 1)(x + 5)} = 5x - \frac{5}{3} \cdot \frac{3x^2 - 1}{x + 5} - \frac{95 - 4x}{3}.$$

$$2(29), \quad \frac{125x^2 - 5}{(5x - 1)(x + 5)} = \frac{5(25x^2 - 1)}{(5x - 1)(x + 5)} = \frac{5(5x + 1)}{x + 5},$$

$$4(3), \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{3x^2 - 1}{x + 5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{(3x^2 - 1)}{x + 5} = \frac{5x^2 - \frac{5}{3}}{x + 5};$$

$$4(3), \quad \frac{4x}{3} - \frac{5(5x + 1)}{x + 5} = 5x - \frac{5x^2 - \frac{5}{3}}{x + 5} - \frac{95}{3} + \frac{4x}{3}.$$

এখন, পক্ষান্তর করিয়া এবং 5 দারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{x^2 - \frac{1}{3} - (5x + 1)}{x + 5} = x - 6\frac{1}{3}.$$

স্থতাগং,
$$x^2 - 5x - 1\frac{1}{3} = x^2 - (1\frac{1}{3})x - 31\frac{2}{3}$$
;

$$(3\frac{2}{3})x = 30\frac{1}{3}$$
; $x = \frac{9}{1}\frac{1}{1}$: $3\frac{8}{17}$.

প্রথমালা 94

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$\frac{2x}{x-4} + \frac{7x-3}{x+1} = 9$$
.

2.
$$\frac{x+4a+b}{x+a+b} + \frac{4x+a+2b}{x+a-b} = 5.$$

3.
$$\frac{3x+5}{x^2+1} = \frac{4x+8}{3x+3} + \frac{10x+1}{6x+3}$$
 4. $\frac{6x+8}{2x+1} - \frac{2x+38}{x+12}$ 1.

4.
$$\frac{6x+8}{2x+1} - \frac{2x+38}{x+12} - 1$$
.

5.
$$\frac{x+18}{x-2} - \frac{27-3x}{3x-19} = 2$$
.

5.
$$\frac{x+18}{x-2} - \frac{27-3x}{3x-19} = 2$$
. 6. $\frac{x-b}{x-a} - \frac{x-a}{x-b} = \frac{2(a-b)}{x-(a+b)}$.

• 7.
$$\frac{x+2a}{2b-x} + \frac{x-2a}{2b+x} + \frac{4ab}{x^2-4b^2} = 0$$
.

8.
$$\frac{(x-a)(x-b)}{x-a-b} = \frac{(x-c)(x-d)}{x-c-d}$$
.

10.
$$\frac{a+x}{a^2+ax+x^2} + \frac{a-x}{a^2-ax+x^2} = \frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

11.
$$\frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}$$

12.
$$\frac{1}{(x+a)^2-b^2} + \frac{1}{(x+b)^2-a^2} = \frac{1}{x^2-(a+b)^2} + \frac{1}{x^2-(a-b)^2}$$

13.
$$\frac{3x^2 + 5x + 8}{5x^2 + 6x + 12} = \frac{3x + 5}{5x + 6}$$
. **14.** $\frac{58x^2 + 87x + 7}{87x^2 + 145x + 11} = \frac{2x + 3}{3x + 5}$.

15.
$$a^2(a-2b) \cdot x + \frac{2abc}{(a-b)} - \frac{ax}{b} = 2cx - \frac{a^2b^2}{(a-b)^3}$$

16.
$$(x-23)^3 + (x-27)^3 = 2(x-25)^3$$
.

17.
$$\frac{4x-17}{9} - \frac{3\frac{2}{3}-22x}{33} = x - \frac{6}{x} \left(1 - \frac{x^2}{54}\right)$$

18.
$$\left(\frac{x-2a}{x+2b}\right)^2 = \frac{x-2a-2b}{x+2a+2b}$$
 19. $\frac{x+19}{x+10} = \left(\frac{2x+33}{2x+24}\right)^2$.

20.
$$\left(\frac{x-a}{x+b}\right)^3 = \frac{x-2a-b}{x+a+2b}$$

177. সরল সমীকরশের একাধিক বীজ (roof) থাকিতে পাবের নাঃ সমীকরণস্থিত পদসমূহের ভিতর, অজ্ঞাতরাশি-(সাধারণতঃ, α) যুক্ত পদগুলিকে সমতাচিন্তের বামদিকে এবং অক্যান্ত পদগুলিকে সমতা-চিন্তের ডা'নদিকে স্থানান্তরিত করিলে, সকল সরল সমীকরণকেই $\alpha x = b$ এর আকারে প্রকাশ করা যায়।

কিন্তু, ax=b সমীকরণটিতে x এর, $\frac{b}{a}$ ভিন্ন অন্ত কোন মান দ্বারাই সমীকরণের সমতা রক্ষিত হইতে পারে না।

অতএব, সরল্ সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা সম্ভবপর নহে।

অথবা ঃ সম্ভব হইলে, ধরা যাউক যে, ax = b সমীকরণটির, $a \otimes \beta$, এই তুইটি বীজ আছে। তাহা হইলে, অবশুই

$$a^a = b$$

এবং, $a\beta = b$

ত্তি অতএব, বিয়োগ করিয়া, $a(\alpha - \beta) = 0$.

কিন্ত, ইহা অসম্ভব ; কারণ, a একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা এবং (কল্পনাত্মসারে, a ও β বিভিন্ন হওয়ায়) $a-\beta$ এর মানও শৃক্ত নহে।

অতএব, সরল সমীকরণের একাধিক বীজ থাকা অসম্ভব।

178. সরল সমীকরণ সমাধানে ভুইটি ব্যক্তিক্রম (exceptions) ঃ

(1) কোন সরল সমীকরণ, পক্ষান্তরকরণ ও সরলীকরণ, প্রক্রিয়ান্তে, $0 \times x = 0$, অর্থাৎ, 0 = 0 এর আকার ধারণ করিলে, স্পষ্টতঃই উহা অজ্ঞাতরাশির যে কোন সাংখ্যমানের জন্মই অক্ষ্ণ থাকে। অতএব, এই সকল ক্ষেত্রে, সমীকরণের অসংখ্য বীজ থাকিতে দেখা যায়। বস্তুতঃ, ইহারা **অভেদ** (identity)।

উদা.। $x+2=\frac{x}{2}+\frac{x+4}{2}$ সমীকরণটিতে, পক্ষান্তরকরণ প্রক্রিয়া দারা, $(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})x=\frac{4}{3}-2$, স্মাণ্ড, $0\times x=0$ পাওয়া যাইতেছে।

অতএব, এই সমীকরণটি একটি অভেদ, এবং কাজেই x এর যে কোন সাংখ্য-মানের জন্মই ইহার সমতা রক্ষিত হইবে।

(2) আবার, $\frac{x+5}{3} = \frac{x+4}{2} - \frac{x-4}{6}$ সমীকরণটি, পক্ষান্তরকরণ ও সরলীকরণ প্রক্রিয়া দারা, $(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6})x = \frac{4}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{3}$, ভাগবা, $0 \times x = 1$,

অথবা, 0=1, এই আকারে পরিবর্ত্তিত হইল; ইহা সম্পূর্ণ আসম্ভব। কাজেই, প্রদত্ত সমীকরণে, অজ্ঞাতরাশির কোন মানের জন্মই সমীকরণের সমতা রক্ষিত হইতে পারে না। অর্থাৎ, এই সমীকরণটিরু কোন বীজ (root) নাই।

সাধারণভাবে বাললে, 'যদি কোন সমীকরণকে, $0 \times x = b$ এর আকারে ক্রপাস্তরিত করা যায়, তবে সেই সমীকরণের কোন বীজ থাকিতে পারে না'।

II. সরল সমীকরণ বিষয়ক

• 179. সরল সমীকরণ বিষয়ক প্রশাবলী সমাধানের সাধারণ নিয়ম সপ্তদেশ অধ্যায়েই বর্ণিত হইয়াছে। এক্ষণে, ঐ জাতীয় জটিলতর প্রশ্ন সম্পর্কে আলোচনা করা যাইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দৃষ্টান্তস্বরূপ সন্নিবেশিত হইল।

উদ্ধা. 1. বেলা 1 টা ও 2 টার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা তুইটি এক মিনিট সময়-স্চক ব্যবধানে থাকিবে ?

ধর, ${\bf 1}$ টা বাজিয়া x মিনিটের সময় ঘড়ির কাঁটা ছুইটি উল্লিখিত ব্যবধানে রহিয়াছে।

তাহা হইলে, নির্ণেয় সময়ে মিনিটের কাঁটাটি 12 টার দাগ হইতে x মিনিট দুরে অবস্থিত । এখন যেহেতু, মিনিটের কাঁটা, ঘণ্টার কাঁটা হইতে বারগুণ ক্রতগতিতে চলে, অতএব, মিনিটের কাঁটা যতক্ষণে x-মিনিট পরিমিত স্থান অতিক্রম করে, ঘণ্টার কাঁটাটি ততক্ষণে এক মিনিট-স্চক দাগের $\frac{x}{12}$ অংশ পরিমিত স্থান অতিক্রম করে। কাজেই নির্ণেয় সময়ে ঘণ্টার কাঁটাটি 12 টার দাগ হইতে $\left(5+\frac{x}{12}\right)$ মিনিট দূরে অবস্থিত।

যেহেতু, প্রদত্ত সর্ত্তামুসারে, নির্ণেয় সময়ে কাঁটা ছইটির ভিতর এক মিনিট ব্যবধান রহিয়াছে,

অতএব,
$$x = \left(5 + \frac{x}{12}\right) \pm 1$$
.

[মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার অগ্রবর্ত্তী হইলে, উপরিলিখিত দ্ব্যর্থকচিচ্ছের মধ্যে '+' চিহ্নটি, এবং পশ্চাদ্বর্তী হইলে, '–' চিহ্নটি লইতে হইবে।]

$$\frac{1}{12}x = 5 \pm 1 = 6$$
, অথবা, 4;
$$x = \frac{72}{11} = 6\frac{6}{11},$$
 অথবা, $= \frac{48}{11} = 4\frac{7}{11}$.

অতএব, 1 টা বাজিয়া $4\frac{1}{11}$ মিনিটের সময়, অথবা, $6\frac{6}{11}$ মিনিটের সময়, ঘড়িক কাঁটা তুইটি এক মিনিট ব্যবধানে থাকিবে।

উদ্ধা. 2. ত্ইটি স্থান, $P \otimes Q$, পরস্পর $3\frac{1}{8}$ মাইল দূরে অবস্থিত। $A \otimes B$ ত্ই ব্যক্তি P হইতে, A গাড়ীতে ঘণ্টায় 6 মাইল গতিতে এবং B পায়ে হাঁটিয়া ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে, Q অভিমুখে যাত্রা করিল। Q তে পৌছিবার পর A তথায় 15 মিনিট বিশ্রাম করিয়া পুনরায় গাড়ীতে P অভিমুখে রওনা হইলে, সে B এর সহিত কোন্ স্থানে মিলিত হুইবে ? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.]

ধর, যে স্থানে A ও B মিলিত হইল, সেই স্থান P হইতে x মাইল দূরে অবস্থিত $\mathbf k$ তাহা হইলে, B যতক্ষণে x মাইল পথ অতিক্রম করিল, A ততক্ষণে x তে পৌছিয়া $\mathbf k$ তেমা $\mathbf k$ মিনিট বিশ্রামের পর পুনরায় (3 $\frac{1}{2}-x$) মাইল পথ ভ্রমণ করিল। স্পষ্টতঃ

A এর এই সকল করিতে $\left(\frac{3\frac{1}{6}}{6}+\frac{1}{4}+\frac{3\frac{1}{2}-x}{6}\right)$ ঘণ্টা সময় লাগিয়াছে; এবং B এর x মাইল যাইতে $\frac{x}{3}$ ঘণ্টা লাগিয়াছে।

অতএব, P হইতে $2rac{\pi}{8}$ মাইল দূরে, B এর সহিত A মিলিত হইবে।

উদ্ধা. 3. কোন জমির মালিক, বাৎসরিক নগদ £10 ও শশু-থাজানায় তাঁহার জমি পত্তন দিলেন। যথন শশু বুদেল্ (bushel) প্রতি 10 শিলিং দরে বিক্রয় হইত, তথন ঐ থাজানাতে তাঁহার জমির প্রতি একরে (acre) 10 শিলিং হারে আয় হইত; কিন্তু শশুের দর, প্রতি বুদেলে 13 শি. 6 পেন্স্ হইলে, "ঐ থাজানাতে তাঁহার, প্রতি একরে 13 শি. হারে আয় হইত। কত বুদেল্ শশু তিনি থাজানা হিসাবে পাইতেন।

ধর, তিনি বাৎসরিক x ্রেল্ শস্ত থাজানা হিসাবে পাইতেন।

তাহা হইলে, বুসেল্ প্রতি 10 শি. দরে শস্তা বিক্রয় হইলে, তাঁহার বাৎসরিক থাজানার পরিমাণ $\pounds 10+10x$ শি., অর্থাও (200+10x) শি.; যেহেতু, এক্ষেত্রে তাঁহার থাজানা আদায়ের হার প্রতি একরে 10 শি. করিয়া, অতএব, তাঁহার জমির পরিমাণ 200+10x, অথবা, '20+x' একর।

সর্ত্তামুদারে (অর্থাৎ, শস্তের দর, বুদেল্ প্রতি 13 শি., 6 পে. হইলে), ' তাঁহার বাঁৎদরিক আয় $\pounds 10 + (13\frac{1}{2})x$ শি., অর্থাৎ $\frac{400 + 27x}{2}$ শি. এবং আয়ের হার প্রতি একরে 13 গি.। কাজেই, এক্ষেত্রে তাঁহার জমির পরিমাণ $=\frac{400 + 27x}{26}$.

অতথ্য,
$$20+x: \frac{400+27x}{26}$$
 অথ্যা, $520+26x=400+27x$; $x=120$.

স্বতরাং, তিনি 120 বুসেল্ শস্ত থাজানা হিসাবে পাইতেন ৷

্তিদা. 4. একটি খরগোস ৪০ লাফে যতদ্র যাইতে পারে, ততদ্র হইতে একটি কুকুর উহাকে ধরিবার জন্ম দৌড়াইতে আরম্ভ করিল। কুকুর যতক্ষণে ছইবার লাফ দেয়, খরগোস ততক্ষণে তিনবার লাফ দেয়; কিন্তু খরগোস ছই লাফে যতদ্র যায়, কুকুর এক লাফে ততদ্র যায়। ধরা পড়িবার পূর্বে খরগোস কতবার লাফ দিয়াছিল?

ধর, (খরগোসের) নির্ণেয় লাফের সংখ্যা = 3x.

তাহা হইলে, ঐ সময়ের মধ্যে কুকুরের লাফের সংখ্যা = 2x.

এখন, কুকুরের প্রথম অবস্থান হইতে, খরগোস যে স্থানে ধরা পড়িল তাহার দূরত্ব, খরগোস (80+3x) লাফে যতদূর যাইতে পারে, তাহার সমান ; আবার, কুকুর 2x লাফে যতদূর যায়, সেই দূরত্বেরও সমান।

কিন্তু, যেহেতু কুকুরের এক লাফে অতিক্রান্ত দূরত্ব থরগোসের হুই লাফে অতিক্রান্ত দূরত্বের সমান ;

অতএব, কুকুরের
$$2x$$
 লাফের দূরত্ব $=$ থরগোসের $4x$ লাফের দূরত্ব । .
$$80 + 3x = 4x ; \qquad x = 80.$$

অতএব, ধরা পড়িবার পূর্ব্বে থরগোস 3 × 80 অর্থাৎ 240টি লাফ দিয়াছিল।

উদা. 5. কোন পোদারের নিকট, স্বর্ণথণ্ড ও রোপ্যথণ্ড, কেবলমাত্র এই ছুই প্রকারের অর্থ ছিল। এখন, a-সংখ্যক রোপ্যথণ্ড, অথবা b-সংখ্যক স্বর্ণথণ্ড, উভয়েরই মূল্য s হইলে, যদি কোন ব্যক্তি, স্বর্ণ ও রোপ্যের মোট c-সংখ্যক খণ্ডে s পরিমিত অর্থ লইতে চাহেন, তবে তাঁহাকে কত খণ্ড স্বর্ণ ও কত খণ্ড রোপ্য দেওয়া হইবে ?

ধর, নির্ণেয় রোপ্যথণ্ডের সংখ্যা = x;

তাহা হইলে, নির্ণেয় স্বর্ণথণ্ডের সংখ্যা = c-x.

এখন, একখানি রোপ্যথণ্ডের মূল্য $=\frac{s}{a}$

এবং 'একথানি স্বর্ণথণ্ডের মূল্য =

যেহেতু, কল্পনাহসারে, x-মংখ্যক রোপ্যথণ্ড ও 'c-x' সংখ্যক স্বর্ণখণ্ডের এক্ত্র-যোগে মূল্য s,

10 8.

মতএব,
$$s=x$$
. $\frac{s}{a}+(c-x)$. $\frac{s}{b}$;
$$1=\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b} \qquad \text{setd}, \quad x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{c}{b}-1 ;$$

$$\vdots \quad x=\frac{a(c-b)}{a-b}, \qquad \text{eq.}, \quad c-x=c-\frac{a(c-b)}{a-b}=\frac{b(a-c)}{a-b};$$

কাজেই, নির্দের স্বর্ণ ও রোপ্যথণ্ডের সংখ্যা যথাক্রমে $\frac{b(a-c)}{a-b}$ এবং $\frac{a(c-b)}{a-b}$.

395

উদা. 6. AB, 220 মাইল দীর্ঘ একটি রেলপথ। তিনখানা রেলগাড়ী P, Q ও R ঘণ্টার যথাক্রমে 25, 20 ও 30 মাইল গতিতে: ঐ পথে চলে। P ও Q যথাক্রমে 7 A.M. ও 8-15 A.M. এ, A হইতে B অভিমুখে, এবং B, B হইতে A অভিমুখে ছাড়িল। কোথায় এবং কোন্ সময় Q এবং B হইতে P সমদূরবর্ত্তী হইবে P

A Q • P R .B

মনে কর, উপরিস্থিত চিত্রান্থরূপ অবস্থানে P গাড়ীখানি Q ও R হইতে সমদূরবর্তী; এবং R গ্রাড়ীখানি B হইতে রওনা হওয়ার (অর্থাৎ, 10-30 A.M. এর) x ঘন্টা পরে উহারা উপরোক্ত অবস্থানে আসিয়াছে।

যেহেতু, 10-30 A.M. এর $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পূর্বের P গাড়ীখানি A হইতে রওনা হুইয়াছে, অতএব, উহা রওনা হওয়ার পর $(3\frac{1}{2}+x)$ ঘণ্টা চলিয়া উপরোক্ত অবস্থানে আদিয়াছে।

কাজেই,
$${}^{\bullet}AP=(3\frac{1}{2}+x).25$$
 মাইল ;
এবং, $AQ=(2\frac{1}{4}+x).20$ মাইল ;
আবার, $BR=30x$ মাইল ।
$$PQ=AP-AQ=\{(3\frac{1}{2}+x).25-(2\frac{1}{4}+x).20\}$$
 মাইল ।
এবং, $PR=AB-AP-BR=\{220-(3\frac{1}{2}+x).25-30x\}$ মাইল ।
$$PQ=PR ;$$

$$(3\frac{1}{2}+x).25-(2\frac{1}{4}+x).20=220-(3\frac{1}{2}+x).25-30x ;$$

$$50.(3\frac{1}{2}+x)-(2\frac{1}{4}+x).20=220-30x ;$$

$$60x=220-175+45=90 ; x=1\frac{1}{2}.$$

স্বতএব, 10-30 Λ .M. এর $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে, স্বর্থাৎ 12 টার সময়, P গাড়ী**থানি** Q ও R হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

জাবার, মেহেতু P, 7 টার সময় A হইতে রওনা হইয়াছে, অতএব, 12 টার সময় উহা A হইতে 5×25 অর্থাৎ 125 মাইল দূরে থাকিবে।

উদ্ধা. 7. তৃইজন যাত্রীর সঙ্গে মোট 5 হলর ওজনের মাল ছিল, এবং প্রত্যেকে যত পরিমাণ মাল বিনা ভাড়ার লইরা যাইতে পারে, তাহা বাদে তাহাদের যথাক্রমে 5 मि. 2 পে. ও 9 মি. 10 পে. মালের ভাড়া বাবদ দিতে হইল। কিন্তু, সমস্ত মালই একজনের হইলে, তাহাকে উদ্ব আধালের ভাড়া বাবদ 19 মি. 2 পে. দিতে হইত। প্লত্যেকের সঙ্গেকত ওজনের মাল ছিল ? এবং কত পরিমাণ মাল প্রত্যেকে বিনা ভাড়ার লইতে পারিত ?

ধর, প্রত্যেকে x হন্দর ওজনের মাল বিনা ভাড়ায় লইয়া যাইতে পারিত। তাহা হইলে, (5 শি. 2 পে.)+(9 শি. 10 পে. $)=(5^{\circ}-2x)$ হন্দরের ভাড়া ;

$$15 \times 12$$
 পে. = এক হন্দরের ভাড়া।

আবার, 19 শি. 2 পে. =(5-x) হন্দরের ভাড়া;

$$\frac{230}{5-x}$$
 পে. = এক হন্দরের ভাড়া।

অতএব,
$$\frac{15 \times 12}{5 - 2x} = \frac{230}{5 - x}$$
; $\therefore 18(5 - x) = 23(5 - 2x)$;

অথবা,
$$28x = 115 - 90 = 25$$
; $x = \frac{25}{28}$.

্ৰতএব, বিনা ভাড়ায় লওয়া যাইতে পারে, এরপ মালের ওজন $=\frac{2}{2}\frac{6}{8}$ হন্দর $=\frac{2}{2}\frac{6}{8} \times 4 \times 28$ পা. =100 পা. ;

এবং এক হন্দরের ভাড়া = $\frac{230}{5-x}$ পে. = $\frac{230}{5-\frac{25}{28}}$ পে. = $\frac{230\times28}{5\times23}$ পে. = 56 পে. 1

যেহেতু, প্রথম যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ভাড়া = 5 শি. 2 পে. = 62 পে.,

এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর উদ্বৃত্ত মালের ভাড়া = 9 শি. 10 পে. = 118 পে.,

ষতএব, প্রথম যাত্রীর উন্বৃত্ত মালের ওজন = $\frac{62}{58}$ হন্দর = $\frac{62}{58} \times 4 \times 28$ পা. = 124 পা. ; এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর উন্বৃত্ত মালের ওজন = $\frac{118}{58}$ হন্দর = $\frac{118}{58} \times 4 \times 28$ পা. = 236 পা. ; স্কুতরাং, প্রথম থাত্রীর মোট মালের ওজন = (100 + 124) পা. = 224 পা. ;

এবং, দ্বিতীয় যাত্রীর মোট মালের ওজন = (100 + 236) পা. = 336 পা.।

উদা. 8. কোন ব্যক্তি, প্রতি পাউগু 3 শি. দরে কতর্ক পরিমাণ এবং প্রতি পাউগু 5 শি. দরে কর্ডক পরিমাণ, চা ক্রম করিয়া উভয় প্রকার চা এরূপভাবে সংমিশ্রণ করিল যে, মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউগু 3 শি. ৪ পে. দরে বিক্রয় করিলে, প্রতি পাউণ্ডে তাহার শতকরা 10 শি. হিসাবে লাভ হইতে পারে। ভাল চায়ের প্রতি পাউণ্ডের সহিত সে কত পরিমাণ খারাপ চা মিশাইয়াছিল ?

ধর, ভাল চায়ের এক পাউণ্ডের সহিত সে x পাউণ্ড্থারাপ চা মিশ্রিত করিয়াছিল। এখন, এক পাউণ্ড্ভাল চা ও x পাউণ্ড্থারাপ চায়ের

, মোট ক্রয়-মূল্য =
$$(3x + 5)$$
 শি.;

.:Arr মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউণ্ডের ক্রয়-মূল্য $=rac{3x+5}{x+1}$ শি.।

কিন্তু, মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউণ্ড 3 ব্ব শি. দরে বিক্রয় করিলে, তাহার শতকরা 10 শি. লাভ হইবে; অর্থাৎ, প্রতি 100 শি. এর দরুণ সে 110 শি., অথবা, প্রতি শিলিং এর দরুণ মে $\frac{1}{2}$ কি. করিয়া পাইবে।

কাজেই,
$$3\frac{2}{3}$$
 শি. = মিন্সিত চায়ের ক্রম-মূল্যের $\frac{1}{10}$ অংশ ; . . . $\frac{11}{10} \times \frac{3x+5}{x+1}$; অথবা, $\frac{11}{3} = \frac{11}{10} \times \frac{3x+5}{x+1}$; অথবা, $\frac{10(x+1)=3(3x+5)}{3}$; $x=5$.

অতএব, ভাল চায়ের প্রতি পাউণ্ডের সহিত সে 5 পাউণ্ড খারাপ চা মিশাইয়াছিল।

উদ্ধা. 9. কোন সৈন্সাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ সৈন্সগণদ্বারা 5-গভীরতাবিশিষ্ট (5-deep) এক শূন্সগর্ভ বর্গ (hollow square) রচনা করিতে পারেন, অথবা, 6-গভীরতাবিশিষ্ট (6-deep) এক শূন্সগর্ভ বর্গও রচনা কন্ধিতে পারেন; কিন্তু, প্রথমোক্ত বর্গের সন্মুথ-ফারির সৈন্সসংখ্যা হইতে শেষোক্ত বর্গের সন্মুথ-সারির সৈন্সসংখ্যা হইতে শেষোক্ত বর্গের সন্মুথ-সারির সৈন্সসংখ্যা হ কম ৯ কিন্তু দলে মোট কত সৈন্স ছিল?

্যদি কয়েকজন লোককে, কতকগুলি সমান্তর ও সমভাবে স্থিত বিভিন্ন সারিতে এরূপে সাজান যায় যে, প্রত্যেক সারির লোকসংখ্যা, মোট সারির সংখ্যার সমান, তাহা হইলে, ঐ লোকদিগকে একটি সম্পূর্ণ বিরোধ (in a solid square) সাজান হইল, বলা হয়। নিম্নপ্রদন্ত চিত্র হইতে, এইরূপ বর্গ-রচনার পরিকার ধারণা হইবে। এক্ষেত্রে, A_1 , B_1 , C_1 , প্রভৃতি এক একজন লোক নির্দেশ করিতেছে।

চিত্ৰে প্ৰদৰ্শিত সম্পূৰ্ণ বৰ্গে (solid square এ) সৰ্ব্বগুদ্ধ আটটি সান্নি এবং প্ৰত্যেক সান্নিতে আটজন

করিয়া লোক আছে। এই বর্গের অভ্যন্তর হইনে, $C_8F_8F_0C_6$ সম্পূর্ণ বর্গটি অপসারিত করা হইলে, অবশিষ্টাংশকে 2-পাতীরতাবিশিষ্ট একটি শুন্যগর্জ বর্গ (hollow square, two-deep) বলা হয় ; ম্পষ্টতঃ, ইহারও সম্প্র-সারির লোকসংখ্যা 8 ; কিন্তু, $C_8F_8F_6C_6$ বর্গটির পরিবর্জে, যদি $D_4E_4E_6D_6$ বর্গটি অপসারিত করা হইত, তাহা হইলে অবশিষ্টাংশকে 3-গভীরতাবিশিষ্ট (three-deep) একটি শৃন্তগর্জ বর্গ (hollow square) বলা হইত ; বলা বাছল্য যে, এন্থলেও সম্প্র-সারির লোকসংখ্যা 8 ই থাকিত ।

অতএব দেখা যায় যে, সন্মুখ-সারিতে x-সংখ্যক লোক সমধিত, এবং 2-গভীরতাবিশিষ্ট (two-deep) কোন শৃন্থগর্ভ বর্গের লোকসংখ্যা = $x^2 - (x - 4)^2$; ইত্যাদি।

কাজেই, যে শ্নাগর্ভ বর্গের (hollow square এর) সন্ধ্ব-দারির লোকসংখ্যা x, এবং যাহার গন্তীরতা (depth) n, সেই শ্নাগর্ভ বর্গের লোকসংখ্যা $=x^2-(x-2n)^2$.]

ধর, উদাহরণোল্লিখিত প্রথমোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈত্যসংখ্যা =x; তাহা হইলে, শেষোক্ত বর্গের সম্মুখ-সারির সৈত্যসংখ্যা, স্পষ্টতঃ, =x-4.

কাজেই, প্রথমোক্ত বর্গের সৈন্তসংখ্যা =
$$x^2 - (x - 10)^2$$
;.....(1)

এবং শেষোক্ত বর্গের সৈক্তসংখ্যা =
$$(x-4)^2 - \{(x-4) - 12\}^2$$
;.....(2)

এখন, যেহেতু একই দৈন্সদল হইতে উভয় প্রকার বর্গ রচনা হইতে পারে, অতএব, মোট দৈন্সসংখ্যা উভয় ক্ষেত্রেই এক ।

স্থতারাং,
$$x^2 - (x-10)^2 = (x-4)^2 - \{(x-4) - 12\}^2$$
; অথবা, $20x - 100 = 24(x-4) - 144$; অথবা, $4x = 144 + 96 - 100 = 140$; $x = 35$.

কাজেই, (1) হ'হতে, নির্ণেয় সৈম্প্রসংখ্যা = $35^2 - 25^2 = 60 \times 10 = 600$.

প্রথমালা 95

- বেলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছইটির একটি,
 অপরটির উপর সমাপতিত হইবে ?

 বিলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছইটির একটি,

 অপরটির উপর সমাপতিত হইবে ?

 বিলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছইটির একটি,

 অপরটির উপর সমাপতিত হইবে ?

 বিলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছইটির একটি,

 অপরটির উপর সমাপতিত হইবে ?

 বিলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছইটির একটি,

 অপরটির উপর সমাপতিত হইবে ?

 বিলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছইটির একটি,

 অপরটির উপর সমাপতিত হইবে ?

 বিলা তিনটা ও চারিটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছইটির একটি,

 অপরটির উপর সমাপতিত হবৈ প্রকাশ কাল্যে বিলাল কাল্যে ঘড়ির কাঁটা ছইটির একটি,

 বিলাল কাল্যে বিলাল ক
- 2. অপরাহ্ন পাঁচটা ও ছয়টার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে, ঘড়ির কাঁটা ছইটি একত্রিত হইবে? [কলি: প্রবেশিকা, 1886.]
- 3. বেলা সাতটা ও আটটার মধ্যে ঠিক কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছইটি (i) পরস্পান্ত বিপরীতমুখী, (ii) পরস্পার্-লম্ব, (iii) একত্রিত, হইবে ?

- 4. ছয়টা বাজিবার পর সর্বপ্রথম কোন্ সময়ে, ঘড়ির কাঁটা তৃইটি
 (i) পরস্পর-বিপরীতমুখী, (ii) পরস্পর-লম্ব, হইবে ?
- 5. ঘুই ব্যক্তির একজন, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টার p মাইল গতিতে, এবং অন্তজন B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টার q মাইল গতিতে, চলিতে লাগিল ; উহারা একই সময়ে যাত্রা করিয়া থাকিলে এবং A ও B এর দূরত্ব a মাইল হইলে, A হইতে কতদূরে উহারা পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে p
- 6. তুই ব্যক্তি পরস্পর সাক্ষাৎ করিবার জন্ম 22 মাইল পুরবর্ত্তী তুইটি স্থান হইতে . যথাক্রমে, ঘণ্টায় 5 মাইল ও 6 মাইল গতিতে, চলিতে আরম্ভ করিল; তাহারা প্রথম সাক্ষাতের পরও (পুনর্ব্বার সাক্ষাতের জন্ম) বরাবর চলিতে থাকিলে, কোথায় ও কোন্ সময়ে, তাহারা পুনরায় মিলিত হইবে ?
- ে কোন ব্যক্তি ঘোড়ায় চড়িয়া A হইতে B পর্যান্ত বাইতে এক-তৃতীয়াংশ পথ ঘণ্টায় a মাইল গতিতে এবং বাকী পথ ঘণ্টায় 2b মাইল গতিতে অতিক্রম করিল; সে যদি, প্রথম হইতে বরাবর ঘণ্টায়, 3c মাইল গতিতে চলিত, তাহা হইলে, সে ঐ সময়ের মধ্যে B তে পৌছিয়া পুনরায় A তে ফিরিয়া আসিতে পারিত।

প্রমাণ কর যে,
$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
. [কলিঃ প্রাবেশিকা, 1889.]

- 8. কোন দৌড়-প্রতিযোগিতায়, A, B কে পাঁচ মিনিটে 75 গজ পিছনে ফেলিয়া, 900 গজ পথ অতিক্রম করিল; কিন্তু এই সময়, A হঠাৎ পড়িয়া যাইয়া, পূর্ববেগ অপেক্ষা মিনিটে 20 গজ কম দৌড়াইয়াও, B হইতে মাত্র আর্দ্ধ মিনিট পরে গন্তব্যস্থাবে পৌছিল। মোট কত সময়ের জন্ম প্রতিযোগিতা চলিয়াছিল?
- 9. কোশ শহর হইতে, এক ব্যক্তি কোন নির্দিষ্ট সময়ে এক নির্দিষ্ট স্থানে। পৌছিবার নিমিত্ত ফাত্রা করিয়া এক-চতুর্থাংশ পথ অতিঐম করিবার পর বুঝিতে পারিল বে, দে ঐরপ বেগে চলৈতে থাকিলে নির্দিষ্ট সময়ে গন্তব্যপথের কেবলমাত্র ভূ অংশ যাইতে পারিবে; তৎপরে, দে ঘণ্টায় এক মাইল হিসাবে তাহার গতি বাড়াইয়া ঠিক সময়েই নির্দিষ্ট স্থানে পৌছিল। তাহার ভ্রনণের গতি নির্ণয় কর।
- 10. কোন প্রজা, বাৎঁসরিক খাজানা বাবদ নগদ ± 80 এবং কতক পরিমাণ ধান দেওঁ থার চুক্তিতে, কতক জমি পত্তন লইল। ধানের দর যথন প্রতি বুসেল্ ± 1.5 গি., তথন তাহার জমির খাজানা গড়ে প্রতি একরে ± 1.15 গি. করিয়া পড়িফ; এবং ধান যথন প্রতি বুসেল্ ± 1.10 গি. দরে বিক্রয় হইত, তথন তাহার জমির খাজানা গড়ে প্রতি একরে ± 2 করিয়া পড়িত। কত বুসেল্ ধান ভাহাকে খাজানা বাবদ দিতে হইত?

- 11. কোন চাপরাসীকে বাৎসরিক £8 ও একটি অফিস-পরিচ্ছদ দেওয়ার চুক্তিতে কাজে নিযুক্ত করিয়া, 7 মাস পরে নগদ £2. 3 শি. 4 পে. ও অফিস-পরিচ্ছদ দিয়া, কাজ হইতে বরথাস্ত করা হইল। অফিস-পরিচ্ছদের মূল্য কত ছিল?
- 12. একটি খরগোস 50 লাফে যতদ্র পথ অতিক্রম করিতে পারে, ততদ্র হইতে একটি কুকুর থরগোসটিকে ধরিবার জন্ম দোড়াইতে লাগিল। কুকুর যে সময়ে তিনবার লাফ দেয়, কিন্তু কুকুর ছই লাফে যতদ্র যায়, খরগোস তিন লাফে ততদ্র যায়। কুকুর কতবার লাফ দেওয়ার পর থরগোসটিকে ধরিবে?
- 13. একটি কুকুর 60 লাফে যতদ্র যাইতে পারে, ততদ্র পিছন হইতে, 'সে একটি খরগোসকে ধরিবার জন্ম দৌড়াইতে লাগিল। খরগোস যে সময়ে পাঁচবার লাফ দেয়, কুকুর সেই সময়ে চারিবার লাফ দেয়; কিন্তু খরগোস চারি লাফে যতদ্র যায়, কুকুর তিন লাফে ততদ্র যায়; খরগোসটি ধ্যা পড়িবার সময় পর্যান্ত, প্রত্যেকে কতবার লাফ দিয়াছিল?
- 14. 'সেণ্ট্ জন্'এর নৌকাখানি, 30 বার দাঁড় টানিয়া যতদূর অগ্রসর হইতে পারে, ততদূর পিছন হইতে 'কেয়াস্' এর নৌকা 'জন্' এর নৌকাটিকে ধরিবার জন্ত উহার পশ্চাদ্গামী হইল। 'কেয়াস্' এর নৌকায় যে সময়ে তিনবার দাঁড় টানা হয়, 'জন্' এর নৌকায় সে সময়ে চারিবার দাঁড় টানা হয়; কিন্ত ত্ইবার দাঁড় টানায় 'কেয়াস্' এর নৌকা যতদূর যায়, তিনবার দাঁড় টানায় 'জন্' এর নৌকা যতদূর যায়। 'জন্' এর নৌকার সহিত সজ্মর্থ করিবার সময় পর্য্যন্ত, 'কেয়াস্' এর নৌকায় কতবার দাঁড় টানা হইয়াছিল ?
- 15. A এবং B কতকগুলি শিলিংএ পরিপূর্ব একটি থলিয়া পাইল $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ A উহা হইতে 2 শিলিং এবং অবশিষ্টের ছয়ভাগের একভাগ, এবং তৎপরে $\overset{\circ}{B}$, 3 শিলিং ও এতদবশিষ্টের ছয়ভাগের একভাগ লইয়া দেখিতে পাইল যে, উভয়ই সমান অংশ লইয়াছে। থলিয়াটিতে কত সংখ্যক শিলিং ছিল, এবং প্রত্যেকে কত করিয়া লইয়াছিল ?
- 16. নাবিকদের জন প্রতি এক পাউণ্ড্ হিসাবে 60 দিনের আহার্য্য বিস্কৃট লইয়া সমুদ্রপথে কোন জাহাজ রওনা হইল। রওনা হওয়ার 20 দিন পরে, ঝড় ও বক্সায় 5 জন নাবিক ভাসিয়া গেল, এবং জাহাজখানিও এরূপ ক্ষতিগ্রস্ত হইল যে, উহাকে এস্থানে 24 দিন বিলম্ম কুরিতে হইল। এই জন্ম, প্রত্যেক নাবিকের দৈনিক আহার্য্য এক পাউণ্ডের দি, অংশতে পরিণত করিতে হইলে, কতজন নাবিক লইয়া জাহাজখানি রওনা হইয়াছিল ?

- 17. জলের ভিতর ওজন করায়, 19 পাউগু সোনা 18 পাউগু হইলে, এবং 10 পাউগু রপা 9 পাউগু হইলে, সোনা ও রূপা নির্দ্মিত একটি ডেলার ওজন যদি সাধারণভাবে (অর্থাৎ, বায়ুতে) 106 পাউগু, এবং জলের ভিতর 99 পাউগু হয়, তবে ডেলাটির ভিতর কত পরিমাণ সোনা এবং কত পরিমাণ রূপা আছে, তাহা নির্ণয় কর।
- 18. কোন লোক নোকায় দাঁড় টানিয়া দশ ঘণ্টায় কেম্ব্রিজ (Cambridge) হইতে 20 মাইল দ্রবর্ত্তী ইলি শহর (Ely) পর্যান্ত যাইয়া পুনরায় কেম্ব্রিজ ফিরিয়া আদিল; ঐ সময়ে স্রোতের গতি সর্বক্ষণ একই দিকে ছিল। সে লক্ষ্যাণ্ডল যে, স্রোতের অন্তর্কুলে 3 মাইল পথ যাইতে, তাহার যে সময় লাগিয়াছিল, সেই সময়ে স্রোতের প্রতিকৃলে সে মাত্র 2 মাইল পথ অতিক্রম করিতে পারিয়াছিল। কেম্ব্রিজ হইতে ইলি যাইতে তাহার কত সময় লাগিয়াছিল, এবং ইলি হইতে ফিরিয়া আসিতেই বা কত সময় লাগিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।
 - 19. কোন লোক তাহার জীবনের $\frac{1}{3}$ অংশ শৈশবে, $\frac{1}{12}$ অংশ যৌবনে এবং ($\frac{1}{7}$ অংশ +5 বৎসর) প্রোঢ়াবৃস্থায় কাটাইবার পর, তাহার একটি পুত্র জয়ে । পুত্রটি পিতার অর্দ্ধ বয়সে মারা ঘাইলে এবং পিতা তাহার পদ্ম আরও চারি বৎসর বাঁচিয়া থাকিলে, পুত্রটি কত বয়সে মারা গিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর ।
- 20. তুইটি ধাতব শলাকার একটি 14 আউন্দ্রপা ও 6 আউন্টিন্ দারা, এবং অপরটি 8 আউন্দ্রপা ও 12 আউন্টিন্ দারা, নির্মিত; সমান পরিমাণ রূপা ও পটিন দারা নির্মিত 20 আউন্ ওজনের একটি শলাকা তৈয়ার করিতে হইলে, উপরোল্লিখিত শলাকা তুইটির প্রত্যেকটি হইতে, কতটুকু করিয়া লইতে ইইবে ?
- 21. £607. 1 শি. ও ৪ পে. কে এরূপ ছই অসমান অংশে ভাগ কর যে, বৃহত্তর অংশের ছই বৎসঁরের শতকরা £3½ হারে স্থান, অপর অংশের 2½ বৎসরের শতকরা £3½ হারে স্থান স্থান হটতে, £18, 16 শি. বেশী হটবে।
- 22. কোন ভদ্রলোক তাঁহার আসবাবপত্রের চারিটি জিনিষ স্থানান্তরিত করিবার নিমিত্ত, প্রথম জিনিষটির জন্ম তুইটি, দ্বিতীর জিনিষটির জন্ম তিনটি, তৃতীয় জিনিষটির জন্ম চারিটি এবং চতুর্থ জিনিষটির জন্ম পাঁচটি কুলী নিযুক্ত করিলেন। প্রথম শ্রেণীর কুলীদ্বানেক একটি প্রদাপূর্ণ থলিয়া এবং আরও এক পয়সা, দ্বিতীয় শ্রেণীর কুলীতিনটিকে একটি প্র্বাহ্মরূপ থলিয়া এবং আরও চারিটি পয়সা, তৃতীয় শ্রেণীর কুলী চারিটিকে একটি প্র্বাহ্মরূপ থলিয়া এবং আরও নাটি পয়সা এবং চতুর্থ শ্রেণীর কুলী পাঁচটিকে একটি প্র্বাহ্মরূপ থলিয়া এবং আরও নাটি প্রসা এবং চতুর্থ শ্রেণীর কুলী পাঁচটিকে একটি প্র্বাহ্মরূপ থলিয়া এবং আরও নাটি প্রসা দিয়া দেখিতে পাইলেন যে, তৃতীয় ও চতুর্থ শ্রেণীর কুলীদিগের প্রত্যেকে সমান সংখ্যক প্রসা পাইয়াছে। প্রত্যেক

পলিয়াতে কত করিয়া পয়সা ছিল, প্রত্যেক কুলী কত করিয়া পয়সা পাইয়াছিল এবং ভদ্রলোকই বা সর্বসমেত কত পয়সা দিয়াছিলেন, তাহা নির্ণয় কর।

- 23. পনেরথানা গিনির ওজন 4 আউুন্ হওয়া উচিত; কিন্তু, গিনিপূর্ণ একটি পার্শেরে গিনিগুলি ওজন করিয়া, এবং উহাদের সংখ্যা গণনা করিয়া, দেখা গেল যে, ওজনামুসারে উহাতে গিনির সংখ্যা যত হওয়া উচিত, প্রক্তপক্ষে তাহা হইতে (পার্শেলে) নয়খানা গিনি বেশী আছে। আবার, পার্শেলস্থিত গিনির সংখ্যার অর্দ্ধ হইতে $10\frac{1}{2}$ খানি বেশী গিনির ওজন, ঐ সংখ্যক গিনির যথাযথ ওজন হইতে $1\frac{1}{2}$ আউন্স্ক্র পার্শেলেকতগুলি গিনি ছিল ?
- 24. কোন কর্ম্মকার £10 মূল্যের কতক পরিমাণ বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের বিনিময়ে স্মপরিমাণ সাধারণ রৌপ্য ও নগদ ,£3. 15 শি. পাইল। পুনরায়, সে পূর্বপ্রকার 12 আউন্স্ বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের বিনিময়ে ৪ আউন্স্ সাধারণ রৌপ্য (যাহার জন্ম সে পূর্ব হারেই মূল্য ধরিয়াছিল) ও নগদ £2. 16 শি. পাইয়াছিল। বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতের এক আউন্সের মূল্য কত, এবং কত পরিমাণ বিশুদ্ধ রৌপ্য-পাতই বা সে প্রথমে বিক্রয় করিয়াছিল?
- 25. তুইজন যাত্রীকে, তাহাদের অতিরিক্ত মালের ভাড়া বাবদ যথাক্রমে 2 শি. 10 পে. ও 7 শি. 6 পে., দিতে হইয়াছিল; যদি সমস্ত মালই একজনের হইত, তাহা হইলে তাহাকে অতিরিক্ত মালের ভাড়া বাবদ 14 শি. 6 পে. দিতে হইত; যদি বিনা ভাড়ায় কোন মাল লইয়া যাইতে দেওয়া না হয়, তবে, তাহাদের প্রত্যেককে কত করিয়া মালের ভাড়া বাবদ দিতে হইবে?
- 26. কোন ঘ্সওয়ালা, 'হাজার আঁটি 5 টাকা' দরের কত আঁটি ঘাস, 'হাজার আঁটি 6 টাকা' দরের, 5600 আঁটির সহিত মিশাইবে, যাহাতে মিশ্রণের প্রতি 100 আঁটি 11 আনা দরে বিক্রয় করিয়া তাহ্যুর শতকরা 20 টাকা করিয়া লাভ হুইবে ?
- 27. কোন বালক প্রতি 2 পেন্সে 3 টা দরে কতকগুলি, এবং প্রতি পেন্সে 2 টা দরে পূর্ব্ব সংখ্যার এক-তৃতীয়াংশ কমলালেবু ক্রয় করিল। সমস্ত কমলালেবু কত দরে বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা 20 শিলিং করিয়া লাভ থাকিবে ? তাহার মোট লাভ 5 শি. 4 পে. হইয়া থাকিলে, সে মোট কতগুলি লেবু কিনিয়াছিল ?
- 28. কোন লোক, কতকগুলি বৈদেশিক স্বর্ণমূজার প্রত্যেকটি হইতে উহার,
 পাঁচভাগের একভাগ ঘষিয়া বাহির করিয়া নিয়া, উহাদের (এরূপ হাল্কা স্বর্ণমূজার)

 है অংশ চালাইবার পর ধরা পড়িল; এবং একটি হাল্কা মূজা বাদে, বাকী সকল মূজাই
 হাল্কা বিন্ধা বাজেয়াপ্ত হইল। তাহার নিকট যে মূজাটি রহিল তাহা লইয়া সরিয়া

পড়িয়া দেখিতে পাইল যে, সে পূর্ব্বে যত পরিমাণ লাভ করিয়াছিল, পরে তাহার ঠিক তত পরিমাণ লোকসান হইয়াছে। প্রথমে তাহার নিকট কতগুলি বৈদেশিক মুদ্রা ছিল ?

- 29. তিন অঙ্কবিশিষ্ট এরূপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার অঙ্ক তিনটির যে কোনটি তৎপরবর্তী অঙ্কটি হইতে এক বেশী, এবং নির্ণেয় সংখ্যাটি হইতে, উহাকে উন্টাইয়া নিথিয়া লব্ধ সংখ্যার এক-চতুর্থাংশের পার্থক্য, সংখ্যাস্থিত অঙ্কত্রয়ের সমষ্টির ৪৫ গুণ হইবে।
- 30. কোন সৈন্সদলকে সম্পূর্ণ বর্গে সাজাইয়া দেখা গেল যে, 60 জন সৈন্স বেশী হইয়াছে; তৎপরে, উহার সম্মুখ-সারির সংখ্যা 5 বাড়াইয়া, এবং গভীরতায় (depth-এ) 3 জন সৈন্স কমাইয়া দেখা গেল যে, উহাতে একজন সৈন্স কম পড়ে। দলের সৈন্সসংখ্যা নির্ণয় কর।
- 31.. কোন সৈন্তাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ সৈন্তাগদারা 10-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শ্রুগর্ভ বর্গ (hollow square, 10-deep) রচনা করিতে পারেন। দলে মোট 2800 সৈন্ত থাকিলে, উপরোক্ত বর্গের সন্মুখ-সারির সৈন্তসংখ্যা কত ?
- 32. একদল লোককে, 4-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শৃন্সগর্ভ বর্গে, অথবা, ৪-গভীরতাবিশিষ্ট একটি শৃন্সগর্ভ বর্গে, সাজান যাইতে পারে; কিন্তু, প্রথমোক্ত বর্গের সন্মুখ-সারির সংখ্যা হইতে 19 বেশী। দলের লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।
- 33. সম্মুথ-সারির সৈশুসংখ্যা হইতে গভীরতায় পাঁচজন বেশী সৈশু লইয়া, একদল সৈশু সমভাবে অগ্রসর হইতেছিল; কিন্তু, শত্রুসৈশু দৃষ্টিগোচর হওয়ায়, সম্মুথ-সারির সৈশুসংখ্যা 64^{7} 5 বাড়াইয়া দলটিকে নৃতন রকমে সাজাইতে হইল; এবং ইহা করিতে গভীরতা 5 এ পরিপ্রত করিতে হইল। দলে কত সৈশু ছিল?

সপ্তবিংশ অপ্রায়

জটিল সহ-সমীকরণ (Harder Simultaneous Equations)

এবং

তৎসম্পর্কীয় প্রশাবলী (Problems)

180. তুইটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সহজ সহ-সমীকরণ (simultaneous equations) সমাধান করিবার প্রণালী অটাদশ অধ্যায়ে বর্ণিত হইয়াছে। এক্ষণে, ঐ বিষয়ে অপেক্ষাকৃত বিশ্দরূপে আলোচনা করা যাইতেছে।

181. বজ্ৰপ্ৰ-প্ৰপালী (Method of Cress Multiplication) :

 $a_1x+b_1y+c_1z=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2z=0$ * হইলে, প্রমাণ করিতে হুইবে যে.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

প্রথম সমীকরণটিকে c_2 দারা এবং দিতীয়টিকে c_1 দারা গুণ করিয়া,

$$a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z = 0,$$

$$43?, \quad a_2c_1x + b_2c_1y + c_2c_1z = 0.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া.

$$(c_1a_2-c_2q_1)x+(b_2c_1-b_1c_2)y=0$$
;

^{*} এই নিয়মে, x ও y এর সহগরণে ব্যবহাত অক্ষরগুলির সম্পর্কে কিছু বলা আবশুক। স্পাইই, c বেরূপ d হইতে, অথবা, অক্স যে কোন অক্ষর বেরূপ অপর আর একটি অক্ষর হইতে বিভিন্ন, এক্ষেত্রে, সেইরূপ ' a_1 ও a_2 হইতে বিভিন্ন, বিলিয়া করনা করা হইয়াছে। b_1 , b_2 ; c_1 , c_2 ; প্রভৃতিকেও অক্সরণ অর্থে প্রয়োগ করা হইয়াছে। ইহার কারণ এই যে, বিভিন্ন, সমীকরণের অকুরূপ সহগগুলিকে বিভিন্ন অক্সুক্ত (with different suffixes) একই অক্ষর ছারা স্টিত করিলে, উহাদের সমাধানলীর ফলগুলি মনে রাধা সম্ভূজ হন। এই উদ্দেশ্যেই, প্রথম সমীকরণের x এর সহগকে a_1 ছারা, এবং দ্বিতীয় সমীকরণের x এর সহগকে a_2 ছারা, স্টিত করা হইয়াছে; এবং b_1 , b_2 ; c_1 , c_2 ; প্রভৃতিরও অক্সরণ অর্থ বৃঝিতে হইবে। কোন কোন সময়ে, অক্ষরগুলিকে অক্স্কুক্ত না কেরিয়া মাত্রা-(dash) যুক্ত করিয়াও এরূপ অর্থ ব্ঝান হয়। যথা, x, y, x সমন্থিত ভিনটি সহ-সমীকরণ থাকিলে, প্রথমটিতে x, y ও x এর সহগগুলিকে যথাক্রমে a', b', c'' ছারা; দ্বিতীয়টিতে, a'', b'', c'' ছারা, স্টিত করা হইয়া থাকে।

$$(c_1a_2-c_2a_1)x=(b_1c_2-b_2c_1)y$$
;

$$b_1c_2-b_2c_1-\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}. ... (1)$$

আবার, প্রথম সমীকরণটিকে a2 দারা, এবং দ্বিতীয়টিকে a1 দারা গুণ কর:

$$a_1a_2x + b_1a_2y + c_1a_2z = 0,$$

$$a_2a_1x + b_2a_1y + c_2a_1z = 0.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া.

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y + (c_2a_1 - c_1a_2)z = 0;$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = (c_1a_2 - c_2a_1)z;$$

$$c_1 a_2 - c_2 a_1 \quad a_1 b_2 - a_2 b_1$$
 (2)

অতএব, (1) ও (2) হইতে,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2-c_2a_1} = \frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

টীকা। সমীকরণটিকে নিম্নলিখিতরূপে একটির নীচে অপরটিকে লিখিয়া, উপরোক্ত ফলগুলি অতি সহজে মনে রাখা যায়:

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

এক্ষণে, দেখা যায় যে,

- (i) x এর নীচে যে রাশিটি আছে, উহা = (প্রথম সমীকরণের y এর সহগ \times বিতীয় সমীকরণের z এর সহগ) বিমোগ (বিতীয় সমীকরণের y এর সহগ \times প্রথম সমীকরণের z এর সহগ) :
- (ii) y এর নীচের রাশিটি = (প্রথম সমীকরণের z এর সহগ \times দিতীয় সমীকরণের x এর সহগ \times প্রথম সমীকরণের x এর সহগ \times প্রথম সমীকরণের x এর সহগ \times প্রথম সমীকরণের x এর সহগ \times
- (iii) z এর নীচের রাশিটি = (প্রথম সমীকরণের x এর সহগ \times দ্বিতীয় সমীকরণের y এর সহগ সিকরণের y এর সহগ) বিয়োগ (দ্বিতীয় সমীকরণের x এর সহগ \times প্রথম সমীকরণের y এর সহগ)।

অমুসি. । উপরোক্ত সমীকরণদ্বয়ে, z এর পরিবর্ত্তে 1 বসাইলে,

$$b_1c_2-b_2c_1$$
 ত $a_1a_2-c_2a_1$ $a_1b_2-a_2b_1$, পাওয়া যায়। এবং, ইহা হইতেই, $a_1x+b_1y+c_1=0$ ্য এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$

সহ-সমীকরণদ্মের বীজ (root), অর্থাৎ $x \otimes y$ এর মান, নির্ণয় করা যায় \mathbf{k}

টীকা। উপরোক্ত ফলগুলি ভালরূপে মুখস্থ করিয়া রাখা উচিত। এইগুলি দারা যে শুধু ছইটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট সহ-সমীকরণ সহজে ও স্থচারুরূপে সমাধান করা যাইতে পারে, তাহা নহে; তিনটি অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট একশ্রেণীর সহ-সমীকরণের সমাধানেও এইগুলি সর্বাদা ব্যবহৃত হইয়া থাকে। দৃষ্টাস্তম্বরূপ, নিম্নে কতকগুলি উদাহরণ সন্ধিবেশিত হইল।

উপা. 1. সমাধান কর:
$$3x - 5y + 9 = 0$$
 $5x - 3y - 1 = 0$ এখানে, $a_1 = 3$, $b_1 = -5$, $c_1 = 9$; $a_2 = 5$, $b_2 = -3$, $c_2 = -1$. স্থতরাং,
$$\frac{x}{(-5)(-1) - (-3) \cdot 9} = \frac{y}{9 \times 5 - (-1) \cdot 3} = \frac{3 \cdot (-3) - 5 \cdot (-5)}{3 \cdot (-3) - 5 \cdot (-5)}$$

তি (-5)(-1)-(-3).9
$$9 \times 5 - (-1).3$$
 $3.(-3)-5.(-5)$ তি পথবা, $\frac{x}{5+27} = \frac{y}{45+3} = \frac{1}{-9+25}$; $\frac{x}{32} = \frac{y}{48} = \frac{1}{16}$; $\frac{x}{32} = \frac{y}{48} = \frac{y}{48$

উদা. 2. সমাধান কর:
$$-7x + 8y = 9$$
 ·· (1) $5x - 4y = -3$ ·· (2)

স্থতরাং,

$$\frac{x}{8 \times 3 - (-4)(-9)} = \frac{y}{(-9).5 - 3.(-7)} = \frac{1}{(-7)(-4) - 5 \times 8};$$
weat,
$$\frac{x}{24 - 36} = \frac{y}{-45 + 21} = \frac{1}{28 - 40};$$
weat,
$$\frac{x}{-12} = \frac{y}{-24} = \frac{1}{-12};$$

$$x = \frac{-12}{-12} = 1, \quad \text{at} \quad y = \frac{-24}{-12} = 2.$$
wout,
$$x = 1 \quad \text{at} \quad y = 2.$$

উদ্ধি. 3. সমাধান কর:
$$(x+7)(y-3)+7=(y+3)(x-1)+5$$
 $\cdots (1)$

$$5x-11y+35=0 \qquad \cdots \qquad \cdots (2)$$

িকলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

(1)
$$xy + 7y - 3x - 14 = xy + 3x - y + 2$$
,

$$6x - 8y + 16 = 0;$$

$$3x - 4y + 8 = 0$$

$$5x - 11y + 35 = 0$$

স্থতরাং,

'(-4).35 - (-11).8 =
$$\frac{y}{8 \times 5 - 35 \times 3} = \frac{1}{3.(-11) - 5.(-4)}$$
;

অথবা, $\frac{x}{-140 + 88} = \frac{y}{40 - 105} = \frac{1}{-33 + 20}$,

অথবা, $\frac{-52}{-52} = \frac{y}{-65} = -13$.

অতথব, $x = 4$ এবং $y = 5$.

উদা. 4. সমাধান কর:
$$2x-3y+4z=0$$
 ... (1) $7x+2y-6z=0$... (2) $4x+3y+z=37$... (3)

এখন, (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{x}{(-3)(-6)-2\times 4} = \frac{y}{4\times 7 - (-6)\cdot 2} = \frac{z}{2\times 2 - 7\cdot (-3)},$$
 with
$$\frac{x}{10} = \frac{y}{40} = \frac{z}{25}; \quad \text{with}, \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z}{5}.$$

মনে কর, উপরোক্ত প্রত্যেক ভগ্নাংশই, k, এই অজ্ঞাতরাশির সমান

তাহা হইলে,
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z}{5} = k$$
; $x = 2k$, $y = 8k$, $z = 5k$ কে)

এখন, x , y , z এর মানগুলি (3) তে বসাইয়া,

 $k(8 + 24 + 5) = 37$,

অথবা, $37k = 37$; $\therefore k = 1$.

স্থেতরাং, (ক) হইতে, $x = 2$, $y \Rightarrow 8$ এবং $z = 5$.

সহজ বীজগণিত

উদ্ধা. 5. সমাধান কর:
$$x+6y=5z$$
 ... (1) $7x+z=6y$... (2) $5x+6y-4z=24$... (3)

(1) হইতে,
$$x + 6y - 5z = 0$$

(2) হইতে,
$$7x - 6y + z = 0$$

স্থতরাং,
$$\frac{x}{6 \times 1, -(-6).(-5)} = \frac{y}{(-5).7 - 1 \times 1} = \frac{z}{1.(-6) - 7 \times 6}$$

$$\text{sign}, \quad \frac{x}{6 - 30} = \frac{y}{-35 - 1} = \frac{z}{-6 - 42};$$

$$\therefore \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

[প্রত্যেকটি ভগ্নাংশর্কে - 12 দারা গুণ করিয়া]

এখন, ভগ্নাংশগুলির গ্রত্যেকটি = k, ধরিয়া লইয়া,

$$x = 2k, \quad y = 3k, \quad z = 4k.$$
 ... (4)

x, y, z এর মানগুলি (3) তে বসাইয়া,

$$k(10+18-16)=24$$
,

অথবা,
$$12k = 24$$
; ... $k = 2$.

স্থতরাং, (ক) হইতে, x=4, y=6 এবং z=8.

প্রশালা 96

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$2x+3y-8 = 0$$

 $3x-4y+5 = 0$

2.
$$3x - 5y + 9 = 0$$

 $5x + 2y - 16 = 0$

3.
$$4x - 5y + 8 = 0$$

 $2x - 3y + 6 = 0$

$$\begin{array}{cccc}
 4. & -3x + 2y + 2 & = & 0 \\
 5x - 3y - 5 & = & 0
 \end{array}$$

$$5. \begin{cases} 6x - 7y + 12 = 0 \\ -7x + 4y + 11 = 0 \end{cases}$$

6.
$$7x - 8y = -14$$

 $5x - 3y = 9$

$$\begin{array}{ccc}
7. -6x + 5y + 2 &= 0 \\
13x - 9y &= 19
\end{array}$$

$$8. -7x + 5y + 11 = 0
8x - 5y = 19$$

9.
$$4x - 11y + 6 = 0$$

 $9x - 13y = 10$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{11.} - 12x + 17y + 16 & = & 0 \\
9x - 13y & = & 11
\end{array}$$

13.
$$17x - 7y = 52$$

 $3x = 2y$

15.
$$15x + 7y$$
 = 246
9x = 4y

17.
$$4x - 3y = 0$$

 $7x - 11y + 92 = 0$

19.
$$13x - 12y + 15 = 0$$

 $8x - 7y = 0$

21.
$$\frac{1}{5}(x+y) + \frac{1}{4}(x-y) = 59$$

 $5x - 33y = 0$

23.
$$y(3+x) = x(7+y)$$

 $4x+9 = 5y-14$

25.
$$(x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112$$

 $2x+10 \cdot = 3y+1$

• 26.
$$^{\bullet}4x - 5y + 2z = 0$$

 $2x - 7y + 4z = 0$
 $x + y + z = 6$

28.
$$2x - 7y + 11z = 0$$

 $6x - 8y + 7z = 0$
 $3x + 4y + 5z = 35$

30.
$$x-2y+z = 0$$

 $9x-8y+3z = 0$
 $2x + 3y + 5z = 36$

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

32.
$$4(x+y)$$
 = $3(2z-y)$
 $5(x-2y)$ = $3(2y-3z)$
 $6(x-2)+7(y-3)+8(z-4)=67$

10.
$$8x - 7y$$
 19\\ $10x - 9y$ 23\}

12.
$$14x - 11y + 18$$
 0\\ $11x - 7y + 1$ 0\

14.
$$9x + 5y$$
 124 $- 3y$

16.
$$9x = 8y$$

 $19x + 23y - 287 = 0$

18.
$$4x - 7y = 0$$

 $10x - 9y - 102 = 0$

20.
$$11x - 10y + 82 = 0$$

 $14x - 9y = .0$

22.
$$4x + 5y = x - y$$
 40 $2x - y + 2y = 20$

24.
$$\frac{4y-6}{x+y} = \frac{8x-5}{y-x} = \frac{6x-5}{y-x}$$

27.
$$5x + 6y + 8z = 0$$

 $3x + 4y + 6z = 0$
 $x + 5y + 16z = 3$

$$2x + 3y - 8z = 5x - 7y + 8z = 0$$
$$3x + 5y + 7z = 64$$

31.
$$2(4x+9y) = 7(2y+z)$$

 $7(x+2y) = 8(y+z)$
 $3x+4y+5z=38$

33.
$$5x = 2y$$
, $7y = 5z$ $4x + 5y + 6z = 150$

34.
$$15x = 10y = 6z$$

 $7x + 8y + 9z = 332$

35.
$$4x - 13y + 8z = 0$$

 $7x + 6y - 9z = 0$
 $\frac{5}{x} + \frac{8}{y} + \frac{15}{z} = 6\frac{2}{8}$

নিম্নলিখিভরূপ স্থ-সমীকরণের সমাধানঃ

182.
$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$
, $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$, $a_3x+b_3y+c_3z=d_3$

প্রথম সমীকরণটিকে c_2 দারা ্এবং দিতীয়টিকে c_1 দারা গুণ করিয়া, প্রথম গুণফলটি হইতে দিতীয় গুণফলটিকে বিয়োগ করিলে.

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = d_1c_2 - d_2c_1. (1)$$

তজ্ঞপ, প্রথম সমীকরণটিকে c_3 দারা এবং তৃতীয়টিকে c_1 দারা গুণ করিয়া, প্রথম গুণফল ইইতে তৃতীয় গুণফলটিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y = d_1c_3 - d_3c_1.$$
 (2)

এখন, (1) এবং (2) হইতে, বজ্ঞগণন-প্রণালী অন্তসারে x এবং y এর মান নির্ণয় করা যাইতে পারে। তৎপরে, প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের যে কোনটিতে x এবং y এর এতপ্লব্ধ মান বসাইয়া z এর মান নির্ণয় করা যায়।

বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method) :

প্রথম সমীকরণটিকে d_2 দারা এবং দ্বিতীয়টিকে d_1 দারা গুণ করিয়া, প্রথমটি হইতে দ্বিতীয়টিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1d_2 - a_2d_1)x + (b_1d_2 - b_2d_1)y + (c_1d_2 - c_2d_1)z = 0. (\Phi)$$

তজ্ঞপ, প্রথম সমীকরণটিকে d_3 দারা এবং তৃতীয়টিকে d_1 দারা গুণ করিয়া, প্রথমটি হইতে তৃতীয়টিকে বিয়োগ করিলে,

$$(a_1d_3 - a_3d_1)x + (b_1d_3 - b_3d_1)y + (c_1d_3 - c_3d_1)z = 0. (3)$$

এখন, স্পষ্টতঃ, (ক) ও (খ) দ্বারা স্থচিত সমীকরণদ্বয় এবং প্রদত্ত সমীকরণত্রয়ের যে কোনটিকে, সহ-সমীকরণরূপে ধরিয়া লইশা, পূর্ব্বনিয়মে বর্ণিত পদ্ধতি অমুসারে উহাদের সমাধান করা যাইতে পারে।

(4)

উদা. 1. সমাধান কর:
$$4x - 3y + 2z = 40$$
 ... (1)
 $5x + 9y - 7z = 47$... (2)
 $9x + 8y - 3z = 97$... (3)

(1) কে 7 দারা এবং (2) কে 2 দারা গুণ করিয়া.

এবং
$$28x - 21y + 14z = 280$$

 $19x + 18y - 14z = 94$

অতএব, যোগ করিয়া, 38x - 3y = 374.

আবার, (1) কে 3 দারা এবং (3) কে 2 দারা গুণ করিয়া,

অতএব, যোগ করিয়া,
$$30x + 7y = 314$$
. \cdots (5)

এখন, (4) এবং (5) হইতে স্পষ্টতঃ,
$$39x - 3y - 374 = 0$$
। এবং $30x + 7y - 314 = 0$

অতএব, বজ্রগুণন প্রণালী অনুসারে,

$$\frac{x}{3 \times 314 - 7.(-374)} = (-374).30 - (-314).38 = \frac{1}{38 \times 7 - 30.(-3)};$$

অথবা,
$$y = 1$$

 $942 + 2618 = -11220 + 11932 = 266 + 90$

অথবা,
$$\frac{x}{3560} = \frac{y}{712} = \frac{1}{356}$$

অতএব,
$$x=10$$
 এবং $y=2$.

x এবং y এর এই লব্ধ মান (1) এ বসাইয়া,

• •
$$40-6+2z=40$$
; $z=3$

অতএব, x = 10, y = 2 এবং z = 3.

উদা. 2. সমাধান করঃ
$$2x - 4y + 9z = 28$$
 \cdots (1) $7x + 3y - 5z = 3$ \cdots (2) $9x + 10y - 11z = 4$ \cdots (3)

•
$$9x + 10y - 11z - 4$$

(1) কে 3 দারা, এবং (2) কে 4 দারা গুণ করিয়া,

$$6x - 12y + 27z = 84$$
 এবং $28x + 12y - 20z = 12$ স্থতরাং, যোগ করিয়া, $34x + 7z = 96$. (4)

সহজ বীজগণিত

আবার, (2) কে 10 দারা, এবং (3) কে 3 দারা গুণ করিয়া,

9 বিং
$$27x + 30y - 50z = 30$$

এবং $27x + 30y - 33z = 12$

ম্বতরাং, বিয়োগ করিয়া,
$$43x - 17z = 18$$
. ... (5)

এখন, (4) এবং (5) হইতে,

$$34x + 7z - 96 = 0$$

$$43x - 17z - 18 = 0$$

মতএব,
$$7.(-18) - (-17).(-96) = (-96).43 - (-18).34$$

$$=\frac{1}{34.(-17)-43\times7};$$

$$\begin{array}{c} x \\ -126 - 1632 & -4128 + 612 & -578 - 301 \end{array}$$

$$9 = 3 = \frac{x}{-1758} = \frac{z}{-3516} = \frac{1}{-879}$$

$$\therefore x = \frac{-1758}{-879} = 2 \quad \text{ags } z = \frac{-3516}{-879} = 4.$$

x এবং z এর এই মান (2) এ বসাইয়া, 14 + 3y - 20 = 3,

ু অতএব,
$$3y = 9$$
, এবং $\therefore y = 3$.
সূত্রাং, $x = 2$, $y = 3$ এবং $z = 4$.

ভৈদা. 3. সমাধান কর:
$$12x + 9y - 7z = 2$$
 $8x - 26y + 9z = 1$... $23x + 21y - 15z = 4$...

$$8x - 26y + 9z = 1 \qquad \cdots \tag{2}$$

(1)

$$23x + 21y - 15z = 4 \qquad \cdots \tag{3}$$

(2) কে 2 দারা গুণ করিয়া, 16x - 52y + 18z = 2,

আবার,
$$12x + 9y - 7z = 2$$
. ... (1)

ম্বতরাং, বিয়োগ করিয়া,
$$4x - 61y + 25z = 0$$
. (4)

আবার, (1) কে 2 দারা গুণ করিয়া,

$$24x + 18y - 14z = 4$$
,

এবং
$$23x + 21y - 15z = 4$$
. ... (3)

মুত্রাং, বিয়োগ করিয়া,
$$x-3y+z=0$$
. (5)

এখন, থেছেড়
$$4x - 61y + 25z = 0$$
, \cdots (4)
 $x - 3y + z = 0$. \cdots (5)

অতএব, বজ্রগুণন প্রণালী অমুসারে,

$$\frac{x}{-61+75} = \frac{y}{25-4} = \frac{z}{-12+61},$$

জথবা,
$$\frac{x}{14} = \frac{y}{21} = \frac{z}{49}$$
; জগাৎ, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{7}$.

ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটিকে k এর সমান ধরিয়া,

$$x = 2k$$
, $y = 3k$, $z = 7k$.

মতরাং, (1) হইতে,
$$k(24 + 27 - 49) = 2$$
,

অথবা,
$$2k=2$$
; ... $k=1$.

অত্এব,
$$x=2$$
, $y=3$ এবং $z=7$.

প্রশালা 97

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$2x - 3y + 5z = 11$$

 $5x + 2y - 7z = -12$
 $-4x + 3y + \cdot z = 5$

5.
$$2x + 3y + 4z = 16$$

 $3x + 2y - 5z = 8$
 $5x - 6y + 3z = 6$

7.
$$8x - 7y - 5z = 1$$

 $-7x + 5y + 6z = -1$
 $12x - 8y - 11z = 2$

9.
$$2x + 4y + 5z = 49$$

 $3x + 5y + 6z = 64$
 $4x + 3y + 4z = 55$

2.
$$3x + 2y + 5z = 32$$

 $2x + 5y + 3z = 31$
 $5x + 3y + 2z = 27$

4.
$$2x + 3y + 4z = 29$$

 $3x + 2y + 5z = 32$
 $4x + 3y + 2z = 25$

6.4
$$4x - 3y + 2z = 8$$

 $3x - 4y + 5z = 6$
 $-6x + 5y + 7z = -1$

8.
$$x + 5y - 4z = 5$$

 $3x - 2y + 2z = 14$
 $-10x + 8y + z = 6$
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1867.]

10.
$$x + 3y + 5z = 10$$

 $3x + 5y + 7z = 14$
 $5x + 7y + 8z = 15$

11.
$$12x + 8y - 11z = -3$$

 $11x - 13y - z = 2$
 $8x + 17y - 12z = -2$

13.
$$x-y-z=-15$$

 $y+x+2z=40$
 $4z-5x-6y=-150$
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

15.
$$3x + 2y - \sqrt{z} = 20$$

 $2x + 3y + 6z = 70$
 $x - y + 6z = 41$

17.
$$5x + 2y + z = 30$$

 $\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{10}z = 4$
 $2x + 5y + 10z = 129$

19.
$$\frac{1}{x} + \frac{5}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12}$$
$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24}$$
$$-\frac{4}{x} + \frac{5}{y} + \frac{6}{z} = \frac{1}{2}$$

21.
$$5x + 3y = 65$$

 $2y - z = 11$
 $3x + 4z = 57$

23.
$$ay + bx = c$$

$$cx + az = b$$

$$bz + cy = a$$

25.
$$3y + x - 2 = 0$$

 $3z - 4y = x + 15$
 $2x + 7z = 7$ [কলিঃ প্রবেশিকা, 1883.]

$$2x+7z = 7$$
)
183., বিবিধ উদাহরণমালাঃ

ভদ্দে 1. সমাধান কর:
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$$
, $\frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$, $\frac{c}{z} + \frac{a}{x} = 1$.

12.
$$5x - 4y + 9z = 19$$

 $7x + 6y - 12z = 16$
 $-9x + 8y + 15z = -13$

14.
$$2(x-y) = 3z - 2$$

 $x - 3z = 3y - 1$
 $2x + 3z = 4(1 - y)$

16.
$$4(y-x) = 5z - 22$$

 $3z + 4x = 6y + 2$
 $z - 3y = 14 - 10x$

18.
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 12 - \frac{1}{6}z$$
 $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}x = 8$
 $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z = 10$
[কলিঃ প্রবেশিকা, 1868.]

24.
$$3x + 4y - 11 = 0$$

 $5y - 6z = -8$
 $7z - 8x - 13 = 0$
[কলিঃ প্রবেশিক!, 1877.]

প্রদত্ত সমীকরণগুলি যোগ করিয়া,

্
$$2\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) = 3,$$
 অথবা, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{3}{2}$ (ক)

(ক) হইতে দিতীয় সমীকরণটি বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{2} \; ; \qquad \therefore \quad x = 2a. \quad \bullet$$

এইরপে, y=2b এবং z=2c.

উদা. 2. সমাধান কর:

• (i)
$$\frac{xy}{x+y} = 1$$
; (ii) $\frac{xz}{x+z} = 2$; (iii) $\frac{yz}{y+z} = 3$.

এখন, (i) হইতে,
$$\frac{x+y}{xy} = 1$$
, অথবা, $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$; ... (1)

(ii)
$$x + z = \frac{1}{2}$$
, $y = \sqrt{1}$, $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$; ... (2)

(iii), "
$$\frac{y+z}{uz} = \frac{1}{3}$$
, "\text{Notation}, $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ (3)

(1), (2) এবং (3) একত্র যোগ করিয়া,

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6};$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{11}{12}.$$
... (4)

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{x} = \frac{11}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12}; \qquad \therefore \quad x = \frac{12}{7}.$$

(4) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{1}{y} = \frac{11}{12} - \frac{1}{2} = \frac{5}{12}; \qquad \therefore \quad y = \frac{12}{8}.$$

(4) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া

$$\frac{1}{z} = \frac{11}{12} - 1 = -\frac{1}{12}$$
; $z = -12$.

উদা. 3. সমাধান করঃ
$$xyz = a(yz - zx - xy) = b(zx - xy - yz)$$

= $c(xy - yz - zx)$.

্উভয় পক্ষকেই $a \times xyz$ দারা ভাগ করিয়া]

(1)

এইরর্গে,
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$$
, ... (2)

$$\operatorname{QR} \qquad \frac{1}{c} = \frac{1}{z} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \tag{3}$$

(2) এবং (3) একত্র যোগ করিয়া,

$$-\frac{2}{x} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} \qquad \qquad x = \frac{-2bc}{b+c}.$$

$$-\frac{2}{y} = \frac{1}{c^c} + \frac{1}{a} = \frac{a+c}{ac} \qquad \qquad y = \frac{-2ca}{c+a},$$

এবং
$$-\frac{2}{z} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$
 $z = \frac{-2ab}{a+b}$.

l. 4. সমাধান কর:
$$x+y+z=0$$

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=0$$

$$bcx+cay+abz=1$$

বৈহৈছ,
$$(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$$
্র এবং $x+y+z=0$

অতএব, বজ্রগুণন প্রণালী সমিমুসারে,

ত্তি (c+a) - (a+b) = (a+b) - (b+c) = (b+c) - (c+a),

অথবা,
$$\frac{x}{c-b} = \frac{y}{a-c} = \frac{z}{b-a}$$
.

ভগ্নাংশগুলির প্রত্যেকটিকে k এর সমান ধরিয়া.

$$x = k(c - b), y = k(a - c), z = k(b - a).$$

x, y,এবং z এর উপরোক্ত মানগুলি তৃতীয় সমীকরণটিতে বসাইয়া,

$$k\{bc(c-b) + ca(a-c) + ab(b-a)\} = 1.$$

িকন্ত,
$$bc(c-b) + ca(a-c) + ab(b-a)$$

$$= bc(c-b) + a^2(c-b) - a(c^2 - b^2)$$

$$= (c-b)\{bc + a^2 - a(c+b)\}$$

$$= (c-b)(a-c)(a-b).$$

অতথ্য,
$$k(c-b)(a-c)(a-b)=1$$
; $k=\frac{1}{(c-b)(a-c)(a-b)}$

মূত্রাং,
$$x=k(c-b)=\frac{1}{(a-c)(a-b)}\;;$$

$$y=k(a-c)=\frac{1}{(c-b)(a-b)}\;;$$

$$z=k(b-a)=\frac{1}{(c-b)(c-a)}.$$

প্রগ্রমালা 98

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান করঃ

1.
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$, $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

2.
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$$
, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$

3.
$$\frac{yz}{y+z} = a$$
, $\frac{zx}{z+x} = b$, $\frac{xy}{x+y} = c$. 4. $\frac{axy}{bxy} = c(bx+ay)$

$$3xy = 4(x+y), \quad 2xz = 3(x+z), \quad 5yz = 12(y+z).$$

(a)
$$y + z = 4$$
; $z + x = 6$, $x + y = 8$.
(b) $y + z - x = 6$, $z + x - y = 10$, $x + y - z = 14$.

8.
$$x-4y+z=-10$$

 $y-4z+x=-15$
 $z-4x^9+y=-35$

9. $y+z-7x+16=0$
 $z+x-7y+24=0$
 $x+y-7z+40=0$

10.
$$a^2x + b^2y = 2ab(a+b)$$

 $b(2a+b)x + a(a+2b)y = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

11.
$$x + y + z = A$$

 $ax + by + cz = 0$
 $a^2x + b^2y + c^2z = 0$
12. $x + y + z = 0$
 $(a + b)x + (a + c)y + (b + c)z = 0$
 $abx + acy + bcz = 1$

13.
$$x + y + z = 0$$

 $x - by + b^2z = b^3$
 $x - by + b^2z = b^3$
 $x - cy + c^2z = c^3$

15.
$$ax + by + cz = 0$$

 $(b+c)x + (c+a)y + (a+b)z = 0$
 $a^2x + b^2y + c^2z = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

16. কোন্ সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, নিম্মলিখিত সমীকরণ তিনটি, $x \otimes y$ এর একই মান্দ্রীরা, সিদ্ধ হইবে ?

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, $a_3x + b_3y + c_3 = 0$.

17. নিম্নলিখিত সমীকরণ ঢারিটি x,y ও z এর একই মান দারা সিদ্ধ হইলে, a এর মান কত হইবে ?

$$2x - 3y + 5z = 18$$
, $3x - y + 4z = 20$, $4x + 2y - z = 5$, $(a + 1)x + (a + 2)y + (a + 3)z = 76$.

18.
$$3w - 2y = 2$$

 $5x - 7z = 11$
 $2x + 3y = 39$
 $4y + 3z = 41$
19. $9x - 2z + w = 41$
 $7y - 5z - t = 12$
 $4y - 3x + 2w = 5$
 $3y - 4w + 3t = 7$
 $7z - 5w = 11$

20.
$$x + y + z$$
 = $ab + bc + ca$

$$\frac{x}{ab} + \frac{y}{bc} + \frac{z}{ca}$$
 = 3

$$(c - b)x + (a - b)y + (c - a)z = 2abc - ab^2 - b^2c - ac^2 - a^2c.$$

II. একাধিক অজ্ঞান্তরাশিবিশিষ্ট সহ-সমীকরণোৎপাদক প্রশ্নাবলী ঃ (Problems producing Simultaneous Equations involving more than one unknown quantity)

184. অষ্টাদশ অধ্যায়ে আলোচিত প্রশ্লাবলী অপেক্ষা জটিলতর প্রশ্লাবলী সম্পর্কে এক্ষণে আলোচনা করা হইবে।

শ্রমলিখিত উদাহরণগুলিকে দৃষ্টাস্তরূপে সন্নিবেশিত করা হইল।

উদা. 1. একটি পাত্র 'P' তে 12 গ্যালন মদ ও 18 গ্যালন জল, এবং অপর একটি পাত্র 'Q' তে 9 গ্যালন মদ ও 3 গ্যালন জল আছে। প্রত্যেকটি পাত্র হইতে কত পরিমাণ লইয়া মিশ্রিত করিলে, মিশ্রণে 7 গ্যালন মদ ও 7 গ্যালন জল থাকিবে ?

P পাত্রস্থিত মিশ্রেণে, মোট 30 গ্যালনের মধ্যে 12 গ্যালন মদ আছে ; অতএব, এই মিশ্রেণের $\frac{1}{8}$ 8, অর্থাৎ, $\frac{2}{8}$ ভাগ মদ, এবং \therefore $\frac{2}{8}$ ভাগ জল আছে ।

স্থতরাং, P হইতে গৃহীত প্রতি গ্রালনের মধ্যে, ξ ভাগ মদ ও ξ ভাগ জল থাকিবে।

এইরূপে, Q হইতে গৃহীত প্রতি গ্যালনের মধ্যে, $\frac{3}{4}$ ভাগ মদ ও $\frac{1}{4}$ ভাগ জল

ধর, P হইতে গৃহীত গ্যালনের সংখ্যা=x, এবং Q হইতে গৃহীত গ্যালনের সংখ্যা=u.

তাহা হইলে, যেহেতু, P হইতে গৃহীত x গ্যালনের মধ্যে $\frac{2}{6}x$ গ্যালন মদ ও $\frac{2}{6}x$ গ্যালন জল, এবং Q হৈতে গৃহীত y গ্যালনের মধ্যে $\frac{2}{4}y$ গ্যালন মদ ও $\frac{1}{4}y$ গ্যালন জল থাকিবে,

অতএব, নৃতন মিশ্রণে, $(\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y)$ গ্যালন মদ এবং $(\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}y)$ গ্যালন জল থাকিবে।

স্থতরাং, প্রদত্ত সর্তামুসারে,

্ৰ
$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 7$$
; ... (1)
এবং $\frac{3}{5}x + \frac{1}{4}y = 7$ (2)

(2) কে 3 দ্বারা গুণ করিয়া, গুণনলব্ধ সমীকরণ হইতে (1) কে বিয়োগ করিয়া, $\frac{7}{6}x = 14$; $\therefore x = 10$.

অতএব, (2) হইতে, $y = 4(7 - \frac{3}{5} \times 10) = 4$.

স্থাতরাং, P হুইতে 10 গ্যালন এবং Q হুইতে 4 গ্যালন লইতে হুইবে।

উদ্ধা. 2. 120 গজ যাইতে একথানা গাড়ীর সন্মুখের চাকা, উহার পিছনের চাকা হইতে 6 বার বেশী ঘোরে; সন্মুখের চাকার পরিধিকে, বর্ত্তমান পরিধির ½ অংশ পরিমিত বর্দ্ধিত করিলে এবং পিছনের চাকার পরিধিকে, উহার বর্ত্তমান পরিধির ½ অংশ প্রিমিত বর্দ্ধিত করিলে, সন্মুখের চাকা পিছনের চাকা হইতে মাত্র 4 বার বেশী খুরিবে। প্রত্যেক চাকার পরিধি নির্ণয় কর।

ধর, সমুখের চাকার পরিধি x গজ এবং পিছনের চাকার পরিধি y গজ। তাহা হইলে, চাকাগুলি 120 গজ যাইতে, যথাক্রমে $\frac{120}{x}$ এবং $\frac{120}{y}$ বার ঘুরিবে।

সমুখের এবং পিছনের চাকার পরিধিদ্বয়কে, যথাক্রমে $\frac{1}{4}$ অংশ এবং $\frac{1}{5}$ অংশ বর্দ্ধিত করিলে, উহাদের নৃতন পরিধিদ্বয় যথাক্রমে, $\left(x+\frac{x}{4}\right)$ এবং $\left(y+\frac{y}{5}\right)$ গজ, অর্থাৎ, $\frac{5x}{4}$ ও $\frac{6y}{5}$ গজ হইবে। অতএব, 120 গজ যাইতে চাকাগুলি, যথাক্রমে, $120\div\frac{5x}{4}$ বার, অর্থাৎ, $\frac{96}{x}$ বার এবং $120\div\frac{6y}{5}$ বার, অর্থাৎ, $\frac{100}{y}$ বার ঘুরিবে।

স্বতরাং, প্রদত্ত সর্তামুসারে,

$$\frac{120}{x} = \frac{120}{y} + 6$$
; ...
এবং $\frac{96}{x} - \frac{100}{y} + 4$.

(1) কে 5 দারা, এবং (2) কে 6 দারা গুণ করিয়া

$$\frac{600}{x} = \frac{600}{y} + 30 ;$$

$$\frac{576}{x} = \frac{600}{y} + 24 ;$$

বিয়োগ করিয়া, $\frac{24}{x} = 6$;

x=4.

অতএব, (1) হইতে,
$$\frac{120}{y} = \frac{120}{4} - 6 = 24$$
;

y = 5.

স্থতরাং, সম্মুথের ও পিছনের চাকার পরিধি যথাক্রমে, 4 এবং 5 গজ।

উদা. 3. এক পাউগু চা এবং তিন পাউগু চিনির মূল্য মোট 6 শিলিং; কিন্তু চিনি ও চায়ের মূল্য যথাক্রমে শতকরা 50 শি. ও 10 শি. হিসাবে বাড়িলে, উহাদের মূল্য মোট 7 শিলিং হইবে। চ্যু'এবং চিনির প্রত্যেকের মূল্য নির্ণয় ক্র।

চায়ের মূল্য শতকরা 10 শিলিং হিসাবে বাড়িলে, এক পাউগু চায়ের মূল্য $=\left(x+\frac{x}{10}\right)$, অর্থাৎ, $\frac{11}{10}x$ শিলিং ; এবং চিনির মূল্য শতকরা 50 শিলিং হিসাবে বাড়িলে, এক পাউগু চিনির মূল্য $=\left(y+\frac{y}{2}\right)$, অর্থাৎ, $\frac{3y}{2}$ শিলিং ।

অতএব,
$$\frac{11}{10}x + 3.\frac{3y}{2} = 7.$$
 (2)

(2) হইতে,
$$\frac{1}{8}x + 9y = 14$$
; (3)

এবং (1) হইতে,
$$3x + 9y = 18$$
; (4)

. . (4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া, $(3 - \frac{1}{5})x = 4$;

অথবা,
$$\frac{4x}{5}=4$$
; $x=5$.

অতএব, (1) হইতে, $y = \frac{6-5}{3} = \frac{1}{3}$.

স্তরাং, এক পাউগু চায়ের মূল্য 5 শিলিং এবং এক পাঁউগু চিনির মূল্য 🖟 শি., - স্বর্থাং 4 পেন্স ।

উদা. 4. কতক পরিমাণ অর্থ কয়েকজন লোকের মধ্যে ভাগ করিয়া দিতে হইবে; তিনজন লোক কম হইলে, প্রত্যেকে 150 পাউগু করিয়া বেশী পাইক্রে; কিন্তু 6 জন লোক বেশী হইলে, প্রত্যেকে 120 পাউগু করিয়া কম পাইত। অর্থের পরিমাণ এবং লোকসংখ্যা নির্ণয় কর।

ধর, x পাউগু পরিমিত স্বর্থ, y সংখ্যক লোকের মধ্যে ভাগ করিতে হইবে।

অতএব, প্রত্যেক লোক $\frac{x}{y}$ পাউণ্ড্ পাইবে; তিনজন লোক কম হইলে, প্রত্যেকে $\frac{x}{y-3}$ পাউণ্ড্করিয়া পাইত ; এবং 6 জন বেশী হইলে, প্রত্যেকে $\frac{x}{y+6}$ পাউণ্ড্করিয়া পাইত

স্থতরাং, প্রদত্ত সর্ত্তামুসারে,
$$\frac{x}{y-3} = \frac{x}{y} + 150$$
, ... (1)

এবং,
$$\frac{x}{y+6} = \frac{x}{y} - 120.$$
 ... (2)

(1) হইতে, • .
$$150 = x \left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y} \right) = \frac{3x}{y^2 - 3y}$$
; $x = 50(y^2 - 3y)$.

(2) হৈছে,
$$120 = x \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+6}\right) = \frac{6x}{y^2 + 6y}$$
; $\therefore x = 20(y^2 + 6y)$.
20 $\Rightarrow x = 20(y^2 + 6y)$, $\Rightarrow x = 20(y^2 + 6y$

যেহেতু,
$$y$$
 এর মান 0 হইতে পারে না, . . . $y=9$.

 $\therefore x = 20(81 + 54) = 20 \times 135 = 2700.$

অতএব, নির্ণের লোকসংখ্যা = 9, এবং অর্থের পরিমাণ = £2700.

উদা. 5. কোন পথিক 40 মাইল ভ্রমণ করিবার পর তাহার গতিবেগ ঘণ্টায় 2 মাইল হিসাবে, বাড়াইল। কিন্তু প্রথম হইতেই এই বর্দ্ধিত বেগে ভ্রমণ করিতে পারিলে, সে 40 মিনিট পূর্ব্বে তাহার গন্তব্যস্থানে পৌছিতে পারিত; আবার পূর্ব্বের বেগে সমস্ত পথ চলিলে, সে 20 মিনিট পরে আসিয়া পৌছিত। সে কত পথ ভ্রমণ করিয়াছিল ?

ধর, ঐ পথিক ঘণ্টায় y মাইল বেগে প্রথম 40 মাইল পথ, এবং সর্ববশুদ্ধ x মাইল পথ ভ্রমণ করিয়াছিল।

স্থতরাং, ভ্রমণ শেষ করিবার প্রকৃত সময় = $\left(\frac{40}{y} + \frac{x-40}{y+2}\right)$ ঘন্টা $=\frac{80+xy}{y(y+2)}$ ঘন্টা।

কিন্তু, বর্দ্ধিত বেগে সমস্ত পথ চলিলে, সে $\frac{x}{y+2}$ ঘণ্টায় ভ্রমণ শেষ করিতে পাবিত ; এবং পূর্বের বেগে চলিলে, $\frac{x}{y}$ ঘণ্টায় সে ভ্রমণ শেষ করিত।

অতএব, প্রদত্ত সর্ত্তানুসারে,

$$\frac{x}{y+2} = \frac{80+xy}{y(y+2)} - \frac{2}{3} \tag{1}$$

এবং
$$\frac{x}{y} = \frac{80 + xy}{y(y+2)} + \frac{1}{3}$$
 (2)

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,
$$x\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}\right) = 1$$
;

অথবা,
$$2x = y(y+2)$$
. ... (3)

আবার, (2) হইতে, 3x(y+2) = 3(80+xy) + y(y+2);

অথবা,
$$6x - 240 = y(y+2)$$
. ... (4)

অতএব, (3) এবং (4) হইতে, 6x - 240 = 2x;

অথবা,
$$x=240$$
; $x=60$.

স্থতরাং, ঐ ব্যক্তি 60 মাইল পথ ভ্রমণ করিয়াছিল।

উলা. 6. A হইতে B পর্যান্ত যাইতে ঘোড়ার গাড়ীতে যে সময় লাগে, কোনরূপ ত্র্ঘটনা না ঘটিলে, রেলগাড়ীতে তাহার ঠিক অর্দ্ধসময় আবশুক হয়। রেলগাড়ীতে আকস্মিক ত্র্ঘটনার জন্ম পথিমধ্যে 3 ঘণ্টা বিলম্ব ইইলেও যে সময়ে সমস্ত পথ ভ্রমণ করা যাইতে পারে, ঘোড়ার গাড়ীতে ঐ সময়ে সমস্ত পথ হইতে 15 মাইল কম পথ গমন করা যায়; কিন্তু সম্পূর্ণ পথ যদি বর্ত্তমান পথের శ্ব অংশ হইত, তাহা হইলে, রেলগাড়ীর ত্র্ঘটনার জন্ম পূর্বাম্বরূপ 3 ঘণ্টা বিল্ম ধর্রিয়া লইলে, সম্পূর্ণ পথ গমন করিতে, ঘোড়ার গাড়ীর ও রেলগাড়ীর ঠিক একই সময় দরকার হইত। A হইতে B এর দূর্ম্ব নির্ণয় কর।

ধর, A হইতে B এর দূরত্ব =x মাইল ; এবং ঘোড়ার গাড়ী ঘন্টায় y মাইল বেগে গমন করে। তাহা হইলে, স্পষ্টতঃ, রেলগাড়ীর গতি ঘন্টায় 2y মাইল।

এখন, (রেলগাড়ীতে A হইতে B তে যাওয়ার সময়) +3 ঘণ্টা = ঘোড়ার গাড়ীতে (x-15) মাইল পথ যাওয়ার সময়।

জতএব,
$$\frac{x}{2y} + 3 = \frac{x - 15}{y}$$
 (1)

এবং
$$\frac{\frac{2}{3}x}{2y} + 3 = \frac{\frac{2}{3}x}{y}$$
, অথবা, $\frac{x}{3y} + 3 = \frac{2x}{3y}$ (2)

(2) হইছে,
$$\frac{x}{3y} = 3$$
, অথবা, $x = 9y$. \cdots (3)

(1) হইতে,
$$x + 6y = 2x - 30$$
 অথবা, $6y = x - 30$. (4) তৈ $6y = 9y - 30$; অথবা, $y = 10$; $x = 9 \times 10 = 90$.

স্কুতরাং, নির্ণেয় দূরু**ত্ব** = 90 মাইল।

উদা. 7. কোন নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল এবং স্রোতের অন্ধকূলে 44 মাইল গমন করিল; এবং 13 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল এবং উহার অন্ধকূলে 55 মাইল পথ অতিক্রম করিল। স্রোতের বেগ ও নৌকার গতি নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1880.]

ি ধর, স্রোতবিহীন জলে, নোকাথানি, ঘণ্টায x মাইল বেগে গমন,করে; এবং স্রোতের বেগ ঘণ্টায় y মাইল।

় তাহা হইলে, এক ঘন্টায় নৌকাথানি স্রোতের অনুকূলে x+y মাইল এবং প্রতিকূলে x-y মাইল গমন করে।

অতএব, স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল যাইতে নৌকাথানির $\frac{30}{x-y}$ ঘণ্টা, এবং অনুকূলে 44 মাইল যাইতে উহার $\frac{44}{x+y}$ ঘণ্টা লাগিবে। অতএব, প্রশ্নপ্রদন্ত প্রথম সর্তান্তসাবে,

$$\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10$$
; ... (1)

তজ্ঞপ, দ্বিতীয় সর্ত্তাহুসারে,
$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13$$
; (2)

(1) কে 4 দারা, এবং (2) কে 3 দারা, গুণ করিয়া,

$$\frac{120}{x-y} + \frac{176}{x+y} = 40 ;$$

এবং
$$\frac{120}{x-y} + \frac{165}{x+y} = 39$$
;

.. বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{11}{x+y} = 1$$
; অথবা, $x+y=11$. (3)

অতএব, (1) হইতে,
$$\frac{30}{x-y} = 10-4=6$$
; $x-y=5$. (4)

(3) ও (4) যোগ করিয়া,
$$2x=16$$
; $x=8$. আবার, (3) ও (4) বিয়োগ করিয়া, $2y=6$; $y=3$.

অতএব, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 3 মাইল, এবং নৌকার ণতি ঘণ্টায় ৪ মাইল হইবে।

উদ্পা. 8. 1040 গল দ্রত্বের সাইকেল-ভ্রমণ প্রতিযোগিতার B 120 গজ পথ অতিক্রম করিবার পর A রওনা হইল এবং B অপেক্ষা মাত্র B সেকেণ্ড্ পরে নির্দিষ্ট স্থানে পৌছিল; পরবর্ত্তী বারে, A, B এর পাঁচ সেকেণ্ড্ পরে রওনা হইয়া, B কে 120 ফুট দ্রত্বে হারাইল। প্রত্যেকে কত সময়ে নির্দিষ্ট দ্রত্ব অতিক্রম করিয়াছিল?

মনে কর, নির্দিষ্ট দূরত্ব থাইতে A এর x সেকেণ্ড্ এবং B এর y সেকেণ্ড্ সময় লাগিয়াছিল । তাহা হইলে, এক গজ থাইতে, A এর $\frac{x}{1040}$ সেকেণ্ড্ এবং B এর $\frac{y}{1040}$ সেকেণ্ড্ লাগিয়াছিল ।

ধর, উপরিপ্রদর্শিত চিত্রে, PQ নির্দিষ্ট দূরত্ব, এবং PR ও SQ বথাক্রমে $\;120\;$ গজ ও $120\;$ ফুট (অর্থাৎ $40\;$ গজ) দূরত্ব স্থচিত করিতেছে।

প্রতিযোগিতার প্রথম বারে, B, R পর্যান্ত পৌছিলে পর, A, P হইতে রওনা হইয়া B অপেক্ষা B সেকেণ্ড্র পরে B তে পৌছিল। অতএব, B এর B তু দূরত্ব অতিক্রম করিতে (x - 5) সেকেণ্ড্র সময় লাগিল।

হতবাং,
$$x-5=(1040-120)\times \frac{y}{1040}=(1-\frac{3}{26})y=\frac{23}{26}y.$$
 (1)

দ্বিতীয় বারে, A, B এর 5 সেকেণ্ড্ পরে রওনা হইয়া, যথন Q তে পৌছিল, তথন B, P হইতে রওনা হইয়া মাত্র S পর্যান্ত গারিল। অতএব, PS দূরত্ব অতিক্রম করিতে B এর মোট (x+5) সেকেণ্ড্ সময় লাগিল।

স্থতরাং,
$$x+5=(1040-40)\times \frac{y}{1040}=(1-\frac{1}{26})y=\frac{26}{26}y$$
. ... (2)

(2) হইতে (1) বিয়োগ কৰিয়া, $\frac{2}{26}y = 10$; ... y = 130.

অতএব, (1) হঁইতে, $x=5+\frac{23}{26}\times 130=5+145=120.$

কাজেই, A ও B এর, নির্দিষ্ট দূরত্ব অতিক্রম করিবার সময় যথাক্রমে 120 সেকেণ্ড্ ও 130 সেকৈণ্ড্ ।

স্থতরাং, A, 2 মিনিটে এবং B, 2 মিনিটি 10 সেকেণ্ডে উক্ত দূরত্ব অতিব্রুম্ম করিয়াছিব।

উদা. 9. কোন সংখ্যার অঙ্কসমূহের সমষ্টি 9 দারা বিভাজ্য হইলে, অঙ্কটিও 9 দারা বিভাজ্য হইবে। • [B. C. S., 1923.]

সংখ্যাটি এক অঙ্কবিশিষ্ট হইলে, উহা স্পষ্টতঃই 9; অতএব, উপরোক্ত সিদ্ধান্তটি এক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার বেলায় অক্ষুণ্ণ রহিল।

এখন, ছই অন্ধবিশিষ্ট একটি সংখ্যা লও; এবং ধর, উহার দশকস্থানীয় অন্ধটি y দারা, এবং এককস্থানীয় অন্ধটি x দারা স্টিত হইতেছে। তাহা হইলে, সংখ্যাটি অবশ্যই =10y+x.

এখন,
$$\frac{10y+x}{9} = y + \frac{y+x}{9}.$$

কাজেই, $\overset{\bullet}{y}+x$ (অর্থাৎ, অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি) 9্দারা বিভাজ্য হইলে, সংখ্যাটি (অর্থাৎ, 10y+x)ও $_{\circ}9$ দারা বিভাজ্য হইবে।

এইরূপভাবে, তুই এর অধিক অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা লইয়া, দেখান যাইতে পারে হয়, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই উপরোক্ত সিদ্ধান্তটি অক্ষম থাকিবে।

প্রগ্রমালা 99

1. তিন অঙ্কবিশিষ্ট এরপ একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাগা, তদন্তর্গত অঙ্কত্রয়ের সমষ্টির 25 গুণ হইবে; এবং যাহার সহিত 198 যোগ করিলে লব্ধ যোগফল, প্রদত্ত সংখ্যার বী—২৬ অঙ্ক তিনটিকে বিপরীতক্রমে লিখিয়া যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহার সমান হইবে; এবং যাহার মধ্যস্থিত অঙ্কটি পার্শ্বস্থিত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি হইতে 1 বেশী হইবে।

- 2. এক দোকানদার, তাহার হিসাব-বহি পরিষ্কারন্ধপে লিখিয়া না রাখার কোন একটি জিনিষের, কত ওজন, বা কত ক্রয়-মূল্য, কিছুই স্মরণ করিতে পারিল না; শুধু, এই মাত্র স্মরণ করিতে পারিল যে, সে জিনিষটি কিনিবার পর মনে করিয়াছিল যে, উহার প্রতি পাউগু 30 শি. দরে বিক্রয় করিলে, তাহার £5 লাভ হইবে, কিন্তু 22 শি. দরে বিক্রয় করিলে, £15 লোকসান হইবে। জিনিষটির ওজন, এবং ক্রয়-মূল্য নির্ণয় কর।
- 3. A এবং B এই হুই ব্যক্তি বাজী ধরিয়া তাস থেলিতে আরম্ভ করিল। কয়েকবার থেলার পর A দেখিতে পাইল যে, সে যত অর্থ লইয়া থেলিতে আরম্ভ করিয়াছিল, তাহার অর্দ্ধ পরিমাণ জিতিয়াছে এবং তাহার যদি আরও 15 শি. থাকিত, তাহা হইলে, তাহার অর্থের পরিমাণ B এর অর্থের তিনগুণ হইত। কিন্তু, B, তারপর 10 শি. জিতিল বলিয়া, B এর অর্থের পরিমাণ তখন A এর অর্থের দিগুণ হইল। প্রত্যেকে কত লইয়া থেলিতে আরম্ভ করিয়াছিল ?
- 4. A এবং B একত্রে কোন একটি কাজ 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। কিন্তু B, 15 দিন ধরিয়া এবং C, 30 দিন ধরিয়া পর পর কাজ করিয়া যাইলেও উহা সম্পূর্ণরূপে সম্পন্ন হইত। আবার, A, B, C যদি একত্রে কাজ করিত, তাহা হইলে উহা শেষ করিতে তাহাদের মাত্র 10 দিন সময় লাগিত। প্রত্যেকে পৃথক্ পৃথক্ ভাবে কতদিনে ঐ কাজটি সম্পন্ন করিতে পারিবে ?
- 5. A এর নিকট যতগুলি শিলিং আছে, তাহার দিগুণসংখ্যক পেনি আছে $^{\circ}$; B এর নিকট A অপেক্ষা 8 পে. বেশী আছে, এবং উহাতে যতগুলি পেনি, তাহার দিগুণসংখ্যক শিলিং আছে ; A ও B এর মোট তহবিলে, 'শিলিং'এর সংখ্যা হইতে পেনির সংখ্যা এক বেশী। প্রত্যেকের নিকট কি পরিমাণ অর্থ আছে, তাহা নির্ণয় কর।
- 6. কোন কাজ, $A \otimes B$ তুইজনে m দিনে শেষ করিতে পারে; উভয়ে একত্রে n দিন কাজ করার পর A কে সরাইয়া দেওয়া হইল, এবং B উক্ত কাজের বাকী জংশ p দিনে সম্পন্ন করিল। প্রত্যেকে পৃথক্ভাবে ঐ কাজ কতদিনে শেষ করিতে পারিবে?
- 7. A, B এবং C তাহাদের পরম্পরের অর্থের তুলনা করিতে গিয়া, \widehat{A} , B কে বলিস, "তুমি আমাকে 700 টাকা দিলে, তোমার নিকট যাহা থাকিবে, আমার তাহার দ্বিগুণ পরিমাণ হইবে ;" আবার, B, C কে বলিল, "তুমি আমাকে 1400 টাকা দিলে, আমার অর্থের পরিমাণ তোমার অবশিষ্ট অর্থের তিনগুণ হইবে ;" এবং C, A কে

বলিল, "তুমি আমাকে 420 টাকা দিলে, আমার অর্থ তোমার অবশিষ্ট অর্থের পাঁচগুণ হইবে।" কাহার কি পরিমাণ অর্থ ছিল ?

- 8. 35 মাইল পথ অতিক্রম করিতে একজন লোক, কতকাংশ পথ ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে এবং অবশিষ্টাংশ ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে গমন করিল। যে পরিমাণ পথ সে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে অতিক্রম করিয়াছে, যদি উহা ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে, এবং বাকী পথ ঘণ্টায় 4 মাইল গতিতে অতিক্রাপ্ত হইত, তাহা হইলে, সে পূর্ব্ব সময়ের মধ্যেই আরও তুই মাইল ঘাইতে পারিত। কত সময় ধরিয়া সে ভ্রমণ করিয়াছিল, তাহা নির্ণয় কর।
- 9. একথানা রেলগাড়ী বরাবর সমান বেগে কতক পরিমাণ পথ অতিক্রম করিল। উহার গতির বেগ ঘণ্টার 6 মাইল করিয়া বেশী হইলে, ঐ পথ 4 ঘণ্টা কম সময়ে অতিক্রান্ত হইতে পারিত এবং গতির বেগ ঘণ্টার 6 মাইল করিয়া কম হইলে, ঐ পথ যাইতে উহার 6 ঘণ্টা সময় বেশী লাগিত। রেলগাড়ীখানি কত পরিমাণ পথ অতিক্রম করিয়াছিল।
- 10. ছইটি পাত্রের প্রত্যেকটিতে জল ও মদ মিশ্রিত আছে; একটিতে যত পরিমাণ জল তাহার তিনগুণ মদ, এবং অপরটিতে যত পরিমাণ মদ, তাহার পাঁচগুণ জল আছে। 7 গালন ধরে এরূপ, একটি পাত্র পূর্ণ করিতে হইলে, উপরোক্ত পাত্র ছইটির কোন্টি হইতে কত পরিমাণ লইতে হইবে, যাহাতে শেষেক্তি পাত্রস্থিত মিশ্রণে সম-পরিমাণ জল ও মদ থাকিতে পারে ?
- 11. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্কত্রেরে সমষ্টি 10; মধ্যস্থিত অঙ্কটি পার্শস্থিত অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির সমান; এবং অঙ্ক তিনটিকে বিপরীতক্রমে লিখিলে যে সংখ্যা •উৎপন্ন হয়, উহা প্রদত্ত সংখ্যা হইতে 99 বেশী। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
- 12. কোন লোকের, অদ্ধ-ক্রাউন, শিলিং এবং 6-পেন্স, এই তিন প্রকারের মোট 20টি মুদ্রায় এক পাউগু (এ1) আছে। সে যদি সমৃদয় 6-পেন্স মুদ্রাগুলিকে পেনিতে, এবং সমৃদয় শিলিং মুদ্রাগুলিকে 6-পেন্স মুদ্রাতে পরিবর্তিত করিত, তাহা হইলে, তাহার মোট 73টি মুদ্রা হইত। তাইার কোন্ প্রকারের কতগুলি মুদ্রা আছে?
- 13. কতক পরিমাণ অর্থ কয়েকজন লোকের ভিতর সমান ভাগ করিয়া দেওয়া ° হইল। কিন্তু লোকসংখ্যা 4 বেশী হইলে প্রত্যেকে এক শিলিং করিয়া কম পাইত, এবং লোকসংখ্যা 5 কম হইলে প্রত্যেকে 2 শিলিং করিয়া বেশী পাইত'। কি পরিমাণ অর্থ কৃতজন লোকের ভিতর ভাগ করা হইল, তাহা নির্ণয় কর।
- 14. কোন চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিবার নিমিত্ত উহার সহিত তিনটি নল সংলগ্ধ আছে; এবং উহাদের হুইটি নল সম্পূর্ণ এক আকারের। তিনটি নলই একসঙ্গে খুলিয়া বাথিলে, 4 ঘণ্টায় চৌবাচ্চার 📆 অংশ পূর্ণ হয় ; সমান নল ছুইটির একটিকে বন্ধ রাখিলে,

- 10 ঘণ্টা 40 মিনিটে চৌবাচ্চার স্ব অংশ পূর্ণ হয়। প্রত্যেকটি নল পৃথক্ভাবে কত সময়ের ভিতর চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করিতে পারিবে ?
- 15. কোন লোক ৪ বুনেল্ বার্লি ও নগদ £2. 16 শি. এর বিনিময়ে 12 বুনেল্ ময়দা দিয়া, আরও কতক পরিমাণ ময়দার বিনিময়ে, হয় সমান পরিমাণ বার্লি ও নগদ £3. 15 শি., নতুবা, নগদ মোট £10, লইবে বলিয়া স্বীকৃত হইল; এক বুনেল্ ময়দা এবং এক বুনেল্ বার্লির মূল্য নির্ণয় কর।
- 16. কোন মহ্মবিক্রেতার তুই প্রকারের মদ ছিল; এক প্রকার, প্রতি কোয়ার্ট 2 শি. দরের এবং অহ্য প্রকার, প্রতি কোয়ার্ট 3 শি. 4 পে. দরের। ইহা হইতে তাহাকে, প্রতি কোয়ার্ট 2 শি. 4 পে. দরের 100 কোয়ার্ট মদ তৈয়ার করিতে হইলে, প্রত্যেক প্রকার মদ হইতে কত পরিমাণ করিয়া লইতে হইবে ?
- 17. কোন জমির থাজানা বাবদ, নির্দিষ্ট পরিমাণ বার্লি এবং নির্দিষ্ট ,পরিমাণ ময়দা, ধার্য্য আছে; যথন ময়দার দর প্রতি কোষার্টারে 55 শি., এবং বার্লির দর প্রতি কোয়ার্টারে 33 শি., তথন থাজানাতে, ময়দার অংশের এবং বার্লির অংশের মূল্য পরস্পর সমান। কিন্তু, ময়দা ও বার্লি, যুথাক্রমে, প্রতি কোয়ার্টার 65 শি. ও 41 শি. দরে বিক্রয় হইলে, থাজানার পরিমাণ এব রার্লির হয়। থাজানাতে ময়দার পরিমাণ ও বার্লির পরিমাণ নির্ণয় কর।
- 18. 60 গজ দীর্ঘ একখানা গতিশীল রেলগাড়ী, 72 গজ দীর্ঘ এবং সমাস্তর পথে একই দিকে গতিশীল অপর একখানা রেলগাড়ীকে, 12 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। অপেক্ষাকৃত ধীরগামী গাড়ীখানির গতি যদি অন্ধ্রণ বন্ধিত করা হইত, তাহা হইলে ক্রতগামী গাড়ীখানি উ্হাকে 24 সেকেণ্ডে আতক্রম করিত। প্রত্যেকখানি গাড়ী কত বেগে যাইতেছিল?
- 19. কোন কৃষক, প্রতি বুর্দেল্ 3 শি. 4 পে. দরের 100 বুপেল্ মিশ্রণ প্রস্তুত করিতে, প্রতি বুসেল্ 2 শি. 4 পে. দরের 28 বুসেল্ বার্লির সহিত, প্রতি বুসেল্ 3 শিলিং দরের কত পরিমাণ 'রাই' এবং প্রতি বুসেল্ 4 শি. দরের কত বুসেল্ ময়দা, মিশ্রিত করিবে ?
- 20. গিনি ও ক্রাউন, এই তুই প্রকার মুদ্রায় কোন ব্যক্তির নিকট £27. 6 শি. ছিল। উহা হইতে £14. 17 শি. এর ঋণ পরিশোধ কারয়া তিনি দেখিতে পাইলেন যে, তিনি যতগুলি ক্রাউন দিয়াছেন, ঠিক ততগুলি গিনি, এবং যতগুলি গিনি দিয়াছেন, ঠিক ততগুলি ক্রাউন, তাঁহার নিকট উদ্বুদ্ধ রহিয়াছে। কোন্ প্রকারের কতগুলি মুদ্রা তাঁহার নিকট ছিন্তে, এবং কতগুলিই বা উদ্বুদ্ধ রহিয়াই।

- 21. কোন লোক নৌকাষোগে স্রোতের অন্তক্লে A হইতে B পর্যান্ত 18 মাইল পথ দেড় ঘণ্টায় যাইয়া, ঐ স্রোতেরই প্রতিকুলে B হইতে A তে সওয়া তুই ঘণ্টায় নদীর কিনারা ধরিয়া ফিরিয়া আসিল। নদীর কিনারার স্রোতের বেগ যদি মধ্যন্থিত স্রোতের বেগের হু অংশ হয়, তবে মধ্যন্থিত স্রোতের বৈগ নির্ণয় কর।
- 22. কোন দৌড়-প্রতিযোগিতায়, প্রথম বাবে B, 44 গজ দৌড়াইবার পর, A দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া B কে 51 সেকেণ্ডে হারাইল ; পরবর্ত্তী বাবে, B, 1 মিনিট 15 সেকেণ্ড ্ দৌড়াইবার পর, A দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া, B এর নিকট 88 গজে হারিল । এক মাইল পথ দৌড়াইতে উহাদের প্রত্যেকের কত সময় করিয়া লাগিবে ?
- 28." তুই মাইল দৌড়-প্রতিযোগিতায়, প্রথম বারে B, A কে তুই মিনিটে হারাইল ; দ্বিতীয় বারে, A এর গতি ঘণ্টায় তুই মাইল বেগে বাড়াইবার, এবং B এর গতি ঘণ্টায় তুই মাইল হিসাবে কমাইবার ফলে, A, B কে তুই মিনিটে হারাইল । A ও B এর প্রথম বারে দৌড়াইবার বেগ নির্ণয় কর ।
- 24. লগুন হইন্ডে কেম্ব্রিজে যাইতে, পথিমধ্যে কোন ত্র্ঘটনার জন্ম একথানা রেল-গাড়ী উহার গতি-বেগ পূর্ব্ব বেগের $\frac{1}{n}$ অংশে পরিণত ক্লরিয়া, α ঘণ্টা বিলম্বে কেম্ব্রিজে পৌছিল। ত্র্ঘটনার স্থান যদি কেম্ব্রিজ হইতে b মাইল নিকটতর হইত, তাহা হইলে গাড়ীথানি কেম্ব্রিজে c ঘণ্টা বিলম্বে পৌছিত। ত্র্ঘটনার পূর্ব্বে গাড়ীথানি কত বেগে যাইতেছিল?
- 25. একখানা রেলগাড়ী, একঘণ্টা চলিবার পর কোন তুর্ঘটনার পড়িয়া, তথার একঘণ্টা বিলম্ব করিল এবং তৎপরে, পূর্ব্ব বেগের है অংশ বেগে চলিয়া ও ঘণ্টা বিলম্বে গস্তব্য স্থানে পৌছিল। যদি তুর্ঘটনা, রওনা হওয়ার স্থান হইতে, আরও 50 মাইল দূরবর্ত্তী স্থানে হইত, তাহা হইলে গাড়ীখানি পূর্ব্বাপেক্ষা 1 ঘণ্টা 20 মিনিট পূর্ব্বে গস্তব্য স্থানে পৌছিতে পারিত। গাড়ীখানি মোট কত মাইল পথ চলিয়াছিল ?
- 26. কোন সংখ্যার বৃগা-স্থানীয় (even places) অঙ্কসমূহের সমষ্টি এবং অযুগা-স্থানীয় (odd places) অঙ্কসমূহের সমষ্টির অস্তরফল, 0 হইলে, বা 11 দারা বিভাজা -হইলে, সংখ্যাটিও 11 দারা বিভাজা হইবে। [B. C. S., 1923.]
- 27. কোনী সংখ্যার অঙ্কসমূহের সমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য হইলে, সংখ্যাটিও 3 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

অষ্টাবিংশ অথ্যায়

লেখাবলী ও উহাদের ব্যবহার

(Graphs and their Applications)

185. কোন বীজ্গণিতীয় রাশিকে কিন্ধপে বিন্দু ও রেথা দ্বারা স্থচিত করা যায়, তাহা সপ্তম ও উনবিংশ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হইয়াছে।

এক্ষণে, লৈখিক চিত্রের ব্যবহার দ্বারা কিরূপে সমীকরণ ও তৎসম্পর্কীয় প্রশ্নের সমাধান করা যায়, তাহাই আলোচনা করা যাইবে। বীজগণিতীয় পদ্ধতি অমুসারে যেরূপ ফুল্ল ফল পাওয়া যায়, এই পদ্ধতিতে লব্ধ ফলগুলি, অবশ্য, সেরূপ স্কল্ম না হইলেও, অত্যন্ত সহজ্ঞসাধ্য বলিয়া, অনেকস্থলেই এই পদ্ধতি অমুস্ত হইয়া থাকে।

186. লৈখিক চিত্র সাহায্যে সমীকরএ-সমাধানঃ

উদা. 1. লেখ সাহায্যে সমাধান কর:

$$2x - 7y + 12 = 0
3x + 2y = 32$$

সমীকরণ তুইটির লৈথিক চিত্র অঙ্কন কর।

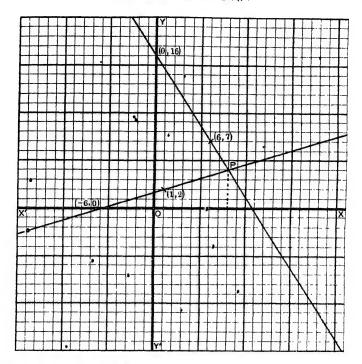
দেখিতে পাওয়া যায় যে,

$$x=1$$
 $y=0$ $y=2$ বিন্দু তুইটি প্রথম সমীকরণের $y=2$ লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ; এবং $x=0$ $y=16$ $y=7$ বিন্দু তুইটি দ্বিতীয় সমীকরণের $y=7$ লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত।

মনে কর, বর্গাঙ্কিত কাগজের ছোট বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া অঙ্কিত, সমীকরণদ্বয়ের লৈখিক চিত্র ছুইটি পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদন্ত হইল।

দেখা যাইতেছে যে, লৈথিক চিত্র ছুইটি P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন, যেহেতু, P বিন্দু উভয় লৈথিক চিত্রের উপরেই অবস্থিত, অতএব, উহার ভুজ-কোটি উভয় সমীকরণকেই সিদ্ধ করিবে। স্পষ্টতঃই, P এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে $8 \ 9 \ 4$.

মতরাং,
$$x=8$$
 স্ব সমীকুরণন্বরের নির্ণেয় বীজ $y=4$



উপরোক্ত ফলের শুদ্ধিপরীক্ষাঃ

প্রদুন্ত সমীকরণদ্বয়ের সকল পদগুলি সমতাচিচ্ছের বামদিকে পক্ষান্তর করিয়া, এবং x ও y এর পরিবর্ত্তে যথাক্রমে ৪ ও 4 বসাইয়া,

প্রথম সমীকরণে,

ক্ষ পক্ষ = $2x - 7y + 12 = 2 \times 8 - 7 \times 4 + 12 = 0$ = ডা'ন পক্ষ ; এবং দ্বিতীয় সমীকরণে.

বাম পক্ষ = $3x + 2y - 32 = 3 \times 8 + 2 \times 4 - 32 = 0 =$ ডা'ন পক্ষ। স্থতরাং, দ্বেখা যাইতেছে যে, x=8, y=4 হইলে, উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

উলা. 2. লেখ সাহায্যে সমাধান কর 2x+12 + 32-3x

এন্থলে আমাদিগকে, $\frac{2x+12}{7}$ এবং $\frac{32-3x}{2}$, এই র তুইটির লৈখিক চিত্র , অঙ্কন করিয়া, উহাদের ছেদবিন্দুর ভুজ (abscissa) নির্ণয় করিতে হইবে

এখন, $\frac{2x+12}{7}$ এর লেখ এবং $y=\frac{2x+12}{7}$ (অর্থাৎ, 2x-7y+12=0) এর লেখ, উভয়ুই এক।

আবার, $\frac{32-3x}{2}$ এর লেখ এবং $y=\frac{32-3x}{2}$ (অর্থাৎ, 3x+2y=32) এর লেখ, উভয়ই এক ।

এখন, 2x-7y+12=0 এবং 3x+2y=32, এই সমীকরণদ্বরের লৈখিক চিত্র হুইটি অঙ্কন করিয়া (প্রথম উদাহরণের চিত্র দেখ) দেখা যায় যে, উহাদের ছেদবিন্দুর (অর্থাৎ, P এর) ভূজ=8.

x = 8 ই প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ।

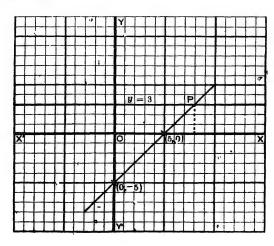
উলা. 3. লেখ সাহায্যে সমাধান কর: x-5=3.

ত একেত্রে, x-5 এবং 3, এই রাশি ছুইটির লৈখিক চিত্র অঙ্কন করিয়া, উহাদের ছেদবিন্দুর ভুজ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, আমরা জানি যে, x-5 এর লেখ এবং y=x-5 গুর লেখ, উভয়ই এক ; এবং y=x-5 এর লৈখিক চিত্রের উপর

$$x = 0$$
 $y = -5$, এবং $x = 5$ বিন্দৃষ্য অবস্থিত।

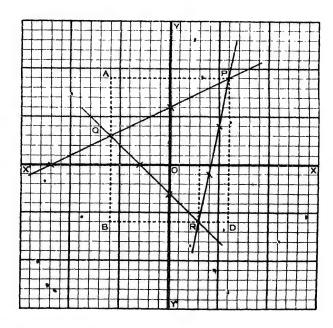
আবার, 3 এর লেখ এবং y=3 এর লেখ, উভয়ই এক; এবং y=3 এর লৈখিক চিত্র, স্পষ্টতঃই, x-অক্ষরেথার সমান্তরাল, এবং মূলবিন্দু হইতে তিন 'একক' দূরবর্ত্তী একটি সরলরেথা।



বর্গান্ধিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া অন্ধিত লৈখিক চিত্র ছুইটি, পূর্ব্ববর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদত্ত হুইল। লেখ ছুইটির ছেদবিন্দু P দ্বারা স্থাচিত করিলে, স্পষ্টই দেখা যায় যে, P বিন্দুর ভুজ =8.

অতএব, x=8 ই প্রদত্ত সমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

উদা. 4. x-2y+12=0, x+y+3=0 এবং 5x-y-21=0, এই তিন সরলরেখা দারা উৎপন্ন ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু, তিনটির ভূজ-কোটি, এবং ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



দেখিতে পাওয়া যায় যে,

$$x = 0$$
 এবং $x = 3$ বিন্দুদ্বয় $x + y + 3 = 0$ এর $y = 0$ লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত;

এবং
$$x=4$$
 $y=-1$, এবং $x=5$ $y=4$ বিন্দুদ্ধ $5x-y-21=0$ এর দৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত।

বর্গান্ধিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণত্রয়ের লেখ তিনটি, পূর্ব্ববর্তী পৃষ্ঠার চিত্রে, যথাক্রমে PQ, QR এবং RP সরলরেখা দারা স্থচিত করা হইল।

চিত্ৰ হইতে দেখা যায় যে,

শীর্ষ
$$P$$
 এর ভূজ-কোটি যথাক্রমে $egin{array}{ccc} x=&6\\ y=&9 \end{array}$;

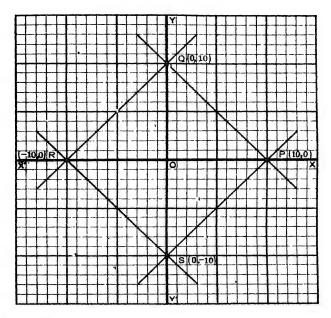
শীর্ষ
$$Q$$
 এর ভূজ-কোটি যথাক্রমে $x=-6$ $y=3$:

এবং শীর্ষ
$$R$$
 এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে $x=3$ $y=-6$

এখন, $P,\,Q,\,R$ দিয়া অন্ধিত, এবং অক্ষরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল কতিপয় রেখা টানিয়া (চিত্র দেখ) দেখা যায় যে,

$$\triangle PQR$$
 = আয়ত $ABDP - \triangle QAP - \triangle QBR - \triangle RDP$ = $AB \times BD - \frac{AP \times AQ}{2} - \frac{QB \times BR}{2} - \frac{RD \times DP}{2}$ = $15 \times 12 - \frac{12 \times 6}{2} - \frac{9 \times 9}{2} - \frac{3 \times 15}{2}$ = $180 - 36 - \frac{81}{2} - \frac{45}{2} = 81$ বৰ্গ একক।

• উদ্ধা. 5. x+y-10=0, x-y+10=0, x+y+10=0 এবং x-y-10=0 দারা স্থচিত সরলবেখাগুলিকে বাহুরূপে লইয়া অঙ্কিত চতুকোণের শীর্ষবিন্দু চারিটির ভূজ-কোটি নির্ণয় কর। দেখাও যে, চতুকোণটি একটি বর্গক্ষেত্র; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



দেখা যায় যে,

$$x=10$$
 ত্বং $y=0$ তিন্দ্রয় $x+y-10=0$ এর $y=10$ তিন্দ্রয় $x+y-10=0$ এর লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত ; $x=0$ তিবং $y=10$ তিবং $x=-10$ তিন্দ্রয় $x-y+10=0$ এর $y=0$ তিবং $x=-10$ তিন্দ্রয় $x+y+10=0$ এর $y=-10$ তিবং $y=0$ তিন্দ্রয় $x+y+10=0$ এর $y=0$ তিবং চিত্রের উপর অবস্থিত ; $x=0$ তিন্দ্রয় $x=10$ তিন্দ্রয় $x=10$ তিন্দ্রয় $x=10=0$ এর $y=0$ তিন্দ্রয় $x=10=0$ এর তিন্দ্রয় $x=10=0$ তিন্দ্রয় তিন্দ

এখন, বর্গান্ধিত কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 'একক'রূপে লইয়া, লৈখিক চিত্রগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখা যায় যে, উহারা, উপরিপ্রদর্শিত চিত্রে, যথাক্রমে PQ, QR, RS এবং' SP সরলরেখাগুলি দ্বারা স্থচিত হইতেছে [চিত্র দেখ]।

স্পষ্টই, P, Q, R, S এর ভুজ-কোটি যথাক্রমে,

$$\begin{array}{lll}
x = 10, & x = 0, & x = -10, & 43, & x = 0, \\
y = 0, & y = 10, & y = 0, & y = -10, & y = -10.
\end{array}$$

চিত্র হইতে অতি সহজেই দেখা যায় যে, OP = OQ = OR = OS (প্রত্যেকেই 10 'একক' দীর্ঘ বলিয়া), এবং PR কর্ণটি (${
m diagonal}$ টি) QS কর্ণের উপর লম্ব।

কাজেই, PQRS চতুষ্কোণটি একটি বর্গক্ষেত্র।

উহার ক্ষেত্রফল =
$$\triangle PQR + \triangle PSR$$

$$= \frac{PR \times OQ}{2} + \frac{PR \times OS}{2}$$

$$= \frac{20 \times 10}{2} + \frac{20 \times 10}{2} = 200$$
 বৰ্গ একক।

প্রথমালা 100

লৈথিক চিত্র সাহায্যে নিম্নলিথিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

1.
$$x + y = 9$$
, $3x - 2y = 7$.

2.
$$4x + 3y = 13$$
, $3x + 2y = 11$.

3.
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 4$$
, $4x - 5y = 2$. 4. $y - x = 2$, $3x - 2y = 5$.

4.
$$y-x=2$$
, $3x-2y=5$.

5.
$$5x - 3y = 11$$
, $2y - 3x + 4 = 0$. **6.** $\frac{x - 2}{9} = \frac{-5x + 4}{5}$.

6.
$$\frac{x-2}{2} = \frac{-5x+4}{5}$$
.

7.
$$\frac{2x+7}{3} = \frac{3x-7}{2}$$
.

8.
$$\frac{4x-3}{5} = \frac{6x}{7} - 1$$
.

9.
$$x-12=-3$$
.

10.
$$5x - 13 = 7$$
.

- 11. -x+3y=18, x+7y=22 এবং y+3x=26 দ্বারা স্টতিত সরলরেখা তিনটি কর্ত্তৃক উৎপন্ন ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের ভূজ-কোটি, এবং ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল, নির্ণয় কর।
- 12. দেখাও বে, 4x y = 16, 3x 2y = 7 এবং x + y = 9 দারা স্থাচিত সরল-রেথাত্রয় এক বিন্দু দিয়া যায়; উহাদের সম্পাতবিন্দুর (point of concurrence) ভূজ-কোটি নির্ণয় কর।

13. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের লৈখিক চিত্রদ্বারা উৎপন্ন চতুক্ষোণগুলির শীর্ষবিন্দু, এবং উহাদের প্রত্যেকের ক্ষেত্রফল, নির্ণয় কর:

(i)
$$x+y=3$$
, $\frac{x}{3}-\frac{y}{3}=1$, $\frac{x+y}{3}=-1$ and $x-y+3=0$;

(ii)
$$x=1$$
, $y=5$, $x=12$ 43 ? $y=10$;

(iii)
$$x = 0$$
, $y = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ and $\frac{x}{8} + \frac{y}{12} = 1$.

14. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির লৈখিক চিত্র দারা উৎপন্ন ত্রিভূজগুলির শীর্ষবিন্দুর ভূজ-কোটি, এবং ত্রিভূজগুলির ক্ষেত্রফল, নির্ণয় কর:

(i)
$$x = 0$$
, $y = 0$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} = 1$;

(ii)
$$x-2=0$$
, $y-1=0$, $x+y=6$;

(iii)
$$x-2y+8=0$$
, $x+y+2=0$, $5x-y-14=0$.

নিম্নলিখিত সহ-সমীকরণগুলির সাধারণ (common) বীজ নির্ণয় করিয়া প্রত্যক্ষ কর যে, উহাদের প্রত্যেকে x এবং y এর একই মান দারা সিদ্ধ হয়। x এবং y এর এই সাধারণ মানগুলি নির্ণয় কর এবং লেখ-সাহায্যে উহাদিগকে পরীক্ষা কর :

15.
$$x+y=2$$
, $x=1$, $y=1$.

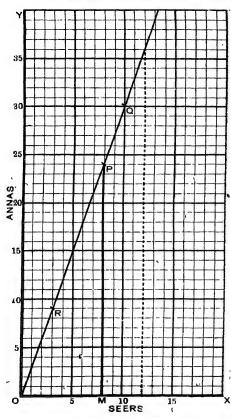
16.
$$7x + 5y = 24$$
, $x + y = 2$, $2x + y = 9$.

17.
$$2x - y = 7$$
, $y - x = 2$, $11x = 9y$.

187. সমীকরণ সম্বনীয় শ্রশ্ন-দমাধানে লৈখিক চিত্রের ব্যবহার:

উদা. 1. এক সের চাউলের মূল্য তিন আনা হইলে, দেখাও যে, বর্গাঙ্কিত কাগজে এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায় যে, উহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভূব (abscissa) যে পরিমাণ চাউল নির্দেশ করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি (ordinate) সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য জ্ঞাপন করিবে।

উপরোক্ত সরলরেথার সাহায্যে, (i) 12 সের চাউলের মূল্য, (ii) 27 আনা মূল্যের চাউলের ওজন, নির্ণয় কর। নিমপ্রদর্শিত চিত্রে, ধর, OX অক্ষরেখাস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য



'এক সের', এবং OY অক্ষরেখান্থিত এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক আনা' নির্দ্দেশ করিতেছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্মে লিখিত অঙ্কগুলির অর্থ সম্প্রষ্ট।

যেহেভু, এক সেরের মূল্য তিন আনা, অতএব, ৪ সেরের মূল্য 24 আনা হইবে। কাজেই, P, এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ OM, যে পরিমাণ (অর্থাৎ, ৪ সের.) চাউল নির্দ্দেশ করিতেছে, তাহার কোটি PM, সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য (অর্থাৎ, 24 আনা) নির্দ্দেশ করিতেছে।

OP সরলরেখাটি সংযুক্ত কর এবং উহাকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে, OP সরলরেখাই এক্ষণ একটি রেখা, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভূজ-কোটিই, P এর ভূজ-কোটির অন্তর্ম্মপ শহমে আবদ্ধ।

অতএব, ইহার উপরিস্থিত Q(10,30) বিন্দুটি এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভুজ যে পরিমাণ চাউল নির্দ্দেশ করিতেছে, তাহার কোটি সেই পরিমাণ চাউলের মূল্য জ্ঞাপন করিতেছে। R(3,9) বিন্দুর ভুজ-কোটিও অন্তর্মপভাবে সম্বন্ধ। ইত্যাদি।

স্থতরাং, OP ই নির্ণেয় সরলরেথা।

এই সরলরেথার সাহায্যে, যে কোন পরিমাণ চাউলের মূল্য অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়। দৃষ্টাস্তস্বরূপ, যে বিন্দুর ভূজ 12, সেই বিন্দুর কোটি স্পষ্টতঃই 36; অতএব, 12 সের চাউলের মূল্য 36 আনা। অক্সান্ত ক্ষেত্রেও অন্তরূপ ফল পাওয়া ধাইবে।

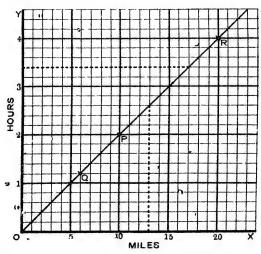
উপরিপ্রদর্শিত চিত্র (অর্থাৎ OP সরলরেখা) হইতে কোন নির্দিষ্ট মূল্যে কত পরিমাণ চাউল পাওয়া যাইবে, তাহাও অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, বে

বিন্দুর কোটি 27, তাহার ভূজ স্পষ্টতঃই 9; অতএব, 27 আনা মূল্যে 9 সের চাউল পাওয়া যাইবে।

টীকা। *OP* সরলরেখাকে চাউলের **মূল্য-নিরূপক লেখ (price-graph)** বলে।

উদা. 2. B নামক এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে কোন এক নির্দিষ্ট স্থান হইতে যাত্রা করিল। দেখাও যে, B এর গতি-নির্দেশক লৈথিক চিত্র এরূপ একটি সরলরেখা দারা স্থচিত হইতে পারে, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভুজ যত সংখ্যক মাইল নির্দেশ করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি, উক্ত দূরত্ব অতিক্রম করিতে B এর যে সময় আবশ্রুক হয়, তাহা নির্দ্দেশ করিবে।

এই লেখ হইতে, (i) 3 ঘণ্টা 24 মিনিটে B যত মাইল অতিক্রম করিবে, তাহা, এবং (ii) 13 মাইল ঘাইতে, B এর যত সময় লাগিবে, তাহা নির্ণয় কর।



ধর, OX এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক মাইল', এবং OY এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য '12 মিনিট' সময় স্থাচিত করিতেছে; এবং এতদমুসারে উপরিপ্রাদশিত লৈথিক চিত্রটি অঙ্কিত হইয়াছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্শ্বস্থিত অঙ্কগুলির অর্থ স্কুম্পষ্ট।

ষেহেতু, B এক ঘণ্টায় 5 মাইল পথ অতিক্রম করে, অতএব সে তুই ঘণ্টায় 10 মাইল পথ অতিক্রম করিবে। কাজেই, চিত্র ইইতে দেখা যায় যে, P এরূপ একটি বিন্দু,

যাহার ভুজ যত মাইল (এস্থলে, 10 মাইল) স্থচিত করিতেছে, ঐ বিন্দুর কোটি, উক্ত দূরস্ব অতিক্রম করিতে B এর যত সময় (এস্থলে, 2 ঘণ্টা) লাগে, তাহা স্থচিত করিতেছে।

OP সরলরেথাটি অন্ধিত কর এবং উহাকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে, OP ই এরূপ একটি সরলরেথা, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দূর ভূজ-কোটিই P এর ভূজ-কোটির অন্থরূপ সম্বন্ধে আবদ্ধ।

এই সরলরেথার উপর অন্থ একটি বিন্দু, Q, লইর্না দেখা যাইতেছে যে, উহার ভুজ, 6 মাইল, এবং কোটি 1 ঘণ্টা 12 মিনিট সময় নির্দেশ করিতেছে; কিন্তু আমরা জানি যে, ঐ ব্যক্তি 1 ঘণ্টা 12 মিনিটে 6 মাইল পথ অতিক্রম করিতে পারে। কাজেই, Q বিন্দুটিও উপরিলিথিত সর্ত্তগুলি পূরণ করিতেছে।

তজ্ঞপ, এই সরলরেখার উপর আর একটি বিন্দু, R, লইয়া দেখা যাইতেছে যে, উহার ভুজ 20 মাইল, এবং কোটি, 4 ঘণ্টা সময়, নির্দেশ করিতেছে। কিন্তু আমরা জানি যে, ঐ ব্যক্তি 4 ঘণ্টায় 20 মাইল পথ ভ্রমণ করিয়া থাকে। অতএব, R বিন্দুটিও উপরিলিখিত সর্তগুলি পূরণ করিতেছে।

ঐ রেথার উপরিস্থিত অক্যান্য বিন্দুর বেলায়ও অনুরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়। কাজেই, OP সরলরেখাই নির্ণেয় লৈখিক চিত্র।

এই লেখ হইতে, B কোন্ নির্দিষ্ট পরিমাণ দ্রত্ব কত সময়ে অতিক্রম করিবে, তাহা অবিলম্বে জানা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যদি কোন বিন্দুর ভূজ 13 মাইল দূরত্ব স্থচিত করে, তাহা হইলে, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, ঐ বিন্দুর কোটি 2 ঘণ্টা 36 মিনিট সময় নির্দেশ করিতেছে; অতৃএব, বুঝা যাইতেছে যে, B, 2 ঘণ্টা 36 মিনিটে 13 মাইল দূরত্ব অতিক্রম করে।

আবার, B, কোন্ নির্দিষ্ট সময়ে কত মাইল দূরস্ব অতিক্রম করিবে, তাঁহাও এই লেখ হইতে নির্ণীত হইতে পারে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, যদি ঐ লেখস্থিত কোন বিন্দুর কোটি 3 ঘণ্টা 24 মিনিট সময় স্থচিত করে, তবে স্পষ্টই ঐ বিন্দুর ভূজ 17, ফাইল দূরস্ব স্থচিত করিবে। অতএব, বুঝা যাইতেছে যে, B, 3 ঘণ্টা 24 মিনিটে 17 মাইল পথ অতিক্রম করিবে।

টীকা। *OP* সরলরেখাটিকে *B* এর 'গাড়ি-নিরূপক লেখ' (motion graph) বলে।

• উদা. 3. যদি এক ইঞ্চির দৈর্ঘ্য 2.5 সেণ্টিমিটারের দৈর্ঘ্যের সমান হয়, তবেঁ দেখাও যে, এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায়, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভূজ যত সংখ্যক 'ইঞ্চি' স্থচিত করিবে, ঐ বিন্দুর কোটি উহার সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট সেণ্টিমিটারের সংখ্যা নির্দ্দেশ করিবে। এই চিত্র (বা, সরলরেখা) হইতে, (i) 10 ইঞ্চিতে কত সেন্টিমিটার, এবং (ii) 15 সেন্টিমিটারে কত ইঞ্চি হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

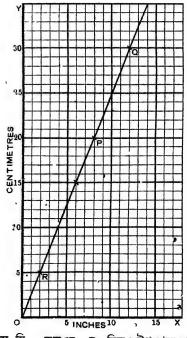
ধর, OX এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুব দৈর্ঘ্য 'এক ইঞ্চি', এবং OY এর উপরিস্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক সেটিমিটার (সে. মি.)' হুচিত করিতেছে; এবং এতদমুশারে, নিমপ্রদর্শিত চিত্রটি অঙ্কিত হইয়াছে। তাহা হইলে, OX এবং OY এর পার্শস্থিত অঙ্কগুলির অর্থ স্কুম্পন্ট।

ষেহেত্, 1 ইঞ্চি = 2'5 সেটিমিটার, অতএব, ৪ ইঞ্চি = 20 সেটিমিটার। স্থতরাং, উপরিস্থিত চিত্রে, P এরূপ একটি বিন্দু, যাহার ভূজ যত ইঞ্চি দৈর্ঘ্য হুচিত করিতেছে, ঐ বিন্দুর কোটি উক্ত দৈর্ঘ্যের ভিতর যত সেটিমিটার আছে, তাহার সংখ্যা নির্দেশ করিতেছে।

এঁকটি সরলরেথা দারা O, P যুক্ত কর, এবং উহাকে উভয়দিকে বর্দ্ধিত কর। তাহা হইলে, উহ' এরূপ এক সরলরেথা হইবে, যাহার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ভূজ-কোটিই P এর ভূজ-কোটির অন্তর্মণ সম্বন্ধে আবদ্ধ।

এই সরলরেথার উপর অন্ত এক বিন্দু Q লইয়া দেখা যায় যে, উহার ভূজ 12 ইঞ্চি, এবং উহার কোটি 30 দেটিমিটার দৈর্য্য স্থচিত করিতেছে। কিন্তু, আমরা জানি যে, 12 ইঞ্চি = 30 সে. মি.; কাজেই, Q বিন্দুও উপরিলিথিত সর্গু পূরণ করিতেছে।

এই সরলরেথার উপর, অপর আর এক বিন্দু R লও; দেখা যায় যে, ইহার ভূজ 2 ইঞ্চি, এবং কোটি 5 সেটিমিটার স্থচিত করিতেছে। কিন্তু আমরা জানি যে, 2 ইঞ্চি= E



কিন্তু আমরা জানি যে, 2 ইঞ্চি=5 সে. মি.; অতএব, R বিন্দুও উপরোক্ত সর্ত্ত পূরণ করিতেছে। এইরূপে দেখান যাইতে পারে যে, এই সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দৃই উপরোক্ত সর্ত্ত পূরণ করিবে। অতএব, OP ই নির্দেয় সরলরেখা।

উক্ত লেখ (অর্থাৎ, *OP* সরলরেখা) হইতে আমরা, কোন নির্দিষ্টসংখ্যক ইঞ্চিকত দেটিমিটারের সমান, তাহা অবিলম্বে নির্ণয় করিতে পারি । দৃষ্টাস্তম্বরূপ, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, যে বিন্দুর ভুজ 10 ইঞ্চি নির্দেশ করে, তাহার কোটি 25 সেন্টিমিটার নির্দেশ করে; কাজেই, বুঝা যাইতেছে যে, 10 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য 25 সে. মি. দৈর্ঘ্যের সমান ।

আবার, উক্ত লেথ হইতে আমরা, যে কোন নির্দিষ্টসংখ্যক সেণ্টিমিটারের দৈর্ঘ্য কত ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের সমান, তাহাও নির্ণয় করিতে পারি। দৃষ্টান্তস্বরূপ, ঐ সরলরেখার উপরিস্থিত যে বিন্দুর কোটি 15 সে. মি. স্থচিত করে, সেই বিন্দুর ভুজ, স্পষ্টই, 6 ইঞ্চি স্থচিত করে। কাজেই, বুঝা যায় যে, 15 সে. মি. দৈর্ঘ্য, 6 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের সমান।

্ টীকা। OP সরলরেখা হইতে, কত ইঞ্চি কত সেণ্টিমিটারের সমান, বা কত সেণ্টিমিটার কত ইঞ্চির সমান, ইহা জানা যায় বলিয়া, উক্ত সরলরেখাকে 'ইঞ্চি-সেণ্টিমিটার' পরিবর্ত্তক লেখ (inch-centimetre conversion graph) বলা হয়।

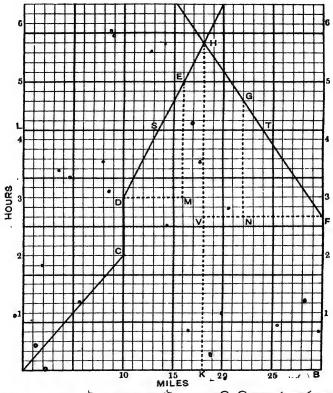
উদা. 4. A ও B পরস্পের 30 মাইল দ্রবন্তী হুইটি ষ্টেশন। P, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টার 5 মাইল গতিতে যাত্রা করিয়া, হুই ঘণ্টা পরে পথিমধ্যে এক ঘণ্টাকাল বিশ্রাম করিল এবং বাকী পথ ঘণ্টার তিন মাইল গতিতে যাইবে বলিয়া পুনরার রওনা হইল। P, A হইতে যাত্রা করিবার 2 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে, Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টার 4 মাইল গতিতে চলিতে লাগিল। P এবং Q, কখন্ এবং কোথার, একত্রিত হইবে P

ধর, OX অক্ষরেথার সমান্তর AB রেথান্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এব বাহুর দৈর্ঘ্য 'এক মাইল' দূরত্ব, এবং OY অক্ষরেথার সমান্তর BF রেথান্থিত ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য '10 মিনিট' সময় নির্দেশ করিতেছে। তাহা হইলে, পরবত্তী পৃষ্ঠায় প্রদত্ত চিত্রের AB এবং BF রেথান্থরের পার্শ্বন্থিত অঙ্কগুলির অর্থ স্থম্পষ্ট। $^{\circ}$

(i) P, A হইতে রওনা হইয়া ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে, তুই ঘণ্টায় 10 মাইল পথ গমন করিল। অতএব, C যদি এরপ একটি বিন্দু হয়, যাহার ভুজ ও কোটি যথাক্রমে 10 মাইল এবং 2 ঘণ্টা নির্দেশ করে, তাহা হইলে, AC সরলরেখাই P এর প্রথম তুই ঘণ্টার গতি-নিরূপক লেথ হইবে।

তৃতীয় ঘণ্টায়, P এর গতি-নিরূপক লেখ এইরূপ হইবে যে, উহার উপরিস্থিত যেঁকোন বিন্দুর দ্পুজই সর্বাদা 10 মাইল নির্দেশ করিবে; কারণ, এই ঘণ্টায় P স্থির হইয়া বিশ্রাম কুরিতেছিল; কাজেই, উল্লিখিত চিত্রে, CD সরলরেখাই P এর তৃতীয় ঘণ্টার গতি-নিরূপক (অথবা, P এর বিশ্রামের) লেখ হইবে।

তৃতীয় ঘণ্টার পর, P, ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। অতএব চিত্রে, DM, 6 মাইল পথ, এবং ME, 2 ঘণ্টা সময়, নির্দেশ করিলে, DE সরলরেথাই P এর তৃতীয় ঘণ্টার পরবর্ত্তী সময়ের গতি-নিরূপক লেথ হইবে।



স্থত্রাং, ACDE, এই ভগ্ন-সরলরেথাই P এর গতি-নিরূপক 'সম্পূর্ণ লেথ' হার্টবে। (ii) P, A হাইতে যাত্রা করিবার 2 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে, Q, B হাইতে রওনা হাইল। কাজেই, \mathbf{p} চিত্রে, BF সরলরেঞ্চাকে Q এর B তে 2 ঘণ্টা 40 মিনিট কালব্যাপী বিশ্রোমের লেথ বলিয়া কল্পনা করা ঘায়।

তৎপরে, Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। অতএব, চিত্রে, G যদি এরূপ একটি বিন্দু হয় যে, FN ও NG রেখাদ্বয় যথাক্রমে 8 মাইল পথ ও 2 ঘণ্টা সময় নির্দেশ করে, তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, FG সরলরেখাই Q এর গতি-নিরূপক লেথ হইবে।

(iii) ধর, এই তুইটি লেখ (অর্থাৎ, P এর গতি-নিরূপক 'সম্পূর্ণ লেখ' এবং Q এর গতি-নিরূপক লেখ) H বিন্দৃতে ছেদ করিল। H হইতে AB এর উপর HK লম্বটি অঙ্কিত কর, এবং FN কে বর্দ্ধিত করিয়া HK রেখার সহিত V বিন্দৃতে মিলিত ক্র। χ

অতএব, পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, HK দ্বারা নির্দিষ্ট সময়ে, P,B অভিমুখে AK দ্বারা হচিত দূরত্ব, এবং Q,A অভিমুখে BK (অর্থাৎ, FV) দ্বারা হচিত দূরত্ব, অতিক্রম করিয়াছে ; এবং কাজেই, তাহারা এই সময়ে মিলিত হইয়াছে । \Box

স্থতরাং, তাহাদের সাক্ষাতের নির্ণেয় সময় = HK ছারা নির্দিষ্ট সময় = P এর রওনা হওয়ার 5 ঘণ্টা 40 মিনিট পরে ;

এবং A হইতে সাক্ষাতের স্থানের দূরম্ব=AK দারা নির্দিষ্ট দূরম্ব=18 মাইল।

- ্ **টীকা 1.** যেহেতু, HV রেখা 3 ঘণ্টা সময় স্থচিত করিতেছে, অতএব, B হইতে Q এর রওনা হওয়ার 3 ঘণ্টা পরে, P এবং Q মিলিত হইয়াছে।
- টীকা 2. L বিন্দু দিয়া অন্ধিত OX রেখার সমাস্তরাল রেখাটি লেখ ছুইটিকে S ও T বিন্দুতে ছেদ করিরাছে (চিত্র দেখ)। যেহেতু, AL, 4 ঘণ্টা 10 মিনিট সময়, এবং ST, $10\frac{1}{2}$ মাইল দূরত্ব স্থচিত করিতেছে, অতএব, পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইতেছে যে, P এর রওনা হওয়ার পর 4 ঘণ্টা 10 মিনিটের সময়, P ও Q এর মধ্যে $10\frac{1}{2}$ মাইল ব্যবধান রহিয়াছে।

প্রশালা 101

- 1. তৃপ্পের মূল্য সের প্রতি পাঁচ আনা করিয়া লইলে 5 সের পর্যান্ত তৃপ্পের মূল্য দির্ন্য করা যায়, এরূপ একটি 'মূল্য-নিরূপক লৈথিক চিত্র' অঙ্কিত, কর। চিত্র হইতে 3 সের 5 ছটাক তৃপ্পের মূল্য, এবং দশ আনা নয় পাইতে কত পরিমাণ তৃপ্প পাঁওয়া যায়, তাহা নিরূপণ কর।
- 2. ফজ্লি আমের মূল্য ডজন প্রতি এক টাকা তুই আনা হইলে, 30টি পর্যান্ত আমের মূল্য নির্ণয় করা যায়, এরপ একটি 'মূল্য-নিরূপক লেখ' অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, 17টি আমের মূল্য, এবং 1 টাকা 12 আনা 6 পাইতে কত আম পাওয়া যায়, তাহা নির্ণয় কর।
- 3. কোন ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 মাইল হিসাবে গমন করিলে, তাঁহার 'গতি-নিরূপক লেশ' অন্ধিত কর। লেখ হইতে, 13 মাইল যাইতে তাঁহার কত সময় লাগিবে, এবং $4\frac{9}{4}$ ঘণ্টায় তিনি কত মাইল গমন করিবেন, তাহা নির্ণয় কর।
- 4. 'এক হাত', দেড় ফুটের সমান হইলে, একটি 'হাত-ফুট পরিবর্ত্তক লেখ' অঙ্কিত কর। লেখ হইতে, 5½ হাতে কত ফুট, এবং 6½ ফুটে কত হাত, তাহা নির্ণয় কর।

- 5. A, কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে এক নির্দিষ্ট দিকে, ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে যাত্রা করিল; এবং B, A এর এক ঘণ্টা পরে ঐ স্থান হইতে ঐ দিকেই, ঘণ্টায় 5 মাইল গতিতে যাত্রা করিল। A এবং B এর 'গতি-নিরূপক লেখ' তুইটি অঙ্কিত কর, এবং উহা হইতে, B, A কে, কোথায় এবং কোন্ সময়ে ধরিবে, তাহা নির্ণয় কর।
- 6. A এবং B, 20 মাইল দ্রবর্ত্তী ছুইটি ষ্টেশন। P, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল গতিতে, এবং Q, B হইতে A অভিমুখে ঘণ্টায় 2 মাইল গতিতে, একই সময়ে যাত্রা করিল। P এবং Q এর 'গ্রুতি-নিরূপক লেখ' ছুইটি অঙ্কিত কর। লেখ হুইতে, উহারা কোথায় এবং কোন্ সময়ে মিলিত হুইবে, তাহা নির্ণয় কর। .
- 7. পঞ্চাশটি একই জাতীয় বস্তুর মূল্য 3 টাকা 2 আনা হইলে, 50টি পর্য্যন্ত বস্তুর মূল্য নির্ণয় করা যায়, এক্লপ একটি 'মূল্য-নিক্লপক লৈখিক চিত্র' অঙ্কিত কর। উহা হুইতে, 19টি বস্তুর মূল্য এবং 2 টাকা 7 আনায় শুতটি বস্তু পাওয়া যায়, তাহা নির্ণয়ুক্র।
- 8. 1 কিলোগ্রাম = 2'2 পাউণ্ড্ইলে, এরপ একটি 'কিলোগ্রাম-পাউণ্ড্ পরিবর্ত্তক লৈখিক চিত্র' অস্টিত কর, যাহা হইতে 15 পাউণ্ড্ পর্যান্ত ওজনের তুল্য ওজনবিশিষ্ট কিলোগ্রামের সংখ্যাও নিরূপণ করা যায়। এই চিত্র হইতে, 11 পাউণ্ড্ কত কিলোগ্রামের সমান, তাহা নির্ণয় কর।
- 9. এক ব্যক্তি ঘণ্টার 2 মাইল বেগে তিন ঘণ্টা কাল ভ্রমণ করিবার পর, দেড় ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া পুনরায় ঘণ্টায় আড়াই মাইল বেগে চলিতে লাগিলেন। তাঁহার ভ্রমণের 'গতি-নিরূপক লেখ' অঞ্কিত কর।
- 10. এক ব্যক্তি, B হইতে C অভিমুখে, ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে চলিতে লাগিলেন। তিন ঘণ্টা পরে, তিনি তাঁহার মত পরিবর্ত্তন করিয়া পুনরায় B অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে প্রত্যানর্ত্তন করিতে লাগিলেন। এইরূপভাবে ছুই ঘণ্টা কাল চলিবার পর, পুনরায় তাঁহার মত পরিবর্ত্তিত হইল; এবং তিনি C অভিমুখে, ঘণ্টায় 7 মাইল বেগে দোড়াইতে লাগিলেন। তাঁহার গতি-নিরূপক একটি লৈখিক চিত্র অস্কিত কর।
 - 11. কোন-এক রাস্তার উপর A, B এবং C পর পর তিনটি ষ্টেশন, এবং A হইতে B এর দূরত্ব 6 মাইল । Q, ঠিক মধ্যাহে, B হইতে C অভিমুখে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে লাগিল ; এবং P, অপরাহ্ন দেড়টার সময়, A হইতে B অভিমুখে ঘণ্টায় $6\frac{1}{2}$ মাইল বেগে দোড়াইতে আরম্ভ করিল । উহাদের গতির লৈখিক চিত্র ঘুইটি অন্ধিত কর ; এবং A চিত্র হইতে, A কথন.এবং কোন্স্থানে A কে ধরিবে, তাহা নির্ণয় কর ।
 - * 12. কোন ব্যক্তি 40 দিনে 60 টাকা ব্যয় করেন। এরূপ একটি লৈখিক চিত্র অঙ্কিত কর, যদ্ধারা, যে কোন নির্দিষ্টসংখ্যক দিনে তিনি কত 'পরিমাণ টাকা ব্যয় করেন, ভাহা নিরূপণ করা যায়। এই চিত্র হইতে, 28 দিনে তিনি কত ব্যয় করিবেন, ভাহা নির্দার কর।

- 13. বেলা 3 টা ও 4 টার মধ্যে, কোন্ সময়ে ঘড়ির কাঁটা ছুইটি একত্রিত হইবে, তাহা, লৈখিক চিত্র সাহায্যে, নির্ণয় কর।
- 14. টাকা প্রতি 5 পাই করিয়া আয়-কর (income-tax) ধার্য্য আছে। এরূপ একটি লৈথিক চিত্র অঙ্কিত কর, যদ্ধারা 3000 হইতে 5000 পর্য্যস্ত টাকার আয়-কর নির্ণয় করা যায়। এই চিত্র হইতে, কত পরিমাণ আয়ের আয়-কর ৪১ টাকা, এবং 4350 টাকা আয় হইলে, কত আয়-কর দিতে হইবে, তাহা নিরূপণ কর।
- 15. কলিকাতা হইতে রাণাঘাটগামী একথানি 'এক্স্প্রেস রেলগাড়ী' (express train) এবং নৈহাটি হইতে কলিকাতাগামী অন্ত একথানি স্থানীয় (local) রেলগাড়ীর বিভিন্ন ষ্টেশনে আগম ও নির্গমের সময় নিম্নে প্রদত্ত হইল। রেলগাড়ী হুইখানির প্রত্যেকটি বরাবর সমবেগে চলিতে থাকিলে, এবং স্থানীয় গাড়ীখানি (local train), নৈহাটি হইতে কলিকাতার মধ্যবর্ত্তী প্রত্যেক ষ্টেশনে এক মিনিট করিয়া থামিলে, উহারা কোথায় এবং কোন্ সময়ে, পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

দলিকাতা হইতে মাই <i>লে</i> [']	ছ াড়িবার
নিরূপিত দূর্ব :	• সময় :
46 রাণাঘাট	17-56
24 নৈহাটি	16-24
22 কাকিনাড়া	16-29
19 ভাষনগর	16-36
,17 ইছাপুর	16-42 ↑
15 পল্তা -	16-45
• 14 ব্যারাকপুর -	16-49
13 টিটাগড়	16-53
12 थड़नश	↓ 16-5'⟩
10 সোদপুর	17-2
9 আগরপাড়া	17-6
৪ বেলঘরিয়া	17-11
5 प्रमापम	17-19
কলিকাতা	17-31 16-42
	[B. C. S. পরীক্ষা, 1922.]

উনত্রিংশ অপ্রায়

সূচক-নিয়মাবলী (Laws of Indices)

188. সংজ্ঞা : m-সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটিই a হইলে, ঐ উৎপাদকগুলির গুণফলকে a^m দারা সুচিত করা হয়। [নিয়ম 16]

অতএব, m একটি অথণ্ড ধনরাশি (a positive integer) হ**ই**লে, a^m এর অর্থ নিরূপণ করা অত্যন্ত সহজ।

189. সূচক-নিয়ম ও তাদবলম্বনে নির্ণীত সিক্রান্ত-সমূহ: m ও n যে কোন ছুইটি অখণ্ড ধনরাশি হুইলে, প্রমাণ করিতে হুইনে যে, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

থেহেতু, $a^m=a.a.a.$ m-সংখ্যক উৎপাদক পর্যান্ত, এবং, $a^n=a.a.a.a.$ m-সংখ্যক উৎপাদক পর্যান্ত, $a^m\times a^n=(a.a.a.$ m-সংখ্যক উৎপাদক পর্যান্ত) $\times (a.a.a.a. \qquad m$ -সংখ্যক উৎপাদক পর্যান্ত), $= a.a.a.a.a.a.a.a. \qquad (m+n)$ -সংখ্যক উৎপাদক পর্যান্ত $= a^{m+n}.$

ইহাকেই সূচক-নিয়ম (Index Law) বলে।

অনুসি. 1. m, n এবং p এর প্রত্যেকে যে কোন অথও ধনরাশি হইলে, $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$.

কারণ, $a^m \times a^n = a^{m+n}$; ... $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{(m+n)+p}$. এই রূপে, $a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \cdots = a^{m+n+p+q+\cdots}$

জ্বতএব দেখা যায় যে, কোন সংখ্যার কতকগুলি বিভিন্ন শক্তির গুণফ্**ল, ঐ** সংখ্যার এরূপ এক শক্তি, যাহার স্থচক প্রদত্ত শক্তিগুলির স্থচকের সমষ্টির সমান।

অনুসি. \bullet 2. m.ও n যে কোন তুইটি অথও ধনরাশি হইলে, $(a^m)^n=a^{mn}$ হইবে।

কারণ, $(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times \dots n$ -সংখ্যক উৎপাদক পর্যান্ত . $=a^{m+m+m+\dots n}$ -সংখ্যক পদ পর্যান্ত [অনুসি. 1] a^m

অনুসি. 3. m ও n যে কোন তুইটি অথণ্ড ধনরাশি এবং m>n হইলে, $a^m \div a^n = a^{m-n}$ হইবে।

কারণ, $a^{m-n} \times a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$, [কারণ, m-n একটি অথও ধনরাশি] $\therefore a^m + a^n = a^{m-n}.$

- 190. $m ext{ ଓ n এর যে কোন প্রাকার মানের জন্মই <math>a^m \times a^n = a^{m+n}$ সভ্য হইবে বলিয়া প্ররিয়া লইয়া, কোন সংখ্যার ভগ্নাংশ ও ঋণাত্মক সূচকবিশিষ্ট শক্তিগুলির অর্থ নির্ণিয় :
 - . ্ব(i) p ও q যে কোন হুই অথগু ধনরাশি হইলে, $oldsymbol{a}^{\frac{v}{q}}$ এর অর্থ নির্ণয় কর: যেহেতু, m ও n এর য়ে কোন মানের জন্মই $a^m \times a^n = a^{m+n}$ হইবে, অতএব, m ও n এর প্রত্যেকের পরির্বর্তে $\frac{p}{q}$ ন্সাইয়া,

$$a^{\frac{v}{q}} \times a^{\frac{v}{q}} = a^{\frac{v}{q} + \frac{v}{q}} = a^{\frac{2v}{q}}$$
;

তদ্ধপ, $a^{\stackrel{p}{a}} \times a^{\stackrel{p}{a}} \times a^{\stackrel{p}{a}} = a^{\stackrel{p}{a}} \times a^{\stackrel{2p}{a}} = a^{\stackrel{2p}{a}} \times a^{\stackrel{p}{a}} = a^{\stackrel{3p}{a}}$; ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অতএব, $a^{\stackrel{p}{a}} \times a^{\stackrel{p}{a}} \times a^{\stackrel{p}{a}} \times a^{\stackrel{p}{a}} \times \dots$ q-সংখ্যক উৎপাদক পৰ্যান্ত $= \begin{pmatrix} a^{\stackrel{p}{a}} \end{pmatrix}_{=a^p}^q$; অথবা, $\begin{pmatrix} a^{\stackrel{p}{a}} \end{pmatrix}_{=a^p}^q$.

কাজেই, $a^{p\over a}$, a^{p} এর q-তম মূল $(q^{th} \text{ root})$ স্থচিত করিতেছে ; স্থতরাং, $a^{p\over a}=q\sqrt{a^{p}}$.

ভাষুসি.। উপরোক্ত ব্যাখ্যা হইতে, স্পষ্টই, $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a},\ a^{\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{a},\ a^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{a};$ ইত্যাদি।

সাধারণভাবে প্রকাশ করিলে, $a^{\frac{1}{n}} = n/a$.

টীকা। স্চক-নিয়মামুসারে, সহজেই বুঝা ধায় যে,

 $a^{\frac{1}{a}} \times a^{\frac{1}{a}} \times a^{\frac{1}{a}} \times \dots p$ -সংখ্যক উৎপাদক পর্যান্ত $= a^{\frac{p}{a}}$.

কাজেই, $a^{\frac{p}{a}}$ কে $a^{\frac{1}{a}}$ এর p-তম শক্তি, অর্থাৎ $(q/a)^p$ বলিয়াও মনে করা যায়।

স্থতরাং, $a^{\frac{p}{q}}$ কে 'a এর p-তম শক্তির q-তম মূল,' অথবা 'a এর q-তম মূলের p-তম শক্তি,' এতহভয়ের যে কোন রূপেই ব্যাখ্যা করা যায়।

(ii) aº এর অর্থ নির্ণয় করা:

থেছেতু, m ও n এর সকল প্রকার মানের জন্মই $a^m \times a^n = a^{m+n}$, অতএব, m এর প্রবিবর্ত্তে 0 বসাইয়া,

$$a^{0} \times a^{n} = a^{0+n} = a^{n}$$
; ... $a^{0} = a^{n} + a^{n} = 1$.

অতএব, যে কোন সংখ্যাকে 0 শক্তিতে উন্নীত করিলে, উহার মান 1 (unity) হুইবে।

(iii) n যে কোন অথগু ধনরাশি হইলে, a^{-n} এর অর্থ নির্ণয় করা :

যেহেতু, m ও n এর সকল প্রকার মানের জন্মই $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ইইবে, ত্তাত্রবর্তা, m এর পরিবর্ত্তে -n বসাইয়া,

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$
;

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
, and $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

জ্ঞামুসি.। অতএব, m ও n এর সকল প্রকার মানের জন্মই $a^m+a^n=a^{m-n}$ হইবে।

কারণ,
$$a^m + a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$
.

উলা. 1. ৪⁵ এরু মান নির্ণয় কর।

$$8^{\frac{5}{9}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32.$$

উদা. 2.° 4^{-5/2} এর মান নির্ণয় কর।

$$4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{4})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

উল 3. গুণ কর:

$$\sqrt{a^5}$$
, $a^{\frac{8}{4}}$, $\sqrt[4]{a^{-5}}$ and $\frac{1}{a^{-3}}$.

নির্ণেয় গুণফল =
$$a^{\frac{5}{2}} \times a^{\frac{8}{4}} \times a^{-\frac{5}{4}} \times a^3$$

= $a^{\frac{5}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{4} + 3}$.
= $a^{\frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 3} = a^{2+3} = a^5$.

সহজ বীজগণিত

প্রথমালা 102

ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক ফুচকবিশিষ্ট আকার বর্জন করিয়া, নিম্নলিখিত রাশি-গুলিকে প্রকাশ কর:

1.
$$a^{\frac{5}{7}}$$

2.
$$x^{-\frac{3}{2}}$$

3.
$$\frac{3}{x^{-\frac{4}{b}}}$$

1.
$$a^{\frac{5}{7}}$$
. 2. $x^{-\frac{3}{2}}$. 3. $\frac{3}{x^{-\frac{4}{5}}}$. 4. $x^{-\frac{2}{5}} \times 3a^{-\frac{1}{2}}$.

5.
$$8m^{-2} \times m^{-\frac{2}{3}}$$
 6. $x^{-\frac{4}{5}} + \hat{3}a^{-\frac{5}{4}}$ 7. $x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

6.
$$x^{-\frac{4}{5}} + 3a^{-\frac{5}{4}}$$

7.
$$x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$$

8.
$$\sqrt[5]{x^2} + \sqrt[5]{x^{-a}}$$
.

9.
$${}^{2}m/a^{-5} \times {}^{m}\sqrt{a^{8}}$$
.

8.
$$\sqrt[5]{x^2 + \sqrt[5]{x^{-a}}}$$
. 9. $\sqrt[2m]{a^{-5}} \times \sqrt[m]{a^8}$. 10. $\sqrt[4a]{x^6 + 2a\sqrt{x^{-5}}}$.

মূলচিহ্ন, বা ঋণাত্মক স্বচকবিশিষ্ট আকার বর্জন করিয়া, নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে প্রকাশ কর:

11.
$$(\sqrt[3]{x})^7$$

11.
$$(\sqrt[3]{x})^7$$
. 12. $(\sqrt[4]{a})^{-6}$. 13. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}^{-2}}$.

14.
$$\frac{1}{(5/a)^{-2}}$$

14.
$$\frac{1}{(\frac{5}{4}a)^{-2}}$$
 15. $\sqrt[3]{x^{\frac{3}{4}}} + (\sqrt[6]{x})^{-1}$ **16.** $\sqrt[4]{a^{-3}} + (\sqrt[8]{a})^{-1}$

$$\sqrt[4]{a^{-3}} \div (\sqrt[8]{a})^{-1}$$

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর:

17.
$$4^{-\frac{3}{2}}$$
.

18.
$$8^{\frac{2}{3}}$$
. **19.** $9^{\frac{3}{2}}$. **20.** $16^{\frac{5}{4}}$.

21.
$$81_{4}^{-\frac{3}{4}}$$
.

22.
$$\frac{1}{2}$$

23.
$$(125)^{-\frac{2}{3}}$$
.

21.
$$81_{\cdot}^{-\frac{3}{4}}$$
. **22.** $6^{\frac{1}{-2}}$. **23.** $(125)^{-\frac{2}{3}}$. **24.** $(\frac{1}{27})^{-\frac{4}{3}}$.

25.
$$(\frac{1}{218})^{-\frac{2}{3}}$$
.

25.
$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{10}\right)^{-\frac{2}{3}}$$
. 26. স্বল কর: $\frac{x^{m+2}nx^{3m-8n}}{x^{5m-6n}}$.

[কলি: প্রবেশিকা, 1874.]

- ু 191. প্রমাণ করিতে হইবে যে, ៣ এবং ৫ এর যে কোন মানের জন্মই, $(a^m)^n = a^{mn}$ হইবে।
- (i) ধর, n একটি অথও ধনরাশি। তাহা হইলে, m যে কোন রাশিই হউক না কেন, সকল কেত্ৰেই

ে
$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times \dots n$$
-সংখ্যক উৎপাদক পৰ্য্যস্ত $=a^{m+m+m+\dots}$ ্ন-সংখ্যক পদ পৰ্য্যস্ত $=a^{mn}$

(ii) ধর, n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ, যাহা $rac{p}{q}$ এর সমান ; এবং p ও q এর প্রত্যেকটি একটি অথগু ধনরাশি। তাহা হইলে,

$$\left(a^{m}\right)^{n}=\left(a^{m}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(a^{m}\right)^{p}}$$
 [নিয়ম 190, (i)]
$$=\sqrt[q]{a^{mp}}$$
 [(i) হইতে]
$$=a^{\frac{mp}{q}}=a^{mn}.$$
 [নিয়ম 190, (i)]

(iii) ধর, n একটি ঋণাত্মক রাশি, যাহা -p এর সমান ; এবং p একটি ধনাত্মক রাশি। তাহা হইলে,

$$(a^m)^n = (a^m)^{-p} = \frac{1}{(a^m)^p}$$

$$= \frac{1}{a^{mp}}$$

$$= a^{-mp}$$

$$= a^{m(-p)} = a^{mn}$$
[Aয়ম 190, (iii)]
[Aয়ম 190, (iii)]

স্বতরাং, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

192. n যে কোন রাশিই হউক না কেন, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $a^nb^n=(ab)^n$.

(i) ধর, n একটি অথণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে, $a^nb^n=(a.a.a. \dots n-\pi; v)$ ক উৎপাদক পর্যাস্ত) , $\times (b.b.b. \dots n-\pi; v)$ ক উৎপাদক পর্যাস্ত) $=(ab.ab.ab. \dots n^2\pi; v)$ ক উৎপাদক পর্যাস্ত) $=(ab)^n.$

(ii) ধর, n একটি ধনাত্মক ভগ্নাংশ, যাহা $\frac{p}{q}$ এর সমান ; এবং p ও q এর প্রত্যেকে একটি অথণ্ড ধনরাশি। তাহা হইলে, a^nb^n এর পরিবর্ত্তে x বসাইয়া,

$$x=a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}$$
; $x^q=\left(a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}\right)^q$

$$=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\times\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q$$

$$=a^p\times b^p$$

$$=(ab)^p;$$

$$x=\left(ab\right)^{\frac{p}{q}}$$
; সূতরাং $a^nb^n=(ab)^n$.

(iii) ধর, n একটি ঋণাত্মক রাশি, যাহা -p এর সমান, এবং p একটি ধনাত্মক রাশি। তাহা হইলে,

$$a^nb^n = a^{-p}b^{-p}$$
 $= \frac{1}{a^pb^p}$
 $= \frac{1}{(ab)^p}$
 $= (ab)^{-p}$
 $= (ab)^n$
 $= (ab)^n$
[নিয়ম 190, (iii)]

অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

EXAMPLE 1.
$$\frac{a^n}{b^n} = a^n b^{-n} = a^n \left(b^{-1}\right)^n = \left(ab^{-1}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$
.

অমুসি. 2.
$$a^nb^nc^n = (ab)^nc^n = (abc)^n$$
;
সাধারণভাবে, $a^nb^nc^nd^n = (abcd \cdots)^n$.

193. পূৰ্ৰবৰ্ত্তী নিয়ম চুইটিতে প্ৰতিপন্ন প্ৰতিজ্ঞা- . বয়ের প্ৰয়োগঃ

উদা. 1. সরল কর:
$$(a^8b^{\frac{5}{8}})^{-\frac{3}{4}}$$
.

$$(a^{8}b^{\frac{5}{3}})^{-\frac{3}{4}} = (a^{8})^{-\frac{3}{4}} \times (b^{\frac{5}{3}})^{-\frac{3}{4}}$$
$$= a^{8 \times (-\frac{3}{4})} \times b^{\frac{5}{3} \times (-\frac{3}{4})} = a^{-\frac{6}{3}}b^{-\frac{5}{4}}a$$

উপা. 2. সরল কর: $\sqrt{a^{-2}b} \times \sqrt[3]{ab^{-3}}$.

$$\sqrt{a^{-2}b} = (a^{-2}b)^{\frac{1}{2}} = (a^{-2})^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = a^{-1}b^{\frac{1}{2}};$$

eq:
$$\sqrt[3]{ab^{-3}} = (ab^{-3})^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{3}} \times (b^{-3})^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{8}}b^{-1}$$
.

মতবাং, প্রদত্ত বাশি =
$$a^{-1}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}}b^{-1}$$

= $a^{-1+\frac{1}{8}} \times b^{\frac{1}{2}-1} = a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$.

উদা. 3. সরল কর:
$$\sqrt{a^3b^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{7}{6}}} + \sqrt[3]{a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}}$$
.

$$\sqrt{a^3 b^{-\frac{2}{3}} c^{-\frac{7}{6}}} = \left(a^3 b^{-\frac{2}{3}} c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(a^3\right)^{\frac{1}{2}} \left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{7}{12}};$$

$$\begin{array}{ll}
\text{QRP,} & \sqrt[3]{a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}} = \left(a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(a^4\right)^{\frac{1}{3}} \left(b^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{13}}.
\end{array}$$

মৃত্যাং, প্রান্ত বাশি =
$$a^{\frac{3}{8}}b^{-\frac{1}{9}}c^{-\frac{7}{12}} + a^{\frac{4}{9}}b^{-\frac{1}{9}}c^{\frac{5}{12}}$$

$$= a^{\frac{3}{9}}b^{-\frac{1}{9}}c^{-\frac{7}{12}} \times a^{-\frac{4}{9}}b^{\frac{1}{9}}c^{-\frac{5}{12}}$$

$$= a^{\frac{3}{2} - \frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12} - \frac{5}{12}}$$

$$= a^{\frac{1}{9}}b^{0}c^{-1} = a^{\frac{1}{9}}c^{-1}.$$

প্রথমালা 103

সরল কর :

1.
$$\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{8}$$
.

2.
$$\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{4}}$$
.

3.
$$\left(d^{-\frac{1}{2}}b^{-3}\right)^{-2}$$
.

4.
$$(a^6b^{\frac{5}{4}})^{-\frac{4}{3}}$$
.

5.
$$(\sqrt[3]{a^4b^3})^6$$

5.
$$(\sqrt[3]{a^4b^3})^6$$
. 6. $(\sqrt[6]{x^9y^{-8}})^{-3}$.

7.
$$\sqrt[8]{x^2} \sqrt[4]{x^{-3}}$$
.

8.
$$\sqrt{a^{-3}b^4} \times \sqrt[4]{a^2b^{-8}}$$
.

9.
$$\sqrt[4]{x^{-2}\sqrt{y^5}} \times \sqrt{x^4\sqrt{y^3}}$$
.

10.
$$(8x^3 + 27a^{-3})^{\frac{2}{3}}$$
.

11.
$$(64x^3 + 27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}$$

11.
$$(64x^3 + 27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}$$
, 12. $\sqrt[3]{a^6b^{\frac{1}{2}}c^{-4}} \times \sqrt[4]{a^{-6}b^4c^8}$.

13.
$$\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}b^4c^{-\frac{1}{8}}} + \sqrt[8]{a^2b^4c^{-1}}$$
.

14.
$$\sqrt{ab^{-2}c^3} + (\sqrt[3]{a^3b^2c^{-3}})^{-1}$$
, **15.** $\left(\frac{a^{-1}b^2}{a^2b^{-4}}\right)^7 + \left(\frac{a^3b^{-5}}{a^{-2}b^3}\right)^{-5}$.

15.
$$\left(\frac{a^{-1}b^2}{a^2b^{-4}}\right)^7 + \left(\frac{a^3b^{-5}}{a^{-2}b^3}\right)^{-5}$$

194. বিবিধ্ব উদাহরণমালা:

উদা. 1. $a+b+c+3a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{2}{8}}+3a^{\frac{2}{8}}b^{\frac{1}{8}}$ কে $a^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{8}}+c^{\frac{1}{8}}$ দারা ভাগ কর। ভাজ্য ও ভাজকের প্রত্যেককে a এর অধ্যক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাউক:

$$a^{\frac{1}{3}} + (b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}) \underbrace{) a + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + (b+c) \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}(2b^{\frac{1}{3}} - c^{\frac{1}{3}}) + (b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}) \right)}_{a + a^{\frac{2}{3}}(b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{3}}) + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + (b+c) + c} \underbrace{a^{\frac{2}{3}}(2b^{\frac{1}{3}} - c^{\frac{1}{3}}) + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} + (b+c)}_{a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}) + (b+c)} \underbrace{a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}) + (b+c)}_{a^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}) + (b+c)}$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল = $a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}$.

টীকা। গুণনে কিম্বা ভাগে, এতৎসংশ্লিষ্ট রাশিগুলির প্রত্যেককে উহাদের অন্তর্গত যে কোন একট্ট অক্ষরের উদ্ধ্যুমিক বা অধ্যক্রমিক শক্তি অম্পুসারে সাজাইয়া, প্রক্রিয়া আরম্ভ করার পদ্ধতি উপেক্ষার বিষয় নহে। এই প্রকারে সাজান, প্রত্যেক ক্ষেত্রে অপরিহার্য্য না হইলেও, এইরূপ করিলে প্রক্রিয়াটি পরিচ্ছন্মভাবে, সম্পন্ন করা বায়।

উদা. 2. $x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}$ কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}$ হারা ভাগ কর। $x^{\frac{1}{3}}$ এর পরিবর্ত্তে a, $y^{\frac{1}{6}}$ এর পরিবর্ত্তে b এবং $z^{\frac{1}{9}}$ এর পরিবর্ত্তে c বসাইয়া, $x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}$ $=a^3+b^3+c^3-3abc$ $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ $=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}})\{(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{6}})^2-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{3}}\}$ $=(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}})(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{3}})$.

ম্তরাং, নির্দেষ ভাগফল
$$= x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{2}{9}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{8}} - y^{\frac{1}{8}}z^{\frac{1}{9}} - z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}$$

$$= x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}(y^{\frac{1}{8}} + z^{\frac{1}{9}}) + (y^{\frac{1}{9}} - y^{\frac{1}{8}}z^{\frac{1}{9}} + z^{\frac{2}{9}}).$$

উদা. 3. $x^{2^{n}} + a^{2^{n-1}} x^{2^{n-1}} + a^{2^{n}}$ কে $x^{2^{n-1}} - a^{2^{n-2}} x^{2^{n-2}} + a^{2^{n-1}}$ ছারা ভাগ কর।

ধ্ব,
$$m = x^2$$
 এবং $p = a^{2^{n-2}}$.

অতএব, $m^2 = (x^2^{n-2})^2 = x^{2 \times 2^{n-2}} = x^{2^{n-1}}$,

এবং $m^4 = (m^2)^2 = (x^2^{n-1})^2 = x^{2 \times 2^{n-1}} = x^2^n$.

এইরপ, $p^2 = a^2^{n-1}$ এবং $p^4 = a^2^n$.

অতবাং, $\frac{x^2^n + a^2^{n-1}}{x^2^{n-1} - a^2^{n-2}} \frac{x^2^{n-1} + a^2^n}{x^2^{n-2} + a^2^{n-1}}$

$$= \frac{m^4 + p^2 m^2 + p^4}{m^2 - pm + p^2} = \frac{(m^2 + p^2)^2 - p^2 m^2}{m^2 - pm + p^2}$$

$$= \frac{(m^2 + p^2 + pm)(m^2 + p^2 - pm)}{m^2 - pm + p^2}$$

$$= m^2 + pm + p^2$$

$$= x^2^{n-1} + a^2^{n-2} x^2^{n-2} + a^2^{n-1}$$

উদা. 4. $a^2+2b^2+(a+2b)\sqrt{ab}$ 'এবং $a^2-b^2+(a-b)\sqrt{ab}$ এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম বাশি =
$$a^2 + a\sqrt{ab} + 2b\sqrt{ab} + 2b^2 = a^2 + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + 2b^2$$

$$= a^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) + 2b^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{3}{2}} + 2b^{\frac{3}{2}}).$$
বিভীয় বাশি = $a^2 + a\sqrt{ab} - b\sqrt{ab} - b^2 = a^2 + a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} - b^2$

$$= a^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) - b^{\frac{3}{2}}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}) = (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}).$$

স্কৃতরাং, যেহেতু $a^{\frac{3}{2}} + 2b^{\frac{3}{2}}$ এবং $a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}$ এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই ; স্কৃতএব, নির্ণেয় গৃ. সা. গু. $= a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

উদা. 5. সরল কর:
$$\frac{x+(xy^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2y)^{\frac{1}{3}}}{x+y}$$
.

প্ৰদেশ্ত লব =
$$x + x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})$$
;
এবং প্ৰদেশ্ত হর = $(x^{\frac{1}{3}})^3 + (y^{\frac{1}{3}})^3 = (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})\{(x^{\frac{1}{3}})^2 - (x^{\frac{1}{3}})(y^{\frac{1}{3}}) + (y^{\frac{1}{3}})^2\}$

$$= (x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}).$$

অতএব, প্রদর্ভ রাশি = $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}$.

উদা. 6. দেখাও যে,

$$\frac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}} \div \frac{1}{1+x^{n-m}+x^{n-p}} + \frac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}} = 1.$$

$$\text{ANR} = \frac{x^{-m}}{x^{-m}(1+x^{m-n}+x^{m-p})} = \frac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}};$$

দ্বিতীয় পদ =
$$\frac{x^{-n}}{x^{-n}(1+x^{n-m}+x^{n-p})} = \frac{x^{-n}}{x^{-n}+x^{-m}+x^{-p}}$$
;

এবং তৃতীয় পদ =
$$\frac{x^{-p}}{x^{-p}(1+x^{p-m}+x^{p-n})} = \frac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-m}+x^{-n}}$$
 •

অতএক, প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{x^{-m}}{x^{-m} + x^{-n} + x^{-p}} + \frac{x^{-n}}{x^{-n} + x^{-m} + x^{-p}} + \frac{x^{-p}}{x^{-p} + x^{-m} + x^{-n}}$$

$$= \frac{x^{-m} + x^{-n} + x^{-p}}{x^{-m} + x^{-n} + x^{-p}} = 1.$$

উদা. 7. $a^{-x}(a^x+b^{-x})=\frac{a^2b^2+1}{a^2b^2}$ স্মীকরণটি সমাধান কর।

সমীকরণটির উভয় পক্ষকে সরল করিয়া,

$$a^{-x}.a^{x}+a^{-x}.b^{-x}=1+\frac{1}{a^{2}b^{2}};$$

অথবা,
$$1 + (ab)^{-x} = 1 + a^{-2}b^{-2} = 1 + (ab)^{-2}$$
.

মতরাং,
$$(ab)^{-x} = (ab)^{-2}$$
; ... $x = 2$.

উদা. ৪. সহ-সমীকরণ তুইটি সমাধান কর:

$$a^{x}.a^{y+1}=a^{7}$$
 ... (1) a^{2} ... a^{3} ... a^{3} ... (2) a^{3} ... (2)

প্রথম সমীকরণ হইতে, $a^{x+(y+1)}=a^7$;

$$x+y+1=7. \qquad \cdots \qquad (3)$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে, $a^{2y+(3x+5)}=a^{20}$;

$$\therefore$$
 2y + 3x + 5 = 20. ... (4)

এখন, (3) এবং (4) হইতে,
$$x+y-6=0$$

এবং $3x+2y-15=0$

অতএব, বজ্রগুণন প্রণালী অমুসারে,

$$\frac{x}{-15+12} = \frac{y}{-18+15} = \frac{1}{2-3},$$
 অথবা,
$$\frac{x \cdot -y}{-3} = -1.$$
 স্থতরাং, $x=3$ এবং $y=3$.

উদা. 9. $a^b=b^a$ হইলে, দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^b=a^{b-1}$; অধিকন্ত, a=2b হইলে, দেখাও যে, b=2.

যেহেতু, $a^b=b^a$, ... $a=b^{\frac{a}{b}}$ [উভয়পক্ষের b-তম মূল নির্ণয় করিয়া]

জত্এব,
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}} = \frac{a^{\frac{a}{b}}}{a} = a^{\frac{a}{b}-1}.$$

আবার, থেছৈতু, $a^b = b^a$,

অতএব,
$$a=2b$$
 হইলে, $(2b)^b=(b)^{2\,b}=(b^{2\,b}$; ... $2b=b^2$; ... $b=2$.

উদা. 10. $x = (a + \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}} + (a - \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3 + 3bx - 2a = 0$.

$$a+\sqrt{a^2+b^3}$$
 এর পরিবর্ত্তে m এবং $a-\sqrt{a^2+b^3}$ এর পরিবর্ত্তে n বসাইছল,
$$x^3=\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(n^{\frac{1}{3}}\right)^3+3m^{\frac{1}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)^{\bullet}$$

$$=m+n+3\left(mn\right)^{\frac{1}{3}}.\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)=m+n+3\left(mn\right)^{\frac{1}{3}}.x.$$

কিন্ত,
$$m+n=2a$$
;
এবং $(mn)^{\frac{1}{3}}=\{a^2-(a^2+b^3)\}^{\frac{1}{3}}=(-b^3)^{\frac{1}{3}}=-b$;
 $x^3=2a-3bx$, $x^3+3bx-2a=0$.

প্রশ্নালা 104

গুণ কর:

1.
$$x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + 1$$
 কে $x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 1$ ছারা।

2.
$$a^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{2}{3}}$$
 ($a^{\frac{1}{3}} - 3b^{\frac{1}{3}}$ and)

4.
$$x+2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{3}}$$
 কে $x-2y^{\frac{1}{2}}+3z^{\frac{1}{3}}$ হারাণ

5.
$$x^{-1} + x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}$$
 কে $x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + y^{-1}$ হারা।

6.
$$a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1 - a^{-\frac{1}{3}} + a^{-\frac{2}{3}}$$
 কে $a^{\frac{1}{3}} + 1 + a^{-\frac{1}{3}}$ দারা।

7.
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} - z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$$
 ($x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}$)

8.
$$a^m + 3b^n - 2c^p$$
 কে $a^m - 3b^n + 2c^p$ বারা।

9.
$$a^{\frac{5}{3}} + 8ab + 4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}} + 2a^2b^{\frac{1}{3}} + 32b^{\frac{5}{3}} + 16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}$$
 (क $a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{3}}$ जोता।

10.
$$a^{\frac{5}{8}} + a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{3}{8}} + x^{-\frac{5}{8}} + a^{\frac{3}{8}}x^{-\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{8}}$$
 (Φ

$$a^{\frac{3}{8}} + a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{2}{8}} - a^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{8}}$$
 Ξ

ু ভাগ কর:

11.
$$x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 6x - x^2$$
 কে $x^{\frac{3}{2}} + 2 - 4x^{\frac{1}{2}}$ হারা।

12.
$$8+12x^{-1}+2x^{-1}+2x^{-1}+3+2x^{-1}+x^{-1}y^{-1}+x^{-1}y^{-1}+x^{-1}y^{-1}+x^{-1}y^{-1}$$
13. $xy^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+3+2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-1}y^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+y^{-1}$

13.
$$a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{3}{2}}b + ab^{\frac{3}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}}b^2 + b^{\frac{5}{2}}$$
 কে $a^{\frac{3}{2}} - ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b - b^{\frac{3}{2}}$ হারা।

14.
$$a^{-} - a^{-}b + ttb$$
 20 2 15. $8x^{-n} - 8x^n + 5x^{3n} - 3x^{-3n}$ ($5x^n - 3x^{-n}$) $5x^n - 3x^{-n}$

16.
$$8x^{\frac{3}{2}} + y^{-\frac{3}{2}} - z + 6x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}$$
 কে $2x^{\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{3}}$ দাবা।

17. দেখাও যে,
$$x^3 + a^3 + x^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}$$
, $x^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{3}{8}}$ ছারা বিভাজ্য।

18. শুণ করঃ
$$x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}}$$
 কে $x^{2^{n-1}}$ বারা।

19. ভাগ কর:
$$x^2 - y^2$$
 কে $x^2^{n-1} + y^2$ দারা। [কলিঃ, 1879.]

20. সরল কর:
$$\{(a^m)^{m-1}\}_{m+1}^{\bullet 1}$$

21. ভাগ কর :
$$2x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{\frac{3}{4}} - 7x^{\frac{1}{4}} + x - 2x^{\frac{1}{2}}$$
 কে $x^{\frac{1}{4}} - 2x^{-\frac{1}{4}}$ দারা

22.
$$x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{2}}$$
 এর বর্গ নির্ণয় কর।

23. ভাগ কর:
$$x^{\frac{3n}{2}} - a^{\frac{3n}{2}}$$
 কে $x^{\frac{n}{2}} - a^{\frac{n}{2}}$ ছারা।

24.
$$x^{\frac{1}{8}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{8}}$$
 এর বর্গ নির্ণয় কর।

25. ভাগ করঃ
$$ax^{-1} + a^{-1}x + 2$$
 কে $a^{\frac{1}{8}}x^{-\frac{1}{8}} + a^{-\frac{1}{8}}x^{\frac{1}{8}} - 1$ দারা। সরল করঃ

26.
$$\frac{a-b}{\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$$
 27.
$$\frac{x^{\frac{1}{3}}+3y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-3y^{\frac{1}{3}}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+9y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+9y^{\frac{2}{3}}}$$

28.
$$a^{\frac{3^{\bullet}}{2}} - ax^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x - x^{\frac{3}{2}}$$
$$a^{\frac{5}{2}} - a^{2}x^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{3}{2}}x - 3ax^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{1}{2}}x^{2} - x^{\frac{5}{2}}$$

29.
$$\frac{a^2 + b^2 - a^{-2} - b^{-2}}{a^2 b^2 - a^{-2} b^{-2}} + \frac{(a - a^{-1})(b - b^{-1})}{ab + a^{-1} b^{-1}}.$$

30.
$$\frac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}$$

31.
$$(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})-a^{-1}b^{-1}c^{-1}(b+c)(c+a)(a+b)$$
.

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর:

32.
$$2^{x+7} = 4^{x+2}$$
.

33.
$$(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2} x^{x+5}$$

34.
$$(\sqrt[5]{4})^{4x+7} = (\sqrt[14]{64})^{2x+7}$$
.

34.
$$(\sqrt[5]{4})^{4x+7} = (\sqrt[14]{64})^{2x+7}$$
. **35.** $(\sqrt[3]{25})^{2x+1} = (\sqrt[5]{125})^{x+6}$.

36.
$$2^{3x-1} = 4^{y-1}$$

 $3x - y = 1$

38.
$$4^{3y-1} = 16^{x+y}$$

 $3^{x+3y} = 9^{2x+3}$

37.
$$9^{2x-3} = (\sqrt{3})^{2y-x}$$

 $2^{3x} = 4^y$

39.
$$2^{x+y+z} = 8^{x+z-y}$$

 $5^{3y+2} = 25^{x+z}$
 $3^{2x+2}z+y = 9^{3x+y}$

40.
$$(\sqrt{a})^{x+y} = (\sqrt[3]{a})^{y+z-1}$$

 $(\sqrt[3]{b})^{x+z-2} = (\sqrt[5]{b})^{y+z}$
 $(\sqrt[4]{c})^y$ $J = (\sqrt[7]{c})^{x+y+1}$

ভ্ৰিংশ অপ্যায় • মূলাকৰ্ষণ-প্ৰক্ৰিয়া (Evolution) ; বৰ্গমূল ও ঘনমূল (Square and Cube roots) নিৰ্ণয়

195. মূলাকর্ম্প (Evolution : কোন সংখ্যার "মূল" নির্ণয় করার প্রণালীকে **"মূলা কর্মণ"-প্রক্রিয়া** বলে।

অতএব, ইহা, **"শক্তি-উন্নয়ন"-প্রক্রিয়া** (Involution)এর, [অর্থাৎ, যে প্রক্রিয়া দারা কোন সংখ্যাকে কোন নির্দিপ্ত শক্তিতে উন্নীত করা হয়, তাহার] ঠিক বিপরীত।

196. বীজ্পাণিভীয় মিপ্রবাশির মূল নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়ম: প্রবর্ণত হত্তগুলি হইতে, অতি সহজেই, নিয়লিখিত সিদ্ধান্তসমূহে উপনীত হওয়া যায়: যথা,

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b$$
;
 $(a+b+c)^2 = a^2 + (2a+b)b + (2a+2b+c)c$;

 $(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c+(2a+2b+2c+d)d$; ইত্যাদি, ইত্যাদি ।

অতএব, পরিষ্কারদ্রপে বুঝা যাইতেছে যে,

$$(ax^2 + bx + c)^2 = a^2x^4 + (2ax^2 + bx)bx + (2ax^2 + 2bx + c)c$$

$$= a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2;$$
[x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া]

এক্ষণে, এই শেষোক্ত রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, কি উপায় অবলম্বন করিয়া নির্ণেয় বর্গমূলের বিভিন্ন পদগুলি ক্রমশঃ পাওয়া যায়, তাহা আলোচনা করা যাউকঃ

বর্গমূলের প্রথম পদ, অর্থাৎ ax^2 , স্পৃষ্টতঃ, প্রদত্ত রাশির প্রথম পদ a^2x^4 এর বর্গমূল।

প্রদন্ত রাশি হইতে a^2x^4 বিয়োগ করিয়া, অবশিষ্ট $\{(2ax^2+bx)bx+(2ax^2+2bx+c)c\}$ পাওয়া যাইতেছে; ইহাতে, x এর সর্কোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=2ax^2\times bx$, অর্থাৎ, = বৈর্গমূলের প্রথম পদের দিগুণ) \times (বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ)। অতএব, ইহা হইতে দেখা যায় যে, বর্গমূলের প্রথম পদ নির্ণীত হওয়ার পর, উহার দ্বিতীয় পদও নির্ণিয় করিতে পারা যায়।

এখন, উপরোক্ত অবশিষ্ট হইতে $(2ax^2+bx)\times bx$ বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল, স্পষ্টই, $(2ax^2+2bx+c)c$ হয় ; ইহাতে, x এর সর্কোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=2ax^2\times c$, অর্থাৎ, = (বর্গমূলের প্রথম পদের দিগুণ) \times (বর্গমূলের তৃতীয় পদ) । কাজেই দেখা যাইতেছে যে, বর্গমূলের প্রথম পদ ও দিতীয় পদ নির্ণয় করিবার পর, উহার তৃতীয় পদও নিরূপণ করা যাইতে পারে।

ষ্পতএব দেখা যায় যে, $ax^2 + bx + c$ এর বর্গ দেওয়া থাকিলে, উক্ত রাশিমালার বিভিন্ন পদগুলিকে, ঐ বর্গের অন্তর্গত পদসমূহ হইতে, ক্রমশঃ নির্ণয় করিবার একটি উপায় নির্দারিত হইল।

প্রক্রিয়াটি নিমপ্রদর্শিতরূপে সম্পন্ন করা যায় :

$$\begin{array}{c} \bullet \ a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2 \left(\ ax^2 + bx + c \right) \\ \underline{a^2x^4} \\ \hline 2ax^2 + bx \\ \bullet \\ \underline{2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2} \\ \underline{2abx^3 + b^2x^2} \\ \hline 2ax^2 + 2bx + c \\ \underline{2acx^2 + 2bcx + c^2} \\ \underline{2acx^2 + 2bcx + c^2} \end{array}$$

- (1) প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের, অর্থাৎ a^2x^4 এর, বর্গমূল বাহির করিয়া, উহাকে নির্নেয বর্গমূলের **প্রথম পূদ্**রূপে লি $\stackrel{\checkmark}{}$;
- (2) প্রদত্ত রাশি হইতে a^2x^4 বাদ দিয়া, অবশিষ্ট $2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2$ নামাও;
- (3) বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ, অর্থাৎ $2ax^2$ কে এই অবশিষ্টের বামদিকে, \bullet উহার ভাজকের একটি পদরূপে স্থাপন কর : .

- (4) এখন, উপরোক্ত অবশিষ্টের প্রথম পদ $2abx^3$ কে বর্গমূলের প্রথম পদ ax^2 এর দিগুণ (অর্থাৎ, $2ax^2$) দারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফল bx কে নির্নেয় বর্গমূলের দ্বিতীয় পদক্ষপে, এবং উল্লিখিত ভাজকেরও দ্বিতীয় পদক্ষপে, লিখ;
- (5) বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ (অর্থাৎ, bx) দারা ভাজক, অর্থাৎ $2ax^2 + bx$ কে গুণ করিয়া, গুণফলটিকে প্রথম অবশিষ্ঠ (অর্থাৎ, উপরোল্লিখিত অবশিষ্ঠ) হইতে বিয়োগ কর:
- (6) এই দ্বিতীয় অবশিষ্টকে নামাইয়া, উহার বামে, বর্গমূলের নির্ণীত অংশের (অর্থাৎ, ax^2+bx এর) দ্বিগুণকে (নৃতন) একটি ভাজকের অংশরূপে লিখিয়া রাখ ;
- (7) উল্লিখিত দিতীয় অবশিষ্টের প্রথম পদ $2acx^2$ কে, উপরোক্ত নৃতন ভাজকের প্রথম পদ $2ax^2$ দারা ভাগ করিয়া, লব্ধ ভাগফল c কে নির্ণেয় বর্গমূলের ভৃতীয় পদরূপে, এবং নৃতন ভাজকেরও তৃতীয় পদরূপে, লিথ;
- (8) এখন, এই সম্পূর্ণ নৃতন ভাজককে (অর্থাৎ, $2ax^2 + 2bx + c$ কে) বর্গমূলের তৃতীয় পদ c দারা গুণ করিয়া, গুণফলটিকে দ্বিতীয় অবশিষ্ট হইতে.বিয়োগ কর।

এক্ষণে, অবশিষ্ট আর কিছুই রহিল না। অতএব, ax^2+bx+c ই নির্ণেয় বর্গমূল হইল।

টীকা। উপরোক্ত প্রক্রিয়াতে, প্রদন্ত রাশিটি x এর অধ্যক্রমিক শক্তি অন্প্রসারেই সাজান ছিল। তজপ, যে কোন রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে, প্রক্রিয়া আরম্ভ করিবার পূর্বের, উহার পদগুলিকে উহার অন্তর্গত যে কোন একই অক্ষরের অধ্যক্রমিক বা উদ্ধক্রমিক শক্তি অন্প্রসারে সাজাইয়া লইতে হইবে।

উদা. 1. নিমুলিখিত রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় কর:

$$x^{6} + 8x^{4} - 2x^{3} + 16x^{2} - 8x + 1.$$

$$x^{6} + 8x^{4} - 2x^{3} + 16x^{2} - 8x + 1 \quad (x^{3} + 4x - 1)$$

$$2x^{3} + 4x \quad 8x^{4} - 2x^{3} + 16x^{2} - 8x + 1$$

$$8x^{4} \quad + 16x^{2}$$

$$2x^{3} + 8x - 1 \quad -2x^{3} \quad -8x + 1$$

$$-2x^{3} \quad -8x + 1$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল = $x^3 + 4x - 1$.

উদা. 2.
$$x^4 + 2(y+z)x^3 + (3y^2 + 2yz + 3z^2)x^2 + 2(y^3 + y^2z + yz^2 + z^3)x^2 + y^4 + 2y^2z^2 + z^4$$
 এর বর্গমূল নির্ণয় কর। - [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]

প্রদিত রাশিমালা =
$$x^4 + 2(y+z)x^3 + (3y^2 + 2yz + 3z^2)x^2 + 2(y+z)(y^2 + z^2)x + (y^2 + z^2)^2$$
 ;

বেহেতু, রাশিমালাটি x এর অধ্যক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজান রহিয়াছে, অতএব, অবিলম্বে প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাইতে পারেঃ

$$\begin{array}{c} +2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2\left(\begin{array}{c} x^2+(y+z)x\\ x^4+2(y+z)x^3+(3y^2+2yz+3z^2)x^2\\ \end{array}\right) +(y^2+z^2)\\ \frac{x^4}{2x^2+(y+z)x} \\ \underline{) \ 2(y+z)x^3+(3y^2+2yz+3z^2)x^2}\\ 2(y+z)x^3+(y^2+2yz+z^2)x^2\\ 2x^2+2(y+z)x\\ +(y^2+z^2) \\ \underline{) \ 2(y^2+z^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2}\\ +(y^2+z^2) \\ \underline{) \ 2(y^2+z^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2}\\ \\ \underline{) \ 2(y^2+z^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2}\\ \\ \underline{) \ 3(x^2+2x^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2}\\ \\ \underline{) \ 3(x^2+2x^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2}\\ \\ \underline{) \ 3(x^2+2x^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)x+(y^2+z^2)^2}\\ \\ \underline{) \ 3(x^2+2x^2)x^2+2(y+z)(y^2+z^2)x+(y^2$$

উদা. 3. নিম্মলিখিত বাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় কর:

$$\frac{x^4}{4} + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} + \frac{a^3}{9} - 2x^3 - \frac{4ax}{3}$$
. [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889.]

প্রদত্ত রাশিমালাকে x এর অধ্যক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করিতে হইবে : যথা,

$$\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2 + \frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9} \left(\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3} \right)$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2x^3 + 4x^2} - \frac{2x^3 + 4x^2}{2x^2 - 4x + \frac{a}{3}} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9}$$

$$\frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9}$$

$$\frac{ax^2}{3} - \frac{4ax}{3} + \frac{a^2}{9}$$
নির্ণেয় বর্গমূল = $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{a}{3}$.

উদা. 4.
$$\frac{x^4}{4y^4} + \frac{4y^4}{x^4} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{4y^2}{x^2} + 3$$
 এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদন্ত রাশিমালাকে x এর অধ্যক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে, উহার নিম্নলিখিত রূপ হইবে:

$$\frac{x^4}{4y^4} + \frac{x^2}{y^2} + 3 + \frac{4y^2}{x^2} + \frac{4y^4}{x^4} ;$$

$$\frac{x^{4}}{4y^{4}} + \frac{x^{2}}{y^{2}} + 3 + \frac{4y^{2}}{x^{2}} + \frac{4y^{4}}{x^{4}} \left(\frac{x^{2}}{2y^{2}} + 1 + \frac{2y^{2}}{x^{2}}\right)$$

$$\frac{x^{4}}{4y^{4}}$$

$$\frac{x^{2}}{y^{2}} + 1 \right) \frac{x^{2}}{y^{2}} + 3$$

$$\frac{x^{2}}{y^{2}} + 1$$

$$\frac{x^{2}}{y^{2}} + 2 + \frac{2y^{2}}{x^{2}} \right) 2 + \frac{4y^{2}}{x^{2}} + \frac{4y^{4}}{x^{4}}$$

$$2 + \frac{4y^{2}}{x^{2}} + \frac{4y^{4}}{x^{4}}$$

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $= \frac{x^2}{2y^2} + 1 + \frac{2y^2}{x^2}$.

উপা. 5. $x^{\frac{6}{5}}-2a^{\frac{-3}{5}}x^{\frac{1}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{6}{5}}$, এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1880.],

রাশিমালাকে x এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাউক:

$$a^{-\frac{6}{5}x^{\frac{14}{5}}} - 2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}} + x^{\frac{8}{5}} - 2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}} + 2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}} + a^{\frac{8}{5}}(a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}} - x^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{4}{5}})$$

$$a^{-\frac{6}{5}x^{\frac{14}{5}}}$$

$$2a^{-\frac{3}{5}x^{\frac{7}{5}}} - x^{\frac{4}{5}}) - 2a^{-\frac{3}{5}x^{\frac{11}{5}}} + x^{\frac{8}{5}}$$

$$-2a^{-\frac{3}{5}x^{\frac{11}{5}}} + x^{\frac{8}{5}}$$

$$2a^{-\frac{3}{5}x^{\frac{7}{5}}} - 2x^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{4}{5}}) - 2a^{\frac{1}{5}x^{\frac{7}{5}}} + 2a^{\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}}} + a^{\frac{8}{5}}$$

$$-2a^{\frac{1}{5}x^{\frac{7}{5}}} + 2a^{\frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}}} + a^{\frac{8}{5}}$$

্ অত এব, ্নির্ণেয় বর্গমূল = $a^{-\frac{8}{5}}x^{\frac{7}{5}} - x^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{4}{5}}$.

প্রথমালা 105

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর:

1.
$$4x^2z^2 + 12xyz + 9y^2$$
. 2. $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$.

3.
$$x^6 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1$$
. **4.** $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 24x + 16$.

5.
$$4x^4 + 9ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$$
. [क्लि:, 1870.]

6.
$$9x^4 - 2x^3y + \frac{163}{9}x^2y^2 - 2xy^3 + 9y^4$$
. [কলি: প্রবেশিকা, 1874.]

7.
$$x^4 - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$$
. 8. $\frac{1051x^2}{25} - \frac{6x}{5} - \frac{14x^3}{5} + 49x^4 + 9$.

9.
$$x^4 + \frac{4}{x^2} - 2 + 4x - x^3 + \frac{x^2}{4}$$
 10. $a^2 + \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^4}{4} + \frac{a^3}{x} - 2 - ax$.

11.
$$\frac{{}^{4}a^{2}}{4b^{2}} - \frac{a}{b} + \frac{4b^{2}}{a^{2}} - 1 + \frac{4b}{a}$$
. **12.** $\frac{9a^{2}}{x^{2}} - \frac{6a}{5x} + \frac{101}{25} - \frac{4x}{15a} + \frac{4x^{2}}{9a^{2}}$.

13.
$$4x^4 - 8x^3y^2 + 4xy^4 + y^8$$
. **14.** $\frac{49x^2}{12} + \frac{y^2}{49x^2} - \frac{42x}{y} + \frac{6y}{7x} + 7$.

15.
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\frac{3}{4}$$
. **16.** $25\frac{3}{7} - \frac{20x}{7y} + \frac{9y^2}{16x^2} - \frac{15y}{2x} + \frac{4x^2}{49y^2}$

17.
$$x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 3x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1$$
. **18.** $x^{\frac{5}{3}} - 4x^{\frac{4}{3}} + 2x + 4x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$.

19.
$$a^2x^{-2} + 2ax^{-1} + a^{-2}x^2 + 3 + 2a^{-1}x$$

20.
$$x^{\frac{3}{2}} + xy^{-\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} + y$$
.

21.
$$\frac{9x^3}{4} - 5x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{1}{2}} + \frac{179x^2y}{45} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{4xy^2}{25}.$$

22.
$$a^{2m} - 4a^{m+n} + 4a^{2n}$$

23.
$$9a^{2m} + 6a^{3m+1} + 25c^{2m-4} - 30a^mc^{m-2} + a^{4m+2} - 10a^{2m+1}c^{m-2}$$
.

197. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, এই সূত্রবস্থের প্রস্থোপ-সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় :

উদা. 1.
$$4-4c+2b+c^2-bc+rac{h^2}{4}$$
 এর বর্গমূল নির্ণয় কর। `

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1876.]

b এর অধ্যক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইলে.

প্রদত্ত রাশিমালা =
$$\frac{b^2}{4} - b(c-2) + (c^2 - 4c + 4)$$

= $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left\{\frac{b}{2}(c-2)\right\} + (c-2)^2$
= $\left\{\frac{b}{2} - (c-2)\right\}^2 = \left(\frac{b}{2} - c + 2\right)^2$.

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{b}{2}-c+2$.

উদা. 2.
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 12$$
 এর বর্গমূল নির্ণয় কর। •

প্ৰদত্ত বাণি =
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 12$$

= $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4 = \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)^2$.

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল = $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$.

উপা. 3.
$$a^4 + b^4 - 2a^2 \overline{b^2} + 4 \frac{a}{a+b} \times \overline{a} - \overline{b}$$
 এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.]

প্রদত্ত রাশি =
$$\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2-b^2)^2} + \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2+4ab(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2}$$
;

এবং ইহার লব = $\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}+4ab(a^2-b^2)$

$$= (a^2-b^2)^2+4ab(a^2-b^2)+4a^2b^2$$

$$= \{(a^2-b^2)+2ab\}^2$$
;
$$\therefore$$
 প্রদত্ত রাশি = $\frac{(a^2+2ab-b^2)^2}{(a^2-b^2)^2}$.

অতএব, নিৰ্ণেয় বৰ্গমূল = $\frac{a^2 + 2ab - b^2}{a^2 - b^2}$.

উদা. 4. $(ab+ac+bc)^2-4abc(a+c)$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।
 . . [কলিঃ প্রবেশিকা, 1888.]
প্রান্ত রাশি = $\{b(a+c)+ac\}^2-4abc(a+c)$ $=b^2(a+c)^2+a^2c^2-2abc(a+c)$ $=\{b(a+c)-ac\}^2=(ab-ac+bc)^2$.

শৈতএব, নির্ণেয় বর্গমূল = ab - ac + bc.

উদা. 5. $a^4+b^4+c^4+d^4-2(a^2+c^2)(b^2+d^2)+2a^2c^2+2b^2d^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

a এর অধ্যক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া,

প্রদান
$$a^4 - 2a^2(b^2 + d^2 - c^2) + \{b^4 + c^4 + d^4 - 2c^2(b^2 + d^2) + 2b^2d^2\};$$

এবং, ধহুর্ববন্ধনীর (অর্থাৎ ⊱ } এর) অন্তর্গত রাশিমালাকে b এর অধঃক্রমিক শক্তি অমুসারে সাজাইলে,

উহা =
$$b^4 - 2b^2(c^2 - d^2) + (c^4 + d^4 - 2c^2d^2)$$
• $b^4 - 2b^2(c^2 - d^2) + (c^2 - d^2)^2 = \{b^2 - (c^2 - d^2)\}^2$.

সতরাং, প্রদন্ত রাশি = $a^4 - 2a^2(b^2 - c^2 + d^2) + (b^2 - c^2 + d^2)^2$
= $\{a^2 - (b^2 - c^2 + d^2)\}^2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$.

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল = $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$.

উদা. 6. $4\{(a^z-b^2)cd+ab(c^2-d^2)\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি

$$=4\{(a^2-b^2)^2c^2d^2+2abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+a^2b^2(c^2-d^2)^2\}\\+\{(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2-8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+16a^2b^2c^2d^2\}\\=\{4(a^2-b^2)^2c^2d^2+4a^2b^2(c^2-d^2)^2\}+\{(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2\\+16a^2b^2c^2d^2\}\\=\{a^2-b^2)^2\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}+4a^2b^2\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}\\=\{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2\}\{(c^2-d^2)^2+4c^2d^2\}\\=(a^4+2a^2b^2+b^4)(c^4+2c^2d^2+d^4)\\=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2.$$

·. প্রশালা 106

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের বর্গমূল নির্ণয় কর:

1.
$$25x^2y^2 - 40xy + 16$$
. 2. $49a^2x^4 - 42ab^2x^2 + 9b^4$.

3.
$$49a^6b^8 + 126a^5b^7 + 81a^8b^6$$
. 4. $\frac{1}{4}x^8y^4 - \frac{1}{5}x^7y^7 + \frac{1}{25}x^6y^{10}$.

5.
$$\frac{25a^2b^2}{4} + \frac{c^4}{9} - \frac{5abc}{3}$$
. 6. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

7.
$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

8.
$$4a^2 + b^2 + 9c^2 + 6bc - 12ac - 4ab$$
.

9.
$$a^4 + 4b^4 + 9c^4 + 4a^2b^2 - 6a^2c^2 - 12b^2c^2$$
.

10.
$$4a^4 + 9b^4 + 25c^4 - 12a^2b^2 + 20a^2c^2 - 30b^2c^2$$
.

11.
$$x^2 + \frac{a^2}{9} - bx + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{3} + \frac{2ax}{3}$$
. **12.** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

13.
$$x^4 + \frac{1}{x^4} + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3.$$
 14. $\frac{a_1^2}{b^2} + \frac{2a}{1} + \frac{2b}{a^4} + 3.$

15.
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \sqrt{2} + 2\frac{1}{2}$$
. 16. $\frac{9x^2}{a^2} + \frac{a^2}{9x^2} - 6\frac{x}{a} - \frac{2a}{3x} + 3$

17.
$$x^2 + \frac{1}{2} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6$$
. 18. $-2 + a^2 \sqrt{2} + a^{-2} \sqrt{2}$.

19.
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2a(b-c+d) - 2b(c-d)^{\bullet} - 2cd$$

20.
$$(a-b)^4 - 2(a^2+b^2)(a-b)^2 + 2(a^4+b^4)$$
.

21.
$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2a^2(b^2 + d^2) - 2b^2(c^2 - d^2) + 2c^2(a^2 - d^2)$$
.

22.
$$a^4 + 2a^3 - a + \frac{1}{4}$$
.

23.
$$2a^2(b+c)^2 + 2b^2(c+a)^2 + 2c^2(a+b)^2 + 4abc(a+b+c)$$
.

198. বীজগণিতীয় মিশ্ররাশির ঘনমূল নির্ণয় করিবার, সাধারণ নিয়ম:

স্পষ্টতঃ দেখা যায় যে,

$$(ax^{2} + bx + c)^{3} = (ax^{2} + bx)^{3} + 3(ax^{2} + bx)^{2}c + 3(ax^{2} + bx)c^{2} + c^{3}$$

$$= a^{2}x^{6} + 3(a^{2}x^{4})(bx) + 3(ax^{2})(bx)^{2} + (bx)^{3}$$

$$+ 3(ax^{2} + bx)^{2}c + 3(ax^{2} + bx)c^{2} + c^{3}.$$

ত্তত্ত্বৰ, উপরোক্ত রাশি হইতে উহার ঘনমূল (অর্থাৎ, $ax^2 + bx + c$) নির্ণয় করিতে হইলে, কি উপায় অবলম্বনে, ঐ ঘনমূলের পদসমূহ ক্রমশঃ পাওয়া যায়, তাহা দেখা যাউক :

্ ঘনমূলের প্রথম পদ, অর্থাৎ ax^2 , স্পষ্ঠই, প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের (অর্থাৎঁ, a^3x^6 এর) ঘুনমূল। প্রাদত্ত রাশি হইতে a^3x^6 বাদ দিলে, অবশিষ্টে x এর সর্ব্বোচ্চ-শক্তিবিশিষ্ট পদ = $3(a^2x^4)(bx)$, অর্থাৎ, $=3\times$ (ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গ) \times (ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ>; অতএব, ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ নির্ণয় করিবার উপায় নির্দ্ধারিত ইইল।

উপরোক্ত অবশিষ্ট হইতে $\{3(a^2x^4)+3(ax^2)(bx)+(bx)^2\}(bx)$ বাদ দিয়া, $3(ax^2+bx)^2c+3(ax^2+bx)c^2+c^3$ রাশিটি পাওয়া গেল। ইহাকে দ্বিতীয় অবশিষ্ট বলা যাউক। এখন, এই দ্বিতীয় অবশিষ্টে, x এর সর্কোচ্চশক্তিবিশিষ্ট পদ $=3a^2x^4c$, অর্থাৎ, $=3\times$ (ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গ) \times (ঘনমূলের তৃতীয় পদ)। অতএব, ঘনমূলের তৃতীয় পদ নির্ণয় করিবার উপায়ও নিরূপিত হইল।

উপরোক্ত দ্বিতীয় অবশিষ্ট ইইতে $\{3(ax^2+bx)^2+3(ax^2+bx)c+c^2\}c$ বিয়োগ করিলে, কিছুই অবশিষ্ট থাকে না।

অতএব, ax^2+bx+c কে নির্ণেয় ঘনমূলরূপে পাওয়া গেল।

নিমে একটি উদাহরণ দারা প্রক্রিয়া-প্রণালী ব্যাখ্যা করা ইইতেছে।

উদাহরণ। $x^6-6x^5y+24x^4y^2-56x^3y^3+96x^2y^4-96xy^5+64y^6$ এর ঘন্মূল নির্ণয় কর ঃ

যেহেতু, প্রদন্ত রাশিমালার পদসমূহ x এর অধ্যক্রমিক শক্তি অন্মুসারেই সাজান আছে, অতএব, ঐ পদগুলির ক্রম পরিবর্ত্তন করিবার কোন আবশ্রুকতা নাই।

ঘনমূলের প্রথম পদ = প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের ঘ্নমূল = x^{6} এর ঘনমূল = x^{2} .

তৎপরে, প্রদত্ত রাশির দ্বিতীয় পদ, $-6x^5y$ কে $3x^4$ (অর্থাৎ, ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গের তিন গুণ) দ্বারা ভাগ করিয়া, ঘনমূলের **দ্বিতীয় পদ** পাওয়া গেল (পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত প্রক্রিয়া দেখ]।

পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত প্রথালী অন্তুসারে, $3x^4-6x^3y+4x^2y^2$ ভাজকটি, তৈয়ারী করা হইল। এই ভাজকটিকে -2xy দারা গুণ করিয়া লব্ধ শুণফল, অর্থাৎ. $-6x^5y$ $+12x^4y^2-8x^3y^3$ কে ইহার উপরিভাগস্থিত রাশিমালা, হইতে বিয়োগ করা, হইল [প্রক্রিয়া দেশ্ল]; এবং অবশিষ্ঠকে রেথার নীচে লিথা হইল।

এখন, ঘনমূদের নির্ণীত অংশের বর্গের তিনগুণ, অর্থাৎ $3x^4-12x^3y+12x^2y^2$ কে নৃতন একটি ভাজকের অংশরূপে, উপরোক্ত অবশিষ্টের বামদিকে লিখিয়া রাখ।

এই অবশিষ্টে, প্রথম পদ (অর্থাৎ, $12x^4y^2$) কে নৃতন ভাজকের প্রথম পদ $3x^4$ ং দারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল $4y^2$ কে ঘনমূলের **ভৃতীয় পদ**রূপে লিথা হইল।

এখন, পরবর্ত্তী পৃষ্ঠায় প্রদর্শিত নিয়মানুসারে, সম্পূর্ণ ভাজকটিকে তৈয়ারী করা হইল; এবং এই সম্পূর্ণ ভাজককে ঘনমূলের তৃতীয় পদ $4y^2$ দারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফলকে উহার উপরিভাগস্থিত রাশিমালা হইতে বিয়োগ করিবার পর, কিছুই অবশিষ্ট রিহল না।

অতএব, নির্ণেয় ঘনমূল = $x^2 - 2xy + 4y^2$.

$$3 \times (x^{2})^{2} = 3x^{4}$$

$$3 \times (x^{2})^{2} = 3x^{4}$$

$$3 \times (x^{2})^{2} = 3x^{4}$$

$$(-2xy)^{2} = -6x^{3}y$$

$$(-2xy)^{2} = 4x^{2}y^{2}$$

$$3 \times (x^{2} - 2xy)^{2} = 3x^{4} - 12x^{3}y + 12x^{2}y^{2} - 24xy^{3}$$

$$3 \times (x^{2} - 2xy)^{2} = 3x^{4} - 12x^{3}y + 24x^{2}y^{2} - 24xy^{3}$$

$$(4y^{2})^{2} = 3x^{4} - 12x^{3}y + 24x^{2}y^{2} - 24xy^{3} + 16y^{4}$$

$$3x^{4} - 12x^{3}y + 24x^{2}y^{2} - 24xy^{3} + 16y^{4}$$

$$3x^{4} - 12x^{3}y + 24x^{2}y^{2} - 24xy^{3} + 16y^{4}$$

$$3x^{4} - 12x^{3}y + 24x^{2}y^{2} - 24xy^{3} + 16y^{4}$$

প্রশ্নালা 107

নিম্নলিখিত রাশিসমূহের ঘনমূল নির্ণয় কর:

- 1. $x^3 + 27x^2 + 243x + 729$.
- 2. $27x^3 216x^2 + 576x 512$.
- 3. $64a^3 144a^2b + 108ab^2 27b^3$.
- 4. $33x^4 36x + x^6 + 63x^3 + 8 9x^5 + 66x^2$.
- 5. $8x^6 + 12x^5 30x^4 35x^3 + 45x^2 + 27x 27$.
- 6. $1-9x^2+33x^4-63x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}$.
- 7. $c^6 63c^3x^3 + 8x^6 9c^5x + 66c^2x^4 36cx^5 + 33c^4x^2$.

একতিংশ অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)

199. সংজ্ঞাঃ তুইটি সমজাতীয় রাশির একটি, অপরটির কতগুণ বা কত অংশ, ইহা যে অথও (integral) বা থও (fractional) সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয়, ে সেই শুদ্ধ অর্থাৎ অনবচ্ছিন্ন (abstract) সংখ্যাটিকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুস্পাত (Ratio) বলে। যথা,

রেহেতু, 2 ঘণ্টা ও 40 মিনিট উভয়ই সময়জ্ঞাপক রাশি, এবং প্রথমটি, দ্বিতীয়টি শ্বারা স্থচিত সময়ের **ভিনপ্তণ** সময় নির্দ্দেশ করে, অতএব, 2 ঘণ্টা ও 40 মিনিটের অন্ধপাত = 3.

আবার, যেহেতু, 9 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য 3 ফুট দৈর্ঘ্যের এক-চতুর্থাংশ, অতএব, 9 ইঞ্চি ও 3 ফুটের অমুপাত $=\frac{1}{4}$.

পুনরায়, যেহেতু, 18 শি. পরিমিত অর্থের এক-তৃতীয়াংশের চারিগুণ লইলে £1. 4 শি. পরিমিত অর্থ:পাওয়া যায়, অতএব, £1. 4 শি. ও 18 শি. এর অমুপাত = ‡; ইত্যাদি।

অতএব, দেখা যায় যে, ছুইটি সমজাতীয় বদ্ধ অর্থাৎ অবৈচ্ছিন্ন (concrete) রাশির উভয়কেই একই এককে পরিবর্ত্তিত করিলে, রাশিদ্বয়ের অন্প্রপাত এরূপ একটি ভগ্নাংশ হয়, যাহার লব ও হর যথাক্রমে (ঐ একক্টের তুলনায়) প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির পরিমাণ নির্দ্দেশ করে। এবং তুইটি শুদ্ধ অর্থাৎ অনবচ্ছিন্ন সংখ্যার অন্তুপাত, স্পষ্টতঃ, এরূপ একটি ভগ্নাংশ, যাহার লব ও হর যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশি দ্বারাই স্থচিত হইয়া থাকে।

কোন সংখ্যা a, এবং অপর এক সংখ্যা b, ইহাদের অনুপাতকে a:b, এইরূপে প্রকাশ করা হয়; কাজেই, a:b এবং $\frac{a}{b}$ উভয়ই একার্থবাধক। a ও b এর অনুপাতে, অর্থাৎ, a:b তে, a কে (অর্থাৎ, প্রথম পদকে) পূর্ব্বরাশি (antecedent) এবং b কে (অর্থাৎ, দ্বিতীয় পদকে) উত্তররাশি (consequent) বলা হইয়া থাকে।

কোন অমুপাতের পূর্বরাশি, উত্তররাশি হইতে বড়, বা.সমান, বা ছোট হইলে, ঐ অমুপাতকে যথাক্রমে গুরু অমুপাত (ratio of greater inequality), সাম্যামুপাত (ratio of equality), বা লযু অমুপাত (ratio of less inequality) বলা হয়।

। যেহেতু, কোন অন্তপাত একটি ভগ্নাংশ ভিন্ন আর কিছুই নং, স্থতরাং, ভগ্নাংশের ধর্ম অন্তপারে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, অন্তপাতেঁর পদ হুইটিকে যে কোন একই সংখ্যা দারা গুণ বা ভাগ করিলে, অন্তপাতের মানের কোন পরিবর্ত্তন হয় না। যথা, 3:4,6:8,15:20,3n:4n, প্রভৃতি অন্তপাতগুলি পরস্পার সমান।

অতএব, তুইটি অনুপাতের কোন্টি বড়, বা কোন্টি ছোট, তাহা নিরূপণ করাও: কষ্টকর নহে। দৃষ্টান্তস্বরূপ, 2:3, 4:5 এবং 7:10 অনুপাত তিনটি যথাক্রমে 20:30, 24:30 এবং 21:30 অনুপাত তিনটির সমান বলিয়া, স্পর্চ্চ বুঝা যাইতেছে যে, মধ্যম অনুপাতটিই সর্বাপেক্ষা বড়, এবং প্রথমটি নর্বাপেক্ষা ছোট।

200. অনুপাতের পদ প্রইটির প্রত্যেকের সহিত একই ধনরাশি যোগ করিলে, লঘু অনুপাত ব্যক্তিপ্রাপ্ত, এবং শুরু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

ধর, প্রদত্ত অমুপাতটি $\frac{a}{b}$ দারা স্থচিত হইতেছে; এবং উহার পদদ্বয়ের সহিত xযোগ করিয়া $\frac{a+x}{b+x}$ এই নূতন অমুপাত্টি পাওয়া গেল।

তাহা হইলে,
$$\frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{x(b-a)}{b(b+x)}$$
;

ষতএব, দেখা যায় যে, b হইতে a ছোট হইলে, অন্তর্ফল ধনাত্মক, এবং বড় হইলে, অন্তর্ফল ঋণাত্মক হইবে। স্থতরাং, যদি a < b হয়, তবে $\frac{a+x}{b+x} > \frac{a}{b}$ হইবে; এবং যদি a > b হয়, তবে $\frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$ হইবে।

কাজেই, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

টীকা। এইরপে দেখান যাইতে পারে যে, অমুপাতের পদন্বয়ের প্রত্যেকটি হইতে ছোট যে কোন একই ধনরাশি, উক্ত পদন্বয়ের প্রত্যেকটি হইতে বিয়োগ করিলে, লঘু অমুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত এবং গুরু অমুপাত রুদ্ধিপ্রাপ্ত হয়।

201. অন্ত্রশাভসমূহের সংস্থোপ বা সম্মিলন (Composition): একাধিক অমুপাতের পূর্বপদগুনির ধারাবাহিক গুণফলকে নৃতন পূর্বপদ এবং উত্তরপদগুলির ধারাবাহিক গুণফলকে নৃতন উত্তরপদর্মপে লইয়া যে নৃতন অমুপাত পাওয়া যায়, তাহাকে প্রদত্ত অমুপাতসমূহের সংযুক্ত, বা সন্মিলিড, বা মিশ্র অমুপাড (compound ratio) বলে। যথা,

3:4,8:9 এবং 2x:3y অনুপাত তিনটির 'সংযুক্ত অনুপাত' 3 imes 8 imes 2x:4 imes 9 imes 3y, অর্থাৎ, 4x:9y হইবে।

a:b অমুপাতটিকে ইহারই (অর্থাৎ, a:b এরই) সহিত সংযুক্ত করিয়া লব্ধ $a^2:b^2$ অমুপাতটিকে a:b এর **দিশুণাসুপাত** (duplicate ratio) বলে। এইরূপ, $a^3:b^3$ কে a:b এর **ব্রিগুণাসুপাত** (triplicate ratio), $a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$ কে a:b এর **ব্রিগুণাসুপাত** (sub duplicate ratio), $a^{\frac{1}{3}}:b^{\frac{1}{3}}$ কে a:b এর **ব্রিগুণাজিত অমুপাত** (sub-triplicate ratio), ইত্যাদিরূপ বলা হয়।

202. অনুশাতের আসম মান (Approximate values of Ratios) ঃ a এর তুলনার x এর মান অত্যস্ত ছোট্ট হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(a+x)^2$; a^2 এর আসন্ন মান (approximate value) a+2x : a এর সমান হইবে।

এখন,
$$\frac{(a+x)^2}{a^2} = \frac{a^2 + 2ax + x^2}{a^2} = 1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}$$
;

অতএব, ইহা $=1+\frac{2x}{a}$, (আসন্ন মান লইয়া); কারণ, $\frac{x^2}{a^2}$ (যাহা $=\frac{x}{a}\times\frac{x}{a}$), $\frac{2x}{a}$ এর সহিত তুলনায় অত্যন্ত ছোট এবং কাজেই, 1 এর সহিত তুলনায় আরও ছোট, অতএব, উপেক্ষণীয়।

স্থতরাং, আসন্ন মান লইলে,
$$\frac{(a+x)^2}{a^2} = 1 + \frac{2x}{a} = \frac{a+2x}{a}$$
 ... (1)

অনুসি.। (1) হইতে, স্পষ্টই দেখা য়ায় যে, $\sqrt{\frac{a+2x}{a}} = \frac{a+x}{a}$.

স্থতরাং, a এর তুলনায় x অত্যন্ত ছোট হইলে, বুঝা যায় যে,

$$\sqrt{a+x}: \sqrt{u}=a+\tfrac{1}{2}x:a.$$

টীক†। a এর তুলনায় x অত্যন্ত ছোট হইলে, উপরোক্তরূপে দেখান যাইতে পারে যে, $(a+x)^3$: $a^3=a+3x$: a ; $(a+x)^4$: $a^4=a+4x$: a ; $(a+x)^{\frac{1}{3}}$: $a^{\frac{1}{3}}=a+\frac{1}{3}x$: a ; ইত্যাদি।

203. তাত্রেহা ব্রাহ্ণি (Incommensurable Quantities) হুইটি রাশির অনুপাত যদি তুইটি অথগু সংখ্যার অনুপাতের আকারে প্রকাশ করা না যার, তবে উক্ত রাশি তুইটিকে ভাতেময় রাশি (incommensurable quantities) বলে। যথা, ৴3 এবং 2, এই রাশি তুইটি অমেয়; কারণ, এরূপ তুইটি অথগু সংখ্যা কোন সময়েই পাওয়া যায় না, যাহাদের অনুপাত ঠিক ৴3: 2 এর সমান।

তৃইটি অমের রাশির অন্থণতি, কোন সময়েই, তৃইটি অথগু সংখ্যার অন্থণতের আকারে প্রকাশ করিতে না পারিলেও, এরূপ তৃইটি অথগু সংখ্যা সকল সময়েই নির্ণয় করা সম্ভব, যাহাদের অন্থণাত হইতে প্রদন্ত রাশিদ্বয়ের, অন্থণতের পার্থক্য ইচ্ছান্তরূপ ক্ষুদ্র হুইতে ক্ষুদ্রতর করা যায়। দৃষ্টান্তস্বরূপ,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.73205...}{2} = .86602...$$

এবং কাজেই, $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{86602}{100000}$ এবং $< \frac{86603}{100000}$;

স্থতরাং, দেখা যায় যে, $\sqrt{3}:2$ হইতে 86602:100000, এবং 86603:100000 এর পার্থক্য, $\frac{1}{100000}$ হইজেও ছোট। স্পষ্টতঃ, $\sqrt{3}:2$ এর উপরোক্ত মান হইতে আরও ঘনিষ্ঠতর আসন্ন মান নির্ণয় করা যাইতে পারে।

টীকা। কোন সংখ্যাকে যদি তুইটি অথও সংখ্যার অমুপাতের আকারে প্রকাশ করা না দ্বার, তবে ঐ সংখ্যাটিকেও সচরাচর **অন্মেয় সংখ্যা** (incommensurable number) বলা হয়।

উলাহরণমালা

উদা. 1. ত্ইটি সংখ্যার অমুপাত 2:3 এর সমান; এবং সংখ্যাদ্বরের প্রত্যেকটির সহিত 9 যোগ করিলে, নৃত্ন অমুপাতটি 3:4 এর সমান হয়। সংখ্যা তুইটি নির্ণয় কর।

ষেহেতু সংখ্যাদ্বয়ের অন্ধ্রুণাত 2:3 এর সমান, স্থতরাং উহাদিগকে 2x এবং 3x দারা স্থচিত করা যাইতে পারে। কাজেই, প্রশ্নের দ্বিতীয় সর্ত্তামুসারে,

$$\frac{2x+9}{3x+9} = \frac{3}{4}.$$

সতএব, 8x + 36 = 9x + 27; x = 9.

স্থতরাং, সংখ্যা তুইটি যথাক্রমে 18 ও 27 হইবে।

উদা. 2. 10x + 3y : 5x + 2y = 9 : 5 হইলে, x : y এর মান নির্ণয় কর।

এখন,
$$9 = \frac{10x + 3y}{5x + 2y} = \frac{10 \cdot \frac{x}{y} + 3}{5 \cdot \frac{x}{y} + 2};$$

সতএব,
$$45 \cdot \frac{x}{y} + 18 = 50 \cdot \frac{x}{y} + 15$$
;

$$\therefore 5. \frac{x}{y} = 3; \qquad \therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{5}.$$

্র ক্রমন এ. x এবং y উভয়ই ধনাত্মক হইলে, নিম্নলিখিত অনুপাতন্ত্রের কোনটি বৃদ্ধ ?

$$x^3+y^3:x^2+y^2$$
, অথবা, $x^2+y^2:x+y$?

এখন,
$$\frac{x+y^3}{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{xy^3+x^3y-2x^2y^2}{(x^2+y^2)(x+y)} = \frac{xy(x-y)^2}{(x^2+y^2)(x+y)}$$
 •

এখন, x, y হইতে বড়ই হউক আর ছোটই হউক, $(x-y)^2$ সকল সময়েই ধনাত্মক হইবে, অতএব, উপরিলব্ধ অন্তর্যুফলটিও ধনাত্মক হইবে.।

মতরাং,
$$\dot{x^3} + y^3 : x^2 + y^2 > x^2 + y^2 : x + y$$
.

উদা. 4. তুইটি সৈশুদলে, যথাক্রমে 11000 ও 7000 সৈশু আর্ছে; যুদ্ধ করিবার পূর্বে প্রত্যেক দলেই আরও 1000 সৈশু আসিয়া যোগ দিল। কোন্ দলের সৈশুসংখ্যা, অমুপাত হিসাবে, অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল ? [কলিঃ প্রবেশিকা, 1879.]

প্রথম দলের, বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা : পূর্ব্ব সংখ্যা = 12000 : 11000 = 12 : 11 ; দিতীয় দলের, বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা : পূর্ব্ব সংখ্যা = 8000 : 7000 = 8 : 7. এখন, ষেহেতু, 12 : 11 = 84 : 77 এবং 8 : 7 = 88 : 77 ; অতএব, 8 : 7 > 12 : 11.

স্কুতরাং, পূর্ব সংখ্যার সহিত তুলনায়, দ্বিতীয় দলের সৈন্তসংখ্যাই অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল।

প্রশ্নালা 108

নিম্নলিখিত অমুপাতদ্বয়ের কোন্টি বুহত্তর ?

- · 1. 4:5 অথবা 7:8? ' 2. 7:10 অথবা 11:14?
 - 3. 9:5 অথবা 13:8?
 4. 22:27 অথবা 32:45?
 - 5. 28:39 অথবা 49:65?

নিম্নলিখিত অমুপাতগুলির 'সংযুক্ত-অমুপাত' নির্ণয় কর:

- 6. a:b, b:c and c:d. 7. 3:5,7:9 and 15:28.
- 8. $a+x: a-x, a^2+x^2: (a+x)^2$ and $(a^2-x^2)^2: a^4-x^4$.
- 9. 16:5, 5:4 এর ত্রিগুণামুপাত এবং 9:4 এর দ্বিভাজিত অমুপাত।
- 10. 25:18, 81:49 এর দিভাজিত অমুপাতৃ, 2:3 এর ত্রিগুণামুপাত এবং 7:5 এর দিগুণামুপাত।
 - 11. 2x + 5y : 3x + 5y = 9 : 10 হইলে, x : y এর মান নির্ণয় কর। "
 - 12. x:y=3:4 হইলে, 5x+9y:16x+5y এর মান নির্ণয় ক'র।
- 13. তুইটি সংখ্যার অনুপাত 7: ৪ এবং উহাদের যোগফল 135; সংখ্যা তুইটি নির্ণয় কর।
 - 14. ছুইটি সংখ্যার অমুপাত 5 : 3 এবং অন্তর্ফল 34 ; সংখ্যা ছুইটি নির্ণয় কর।
- 15. হুইটি সংখ্যার অমুপাত 4 : 5, এবং উহ্নাদের প্রত্যেকটির সহিত 7 যোগ করিলে, সমষ্টিবয়ের অমুপাত 5 : 6 হয় ; সংখ্যা হুইটি নির্ণয় কর ।
- 16. ত্ইটি সংখ্যার অমুপাত 7:9, এবং উহাদের প্রত্যেকটি হইতে 10 বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট হুইটির অমুপাত 8:11 হয়; সংখ্যা তুইটি নির্ণয় কর।
 - 17. x এর মান কত হইলে, $23 + x \cdot 19 + x$, 2 এর সমান হইবে ?

- 18. 25:37 অমুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে, উহা 5:6 এ পরিণত হইবে ?
- 19. 29:38 অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে, উহা 4:7 এ পরিণত হইবে ?
- 20. a:b অমুপাতটির উভয় পদের সহিত কোন্ রাশি যোগ করিলে, উহা
 c:d এ পরিণত হইবে?
 - 21. a > x হইলে, দেখাও যে, $a^2 x^2 : a^2 + x^2 > a x : a + x$.
 - 22. (77) (3, $a^2 + b^2 : a + b < a^2 b^2 : a b$.

নিম্নলিখিত অমুপাতের আসন্ন মান নির্ণয় কর :

- **23.** $(226)^3:(225)^3$. **24.** $\sqrt{(3546)}:\sqrt{(3542)}$.
- 25. তিনটি ছ্বান্ত A, B, C প্রতিমাসে যথাক্রমে 15 টাকা, 20 টাকা এবং 25 টাকা করিয়া বৃত্তি পায়; এবং উহা হুইতে তাহারা প্রতিমাসে যথাক্রমে $8\frac{3}{4}$ টাকা, $11\frac{1}{4}$ টাকা এবং $15\frac{1}{4}$ টাকা ব্যয় করে। উহাদের মধ্যে কোনটি সর্ব্বাপেক্ষা মিতব্যয়ী ?

সমানুপাত (Proportion)

204. যদি চারিটি রাশি এরূপভাবে পরম্পর-সম্বদ্ধ হয় যে, প্রথম ও দিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের অনুপাতের সমান, তাহা হইলে উক্ত রাশি চারিটিকে সমানুপাতী (proportionals) বলে। যথা, a:b=c:d হইলে, %, b, c, d রাশি চারিটিকে সমানুপাতী বলা হয়। এই সম্বদ্ধকে, অনেক সময়, 'a:b::c:d', এইরূপে লিখা হুয়, এবং 'a ও b এর অনুপাত যাহা, c ও d এর অনুপাতও তাহা' এইরূপে পড়া হইয়া থাকে।

উপরোক্ত সমান্তপাতে, a ও d কে (অর্থাৎ, প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে) তুই অব্যান্ত রাশি (extremes) এবং b ও c কে (অর্থাৎ দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে) তুই ব্যান্ত রাশি (means) বলে। চতুর্থ রাশিকে, (অর্থাৎ, d কে) a, b, c এর চতুর্থ সমানুপাতী (fourth proportional)ও বলা ইইয়া থাকে। .

তিন বা তদধিক ^{*}রাশি যদি এরপভাবে পরম্পর-সম্বদ্ধ হয় যে, প্রথম ও দিতীয়ের অনুপাত, দিতীয় ও তৃতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের অনুপাত, প্রভৃতি অনুপাতগুলি পরম্পর সমান, তাহা হইলে, ^{*} ঐ রাশিসমূহকে **ক্রেমিক** বা **ধারাবাহিক •** সমানুপাতী (in continued proportion) বলে। যথা, a, b, c, d রাশি চারিটি

দি এরূপ হয় যে, a:b=b:c=c:d, তাহা হইলে, উহারা ক্রমিক বা ধারাবাহিক সমামূপাতী হইবে।

তিনটি রাশি a, b, c ক্রমিক সমান্তপাতী হইলে (অর্থাৎ, a:b=b:c হইলে), b কে a ও c এর মধ্য সমান্তপাতী (mean proportional), এবং c কে a ও b এর তৃতীয় সমান্তপাতী (third proportional) বলে।

205. a:b::c:d হইলে,.ad=bc হইবৈ।

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, অতএব, উভয় পক্ষকে bd দারা গুণ করিলে, ad=bc হয়,

স্কুতরাং, চারিটি রাশি সমান্তপাতী হইলে, উহাদের অন্ত্যরাশিষয়ের গুণফল, মধ্যুরাশিষয়ের গুণফলের সমান।

[বিপরীতক্রমে, ad=bc হইলে, a:b::c:d হয়বে ; কারণ, প্রদত্ত সমতার উভয় পক্ষকে bd দারা ভাগ করিলেই $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়।]

অনুসি.। a:b::c হইলে, $ac=b^2$ হইবে; অর্থাৎ, তিনটি রাশি ক্রমিক সমামুপাতী হইলে, অন্ত্যুরাশিদ্ধয়ের গুণফল মধ্যুরাশির বর্গের সমান হইবে।

টীকা। উপরোক্ত ফলগুলি হইতে সহজেই দেখা যায় যে, চারিটি সমান্ত্রপাতীর যে কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে অবশিষ্টটি, অথবা, তিনটি ক্রমিক সমান্ত্রপাতীর যে কোন তুইটি দেওয়া থাকিলে অবশিষ্টটি অবিলম্বে নির্ণয় করা যায়।

প্রশ্নালা 109

নিম্নলিখিত প্রত্যেক ক্ষেত্রে তৃতীয় সমান্ত্রপাতীটি নির্ণয় কর:

1. 9. 6. **2.** 8, 12.

3. 6, 15.

4. 16, 24.

নিম্নলিখিত প্রত্যেক ক্ষেত্রে চতুর্থ সমাষ্ঠ্পাতীটি নির্ণয় কুর :

5. 6, 8, 15.

6. 14, 24, 35.

7. '0014, 1'4, '02.

নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের মধ্য সমান্ত্রপাতীটি নির্ণয় কর:

8. 4, 9.

9. 7, 28.

10. 6, 54.

206.
$$a:b::b:c$$
 হাইকো, $a:c::a^2:b^2$ হাইকো।
কারণ, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c};$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}; \quad \text{weat}, \quad \frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}.$$

অর্থাৎ, তিনটি ক্রমিক স্মান্তপাতীর, প্রথম ও তৃতীয়ের অন্তপাত, প্রথম ও দ্বিতীয়ের দিগুণিত (duplicate) অন্তপাতের সমান।

টীকা। তজ্ঞপ, a:b=b:c=c:d হইলে, সহজেই দেখান যাইতে পারে $\mathfrak{C}^{\mathtt{T}}, a:d=a^3:b^3$. [ইুহার প্রমাণের ভার ছাত্রদের উপর রুহিল।]

কারণ,
$$a = \frac{c}{d}$$
;

$$\therefore 1 \div \frac{a}{b} = 1 \div \frac{c}{d}$$
; অতথ্য, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমান্ত্রপাতী হইলে, উহাদিগকে **ব্যস্তভাবে** (taken inversely) লইলেও, উহারা সমান্ত্রপাতী হইবে।

এই প্রক্রিয়াকে ব্যস্ত প্রক্রিয়া (Invertendo) বলে।

কারণ,
$$\frac{a}{b} = \overset{\bullet}{c} \overset{\bullet}{d}$$
; $\therefore \quad \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \overset{\bullet}{d} \times \frac{b}{c}$; অথবা, $\overset{\bullet}{c} = \overset{\bullet}{d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমামুপাতী হইলে, উহাদিগকে **একান্তরভাবে** (alternately) লইলেও, উহারা সমামুপাতী হইবে।

এই প্রক্রিয়াকে একান্তরকরণ প্রক্রিয়া (Alternando) বলে।

209.
$$a:b::c:d$$
 হাইলো, $a+b:b::c+d::d$ হাইলো, $a+b:d::d$ হাইলো, $a+d::d$ হাইলো, $a+$

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমান্ত্রপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীরের সমষ্টির সহিত দ্বিতীরের অন্ত্রপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টির সহিত চতুর্থের অন্ত্রপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে যৌগিক প্রক্রিয়া (Componendo) বলে।

210.
$$a:b::c:d$$
 ইউলো, $a-b:b::c-d:d$ ইউৰো কারণ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; ... $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$; অথবা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমামুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের বিয়োগফলের সহিত দ্বিতীয়ের অমুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের বিয়োগফলের সহিত চতুর্থের অমুপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে **ভাগ-প্রক্রিয়া** (Dividendo) বলে।

অনুসি.।
$$a:b::c:d$$
 হইলে, $a:a-b::c:c-d$.

কারণ, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$;

স্তবাং, ব্যস্তভাবে লইলে, (taken inversely), $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-d}$.

অতএব,
$$\frac{b}{a-b} \times \frac{a}{b} = \frac{d}{c-d} \times \frac{c}{d}$$
 : অথবা, $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$

অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমান্ত্রপাতী হইলে, প্রথমের সহিত প্রথম ও দ্বিতীয়ের অস্তরফলের অন্ত্রপাত, তৃতীয়ের সহিত তৃতীয় ও চতুর্থের অন্তরফলের অন্ত্রপাতের সমান।

এই প্রক্রিয়াকে রূপান্তর-প্রক্রিয়া (Convertendo) বলে।

211. a:b::c:d ইউলৈ, u+b:a−b::c+d:c−d হৈ

ইউবেঁ

নিয়ম 209 হইতে,
$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$
 (1)

নিয়ম 210 হইতে,
$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$
. ... (2)

কাজেই, (1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

ু অর্থাৎ, চারিটি রাশি সমান্ত্রপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের সমষ্টি এবং অন্তরফলের অন্ত্রপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টি এবং অন্তরফলের অন্ত্রপাতের সমান হইবে।

এই প্রক্রিয়াকে অনেক সময়ে 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া (Componendo and Dividendo) বলে।

টীকা। এই নিয়মে প্রমাণিত ফলটি কতিপয় বিশেষ শ্রেণীর সমীকরণ সমাধানের পক্ষে অত্যন্ত উপযোগী। নিমে ইহার দৃষ্টান্ত দেওয়া যাইতেছে।

উদা. 1. সমাধান কর:
$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b.$$

'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া হারা, $\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$.

$$\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$$

অতএব,
$$\frac{a+x}{a-x} = {b+1 \choose b-1}^2 = \frac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1}$$
.

আবার, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দ্বারা.

$$\frac{2a}{2x} = \frac{2(b^2+1)}{4b}$$
;

$$\frac{2a}{2x} = \frac{2(b^2 + 1)}{4b}$$
; , অথবা, $\frac{a}{x} = \frac{b^2 + 1}{2b}$;

$$x(b^2 + 1) = 2ab$$
; $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$

$$x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$$

উলা. 2. সমাধান কর:
$$\frac{1-ax}{1+ax}$$
. $\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1$.

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = \frac{1+ax}{1-ax}$$

এখন,
$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = \frac{1+ax}{1-ax}$$
; $\frac{1+bx}{1-bx} = \frac{1+2ax+a^2x^2}{1-2ax+a^2x^2}$

স্থতরাং, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দারা, $\frac{1}{bx} = \frac{1+a^2x^2}{2ax}$;

...
$$b(1+a^2x^2)=2a$$
, অথবা, $a^2x^2=\frac{2a}{b}-1$;

$$\therefore x = \frac{1}{a}, \sqrt{\frac{2a}{b} - 1}.$$

উদা. 3.
$$x = \frac{4ab}{a+b}$$
 হইলে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b}$ এর মান নির্ণয় কর।

[এলাহাবাদ, 1892.]

প্রদত্ত সন্তামুসারে,
$$\frac{x}{2a}=\frac{2b}{a+b}$$
, " এবং $\frac{x}{2b}=\frac{2a}{a+b}$

অতএব, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দারা,

$$\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{a+3b}{b-a}$$
, and $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b}$.

মুতবাং, প্রাদন্ত বাশি =
$$\frac{-(a+3b)}{a-h} + \frac{3a+b}{a-h}$$

= $\frac{2(a-b)}{a-h} = 2$.

টীকা। অন্তরূপে সমাধানের জন্ম 171 নিয়মের উদা, 2 দেখ।

Gen. 4. (a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)হইলে, দেখাও যে, a:b::c:d.

প্রদত্ত সম্বন্ধার্মারে, $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d} = \frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

অতএব, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দারা.

$$a+b \atop c+d=c-d$$
 ;
$$a+b \atop a-b=c-d$$
 [একান্তরকরণ প্রক্রিয়া দারা]

এখন, দ্বিতীয়বার 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া দারা.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

GF1. 5.
$$x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$$
 $x = \sqrt[3]{m+1}$

দেখাও যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$ হইবে।

প্রদত্ত সম্বন্ধ হইতে, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিযা দারা,

$$x+1 = \sqrt[3]{m+1};$$

$$x-1 = \sqrt[3]{m-1};$$

$$x - 1 = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

অতএব, 'যোগ ও ভাগ' প্রক্রিয়া'র দিতীয়বার প্রয়োগ দারা,

$$\frac{m}{1} = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1};$$

$$m(3x^2+1)=x^3+3x$$

 $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$.

প্রশ্নালা 110

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি স্মাধান কর:

1.
$$\frac{x+y}{x-y} = 5$$

 $2x + 3y = 36$

3.
$$\frac{5x - 7y}{5x + 7y} = \frac{1}{7}$$
$$3x - 5y = 18$$

5.
$$\frac{2x + \sqrt{4x^2 - 1}}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} = 4$$
.

7.
$$\sqrt{\frac{36x+1}{36x+1}} + \sqrt{\frac{36x}{36x}} = 9$$
.

9.
$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{5} - x}{\sqrt{5} - \sqrt{5} + x} = 5$$
?

11.
$$\frac{a^{\frac{1}{2}} - \{a - (a^2 - ax)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + \{a - (a^2 - ax)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}} = b.$$

প্রমাণ কর যে, a:b::c:d,

12.
$$(a+3b+2c+6d)(a-3b-2c+6d)$$

= $(a-3b+2c-6d)(a+3b-2c-6d)$ $= (a-3b+2c-6d)$

13.
$$(2a+b+4c+2d)(2a-b-4c+2d)$$

= $(2a-b+4c-2d)(2a+b-4c-2d)$ **\(\frac{1}{2}(c-1)(2a+b-4c-2d)\)**

14.
$$x = \frac{\sqrt{2a+3b} + \sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b} - \sqrt{2a-3b}}$$
 হইলে, দেখাও যে, $3bx^2 - 4ax + 3b = 0$.

15.
$$x = \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$
 হইলে, $\frac{x + \sqrt{8}}{x - \sqrt{8}} + \frac{x + \sqrt{12}}{x - \sqrt{12}}$ এর মান নির্ণয় কর।

212. একতি " অভ্যাবশ্যকীয়া প্রতিজ্ঞা p, q, r, n যে কোন সংখ্যাই নির্দেশ করুক না কেন, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবৈ যে, উহাদের প্রত্যেকে $\left(\frac{pa^n + qc^n + re^n}{pb^n + ad^n + rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ এর সমান।

4.
$$16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3 = \frac{a+x}{a-x}$$

ি কলিঃ প্রবেশিকা, 1886.

6.
$$\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$$

8.
$$\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = \frac{62}{63} \cdot \frac{1+x}{1-x}$$

10.
$$\frac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$$

মনে কর, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ এর প্রত্যেকে k এর সমান ; তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, $a=bk,\ c=dk$ এবং e=fk হইবে।

মত এব,
$$pa^n=p(bk)^n=pb^nk^n$$
, $qc^n=q(dk)^n=qd^nk^n$, $qc^n=q(dk)^n=qd^nk^n$, $qc^n=r(fk)^n=rf^nk^n$, $qc^n=r(fk)^n=rf^nk^n$, $qc^n=r(fk)^n=rf^nk^n$, $qc^n+qc^n+re^n=(pb^n+qd^n+rf^n).k^n$; $qc^n=\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}$.

স্থতরাং,
$$k=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$
 ; অতএব, প্রতিজ্ঞাটি প্রতিপন্ন হইল।

অবুসি.। p, q, r, n এর প্রত্যেককেই 1 বলিয়া ধরিলে, দেখা যায় যে,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}.$$

এইরূপে, $p,\,q,\,r,\,n$ এর বিশেষ বিশেষ মানের জন্ম অন্রূপ ফলসমূহ নির্ণয় করা যায়।

টীকা। উপরোক্ত তিনটি সমান অন্পাতের বেলায় প্রতিপন্ন প্রতিজ্ঞাটিকে যে কোন সংখ্যক সমান অন্পাতের বেলায়ও, অন্তর্মপ যুক্তিসাহায়ে প্রমাণ করা যাইতে পারে। ছাত্রগণের পক্ষে, এই জাতীয় প্রশ্ন সমাধান করিবার সময়, উপরিলব্ধ ফলের প্রয়োগ না করিয়া, প্রত্যেকক্ষেত্রেই উপরিপ্রদর্শিত প্রণালী অনুসারে, ফলগুলি নির্ণয় করা উচিত। এই উদ্দেশ্যে নিম্নে কতকগুলি প্রশ্ন সন্ধিবেশিত হইল।

প্রথমালা 111

 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{c}{f}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ইহাদের প্রত্যেকটি শন্ত্রপাত নিম্নলিখিত রাশিগুলির সমান :

1.
$$\frac{a-c+e}{b-d+f}$$
 2. $\frac{a+3c-5e}{b+3d-5f}$ 3. $\frac{5a-7c-13e}{5b-7d-13f}$ 4. $\frac{ka+lc+me}{kb+ld+mf}$ 5. $(\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2})^{\frac{1}{2}}$ 6. $(\frac{a^3-2c^3+3e^3}{b^3-2d^3+3f^3})^{\frac{1}{6}}$. [Fig. 20.1875.]

7.
$$\frac{\sqrt[3]{a^3+c^3+e^3}}{\sqrt[3]{b^3+d^3+f^3}}$$
 [কলিঃ প্রবেশিকা, 1882.]

 $rac{a}{b}=rac{c}{d}=rac{e}{f}=rac{g}{h}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ইহাদের প্রত্যেকটি নিম্নলিখিত রাশি– গুলির সমান :

8.
$$\left(\frac{a^{-1}+c^{-1}+e^{-1}+g^{-1}}{b^{-1}+d^{-1}+f^{-1}+h^{-1}}\right)^{-1}$$
. 9. $\sqrt{\frac{a^4-2c^4+3e^4-4g^4}{b^4-2d^4+3f^4-4h^4}}$.

10. $\sqrt{\left(\frac{3a^{-2}-7c^{-2}-8e^{-2}+15g^{-2}}{3b^{-2}-7d^{-2}-8f^{-2}+15h^{-2}}\right)^{-1}}$.

213. বিবিধ উ্দাহরণমালাঃ

উপা. 1. $x:y::n^2:n^2$ এবং $m:n::\sqrt{p^2+x^2}:\sqrt{p^2-y^2}$ হইলে, দেখাও যে, $p^2:xy::x+y:x-y$.

' এখন,
$$x = \frac{m^2}{n^2} = \frac{p^2 + x^2}{p^2 - y^2}$$
;
$$\therefore x(p^2 - y^2) = y(p^2 + x^2),$$
অতথ্য, $p^2(x - y) = xy(x + y)$;
$$\therefore \frac{p^2}{xy} = \frac{x + y}{x - y}$$
;

অর্থাৎ, $p^2: xy: x+y: x-y$.

উদা. 2. a:b:: c:d হইলে, দেখাও বে,

$$ma + nc : mb + nd : : (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} : (b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}$$
. [क्लि:, 1880.]

$$cace, \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \; ; \qquad \vdots \qquad \frac{ma}{mb} = \frac{nc}{nd}$$

অক্তএব, প্রত্যেকটি
$$= \frac{ma+nc}{mb+nd}$$
 [নিয়ম 212]

আবাদ, থেছেতু,
$$\frac{a}{b}=\frac{c^*}{d}$$
; $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$,

অতএব, প্রত্যেকটি =
$$\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$$
. , [নিয়ম 212]

মৃত্যাং,
$$\frac{ma+nc}{mb+nd} = \frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$$
, ... (1)

এবং
$$\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{a^2}{b^2}$$
. ... (2)

অতএব, (1) এবং (2) হইতে,

$$\frac{ma + nc}{mb + nd} = \frac{(a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

উদা. 3.
$$\frac{x}{(b-c)(b+c-2a)} = \frac{y}{(c-a)(c+a-2b)} = \frac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$$
 হইলে, $x+y+z$ এর মান নির্ণয় কর। [কলিঃ প্রবেশিকা, 1889.]

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাত = k.

সতএব,
$$x = k(b-c)(b+c-2a) = k\{(b^2 + c^2) - 2c(b-c)\},$$

 $y = k(c-a)(c+a-2b) = k\{(c^2 + a^2) - 2b(c-a)\},$
 $z = k(a-b)(a+b-2c) = k\{(a^2 - b^2) - 2c(a-b)\}.$

ম্বতাবাং,
$$x+y+z=k[\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}$$

$$-2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}]$$

উদ্ধা. 4.
$$\frac{ay-bx}{c} = \frac{cx-az}{b} = \frac{bz-cy}{a}$$
 হইলে, দেখাও যে, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

ধর. প্রাহত প্রত্যেকটি অনুপতি = k.

অতএব,
$$(a_{s'}^{a_{s'}}-bx)c=kc^{2}$$
, $(cx-az)b=kb^{2}$, $(bz-cy)a=ka^{2}$.

স্থতরাং, যোগ করিয়া, $k(a^2 + b^2 + c^2) = 0$; . . . k = 0.

অতএব,
$$ay - bx = 0$$
; ... $ay = bx$; ... $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$... (1)

আবার,
$$cx - az = 0$$
; $cx = az$; $\frac{x}{a} = \frac{z}{c}$... (2)

স্থতরাং, (1) এবং (2) হইতে,
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$
.

উদা. 5.
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$
 হইলে,
দেখাও যে, $(a-d)^2 = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$.

প্রদত্ত সম্বন্ধাত্মসারে,

প্রদান স্পারে,
(i)
$$b^2 = ac$$
; (ii) $c^2 = bd$; (iii) $bc = ad$. [নিয়ম 205]
এখন, $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2$

$$= (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ac) + (d^2 + b^2 - 2bd)$$

$$= 2(b^2 - ac) + 2(c^2 - bd) + a^2 + d^2 - 2bc$$

$$= a^2 + d^2 - 2bc$$

$$= a^2 + d^2 - 2ad$$

$$= (a-d)^2.$$
[(iii) ইইতে]

উপা. 6. a : b : : c · d হইলে,

5.
$$a:b::c\cdot d$$
 হইলে,
দেখাও যে, $4(a+b)(c+d)=bd\left\{ \frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d} \right\}^2$ [কলিঃ, 1874.]

যেহেতু,
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
 ; $\cdot \cdot \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$; [যোগক্ৰিয়া]

জ্ঞাতএব, স্পষ্টিতঃ
$$\frac{a+b}{b} + \frac{c+d}{d} = \frac{2(a+b)}{b} = \frac{2(c+d)}{d}.$$

স্থতরাং,
$$\left\{\frac{a+b}{b} + \frac{c+d}{d}\right\}^2 = \frac{2(a+b)}{b} \times \frac{2(c+d)}{d}$$

$$= \frac{4(a+b)(c+d)}{bd};$$

$$d\left\{\frac{a+b}{b} + \frac{c+d}{d}\right\}^2 = 4(a+b)(c+d).$$

উদো. 7. a:b::p:q হইলে,

দেখাও বে,
$$\qquad \qquad a^2+b^2: rac{a^3}{a+b}:: p^2+q^2: rac{p^3}{p+q}.$$

প্রদত্ত সম্বন্ধ হইতে

$$\frac{b}{a} = \frac{q}{p}$$
; এবং, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{q^2}{p^2}$.

মুতরাং, (i)
$$\frac{a+b}{a} = \frac{p+q}{q}$$
, এবং (ii) $\frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{p^2+q^2}{p^2}$.

(i) এবং (ii) দ্বারা স্থাচিত অমুপাত তুইটিকে 'সংযুক্ত' করিয়া,
$$\frac{(a^2+b^2)(a+b)}{a^3} = \frac{(p^2+q^2)(p+q)}{p^3},$$
 অথবা,
$$\frac{a^2+b^2}{\left(\frac{a^3}{a^3}\right)} = \frac{p^2+q^2}{\left(\frac{p^3}{a^3}\right)};$$

$$\frac{a^3}{\left(\frac{a^3}{a+b}\right)} = \frac{p^3}{\left(\frac{p^3}{p+q}\right)},$$

অধাৎ,
$$a^2 + b^2 : \frac{a^3}{a+b}$$
 : $p^2 + q^2 : \frac{p^3}{p+q}$

 $m:\kappa::p:q$ হইলে, **উ**₩1. 8.

প্রমাণ কর যে,
$$\frac{(m-n)(m-p)}{n} = (m+q) - (n+p)$$
. [কলিঃ, 1859.]

এখন,
$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$
; $\frac{m-n}{n} = \frac{p-q}{q}$; $\frac{m-n}{n} = \frac{p-q}{q}$;

আবার,
$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$$
; $\cdot \cdot \frac{m-p}{p} = \frac{n-q}{q}$.

স্থতরাং,
$$\frac{(m-n)(m-p)}{np} = \frac{(p-q)(n-q)}{q^2}$$
,

অথবা,
$$\frac{(m-n)(m-p)}{mq} = \frac{(p-q)(n-q)}{q^2}$$
 [:: $np = n.q$]

$$\frac{mq}{m} = \frac{q}{pn - q(n+p) + q^2}$$

$$\frac{(m-n)(m-p)}{m} = \frac{pn - q(n+p) + q^2}{q}$$

$$\frac{mq}{m} + q^2 - q(n+p)$$

$$= \frac{mq + q^2 - q(n+p)}{q}$$

$$= (m+q) - (n+p).$$
[: : $pn = mq$].

উন্ধা. 9.
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$
 হইলে,

দেখাও যে, $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

কলিঃ প্রবেশিকা, 1887.]

ধর, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অমুপাত =k.

$$\begin{array}{c}
k^2b^2 = a^2 \\
k^2c^2 = b^2 \\
k^2d^2 = c^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2, \\
k^2(b^2 + c^2 + d^2) = a^2 + b^2 + c^2 +$$